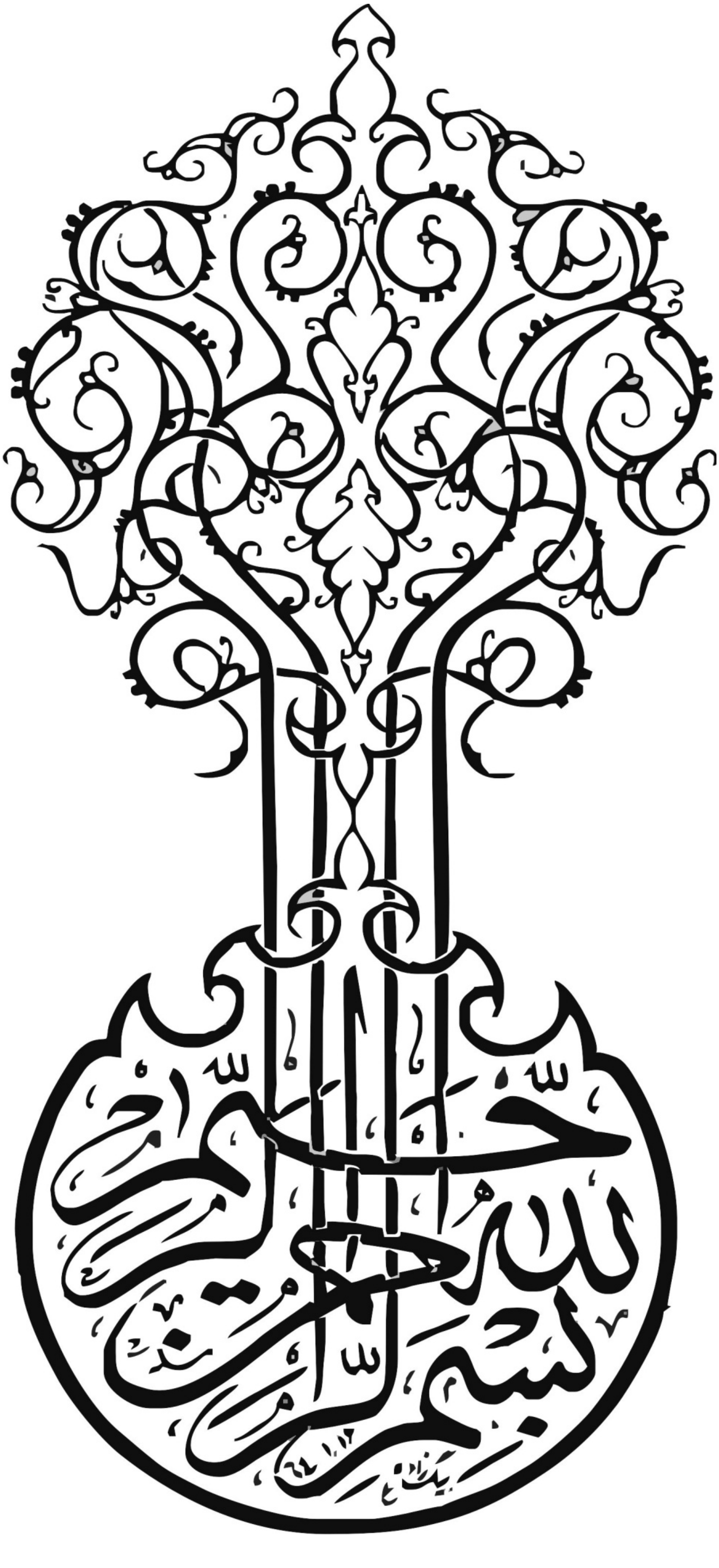
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه محقق اردبیلی

دانشکده علوم

گروه ریاضی

روش فوق تخفیف متوالی متقارن اصلاح شده

برای حل مسائل نقطه زینی

استاد راهنما:

دکتر داود خجسته سالکویه

توسط:

سمیه شمسی دیلمی

پاییز ۱۳۸۸

تقدیم

تقدیم به خطوط مبهم پیشانی پدرم به رسم بوسه ای بر قلب باصفایش

وشانه های بی دریغ مادرم به رسم ثنایی در خور مقامش

و تقدیم به یگانه ی زندگیم

او که نگاهش سزاوار ستایش

وجودش آرامش دل

عطر نفسش طنین زندگی

وحضور همیشگی اش تسلی بخش لحظه های تنهایی ام است.

سپاسگزاری

با حمد و ستایش به درگاه پروردگار متعال که توفیق به انجام رسانیدن این تحقیق را به بنده ی حقیر ارزانی داشت. سپاس اولین و برترین معلمان زندگی، پدر و مادر مهربانم را که بودنم و تمام توفیقاتم را مدیون قلب مهربانشان هستم و در سایه ی دعای خیرشان، تحمل مشکلات برایم مقدور می گردد. از محضر استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای دکتر داود خجسته سالکویه که همواره با صبر و حوصله ی فراوان و با راهنمایی های ارزشمند خویش مرا در امر تهیه و تدوین مطالب یاری نمودند کمال سپاسگزاری را دارم. از آقایان جناب دکتر رحیمی و جناب دکتر فرهادی نیا که زحمت بازخوانی و داوری این رساله را بر عهده داشتند، کمال تشکر را دارم. همچنین از همراهی ها و دلگرمی های کسی تشکر می کنم که نام و حضورش نه تنها در این رساله که همواره در لحظه هایم جاودانه شده است. در پایان از همه ی دوستان عزیزم سپاسگزارم

نام خانوادگي: شمسی دیلمی	**نام:** سمیه
عنوان پایان نامه: روش فوق تخفیف متوالی متقارن اصلاح شده برای حل مسائل نقطه زینی	
استاد راهنما: دکتر داود خجسته سالکویه	
مقطع تحصيلي: كارشناسي ارشد **رشته:** رياضي كاربردي **گرایش:** جبر خطی **دانشگاه:** محقق اردبيلي **دانشكده:** علوم **تاريخ فارغ تحصيلي:** ۱۳۸۸/۹/۲۶ **صفحات:** ۱۰۳	
کلید واژه: دستگاه افزوده، SOR، SOR-like، SSOR، MSSOR، ISSOR، الگوریتم چولسکی ناقص، پیش شرط ساز	
چکیده: دستگاه معادلات خطی افزوده در بسیاری از محاسبات علمی و کاربردی،مثل حل تقریبی مسأله استوکس به روش عناصر متناهی ظاهر می شود. در این پایان نامه ابتدا روشهای SOR-like، SSOR و MSSOR برای حل اینگونه دستگاه ها را مطالعه می کنیم. سپس یک پیش شرط ساز ساده اما کارا برای روش SOR-like ارائه می شود. در ادامه شکل اصلاح شده ای از روش SSOR بنام ISSOR ارائه می گردد. در پایان نتایج عددی برای نشان دادن کارائی روشها را ارائه می نمائیم.	

فهرست مندرجات

عنوان .... صفحه

فهرست شکل ها

عنوان شکل .... صفحه

فهرست جدول ها

عنـــــــــــــــــــــــــــــــوان
جدول...صفحه

پیشگفتار

بسیاری از مسائل علوم کاربردی و مهندسی منجر به دستگاه افزوده‌ی[1] زیر می‌شود

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ q \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

که در آن $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$، یک ماتریس معین مثبت متقارن و $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$، به طوری که $m \geq n$ و B دارای رتبه‌ی کامل است و هدف یافتن بردار $(x, y)^T$ است که در (۱) صدق کند. به این گونه از مسائل، مسائل نقطه زینی گفته می‌شود. دستگاه‌های مشابه دستگاه ذکر شده در مسائلی نظیر تقریب عناصر متناهی[2] برای حل معادله‌ی ناویر استوکس[3]، بهینه سازی مقید[4]، مسائل حداقل مربعات تعمیم یافته[5] و...[۴، ۵، ۱۶] ظاهر می‌گردند. وقتی ماتریس ضرایب دستگاه (۱) بزرگ و تُنُک[6] باشد، روش‌های تکراری اعم از ایستا[7] یا غیرایستا[8] برای حل آن مؤثر است و این به خاطر ذخیره‌ی حالت تُنُک ماتریس در حافظه و کاهش استفاده از حافظه است. هر روش تکراری برای حل دستگاه‌ها را می‌توان برای این دستگاه نیز به کار برد، مثلاً روش‌های تکراری ژاکوبی[9]، گوس – سایدل[10]، GMRES[11] و... اما با توجه به شکل خاصی که این دستگاه دارد ممکن است بعضی از روش‌ها برای حل این دستگاه با اصلاحاتی، مناسب‌تر به نظر برسند.

مطالعات زیادی در جهت حل دستگاه‌های افزوده صورت گرفته است. روش شناخته شده‌ی SOR، روش تکراری ایستا و ساده‌ای است که در بسیاری از مسائل مهندسی همچون نقشه

---

[1] Augmented system
[2] Finite elements approximation
[3] Navier-Stokes
[4] Constrained optimization
[5] Generalized least squares problems
[6] Sparse
[7] Stationary iterative method
[8] Nonstationary iterative method
[9] jacobi
[10] Gauss-Seidel
[11] Generalized Minimal Residual

برداری جامع که در [۷] دیده می‌شود، به طور معمول به کار برده می‌شود. یوآن[۱۲] [۱۸، ۱۹] و یوآن و آیوسم[۱۳] [۲۰] ، حالت‌های مختلفی از روش‌های SOR و CG پیش شرط‌سازی شده[۱۴] برای حل دستگاه‌های افزوده‌ی مشابه (۱) ، شکل یافته از مسائل حداقل مربعات تعمیم یافته، وقتی A متقارن و نیمه معین مثبت و B دارای رتبه‌ی کامل نیست را به کار گرفته‌اند. گلوب[۱۵] [۶]، الگوریتم‌های متفاوتی از روش SOR-like (شبه SOR) را مطرح نموده است که ما مختصراً در فصل دوم از این پایان‌نامه به آن خواهیم پرداخت. بای[۱۶] [۲] نیز تعمیم‌های مختلفی از روش SOR-like را برای حل دستگاه‌های افزوده ارائه نموده و پارامتر تخفیف بهینه[۱۷] را محاسبه کرده است. سانتوس[۱۸] [۱۳] و هم‌چنین سانتوس و یوآن [۱۴]، روش تکرار پیش شرط سازی شده برای حل دستگاه‌های افزوده بدست آمده از مسائل حداقل مربعات با رتبه‌ی ناقص را، بااین خصوصیات که $A = I$ و B ماتریسی با رتبه‌ی ناقص است، مطرح نموده و با در نظر گرفتن یک زیر ماتریس با رتبه‌ی کامل از B به عنوان پیش شرط ساز، به حل آن پرداخته‌اند.

اخیراً درویشی[۱۹] و حصاری[۲۰] [۳] الگوریتم SSOR[۲۱](SOR متقارن) را برای حل مساله‌ی (۱) به کار بردند. دراین روش شکافت برای ماتریس افزوده‌ی (۱) به صورت زیر انجام می‌شود

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B^T & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -B \\ 0 & Q \end{pmatrix},$$

و سپس روش SSOR استفاده می‌شود که در آن Q متقارن و نامنفرد است. این روند نیز به تفصیل در فصل سوم از این پایان‌نامه بررسی خواهد شد. در ادامه ، با توجه به اینکه یافتن

[۱۲] Yuan
[۱۳] Iusem
[۱۴] Preconditioned Conjugate Gradient
[۱۵] Golub
[۱۶] Bai
[۱۷] Optimal relaxation parameter
[۱۸] Santos
[۱۹] Darvishi
[۲۰] Hessari
[۲۱] Symmetric SOR method

پارامتر بهینه در روش SSOR بسیار سخت است، روش MSSOR[۲۲] توسط وو[۲۳] و همکارانش که در[۱۷] ارائه شده است و محاسبه‌ی پارامتر بهینه در آن ساده‌تر است، را مطالعه می‌کنیم.

این پایان‌نامه از فصل‌های زیر تشکیل یافته است. در فصل اول بعضی از تعاریف و قضایایی که در ادامه مورد استفاده قرار می‌گیرند، ارائه شده و خلاصه‌ای از چگونگی تشکیل دستگاه افزوده‌ی (۱) از حل شکل ضعیف مسأله استوکس با روش تقریب عناصر متناهی ارائه می‌شود. در فصل دوم روش تکراری SOR-like را بررسی کرده و پیش‌شرط‌سازی را که برای آن ارائه نموده‌ایم مورد بحث قرار می‌دهیم و نتایج عددی حاصل از به کارگیری این روش و پیش‌شرط‌ساز آن را مقایسه می‌کنیم. در فصل سوم، ابتدا روش SSOR برای حل دستگاه‌های افزوده‌ی خطی و سپس اصلاح شده‌ی این روش با نام MSSOR با تمامی جزئیات مورد بررسی قرار می‌گیرد. فصل پایانی نیز شامل روش ISSOR[۲۴] می‌باشد که با هدف بهبود روش SSOR ارائه گردیده است. در قسمت پایانی این فصل نتایج عددی این روش با دیگر روش‌های معرفی شده در این پایان‌نامه مورد مقایسه قرار می‌گیرند.

[۲۲] Modified SSOR method

[۲۳] wu

[۲۴] Improved SSOR

فصل ۱

مقدمات و طرح مسأله

۱.۱ تعاریف و قضایا

تعریف ۱.۱ : فرض کنید $p \geq ۱$ یک عدد حقیقی باشد. تابع $u(x)$ روی دامنه (باز و همبند) Ω به $L^p(\Omega)$ تعلق دارد، اگر

۱) u تابع اندازه پذیر[۱] باشد،

۲) $\int_\Omega |u(x)|^p dx$ متناهی باشد.

توجه کنید که هر تابع پیوسته و کراندار بر Ω به $L^p(\Omega)$ تعلق دارد و بعلاوه $L^p(\Omega)$ یک فضای برداری است.

تعریف ۲.۱ : فرض کنید که تابع u روی دامنه (باز و همبند) Ω تعریف شده باشد و فقط روی زیرمجموعه‌ای شامل K از Ω غیرصفر باشد. فرض کنید $\overline{K}$ بستار K باشد. $\overline{K}$ را محمل u گویند. گوییم u دارای محمل فشرده[۲] روی Ω است اگر $\overline{K}$ فشرده باشد.

تعریف ۳.۱ : فرض کنید Ω زیرمجموعه‌ای باز و کراندار از $\mathbb{R}^n$ باشد. فضای تمام توابع بی‌نهایت مشتق‌پذیر که خود و مشتق‌هایشان دارای محمل فشرده روی Ω هستند را با $C_\circ^\infty(\Omega)$ نمایش می‌دهیم.

مثال: قرار می‌دهیم

$$\phi(x) = \begin{cases} \exp(\frac{۱}{x^۲-a^۲}), & |x| < a, \\ \circ, & |x| \geq a, \end{cases}$$

و $\Omega = (-b, b)$ که در آن $b > a > \circ$، آنگاه $\phi \in C_\circ^\infty(\Omega)$.

تعریف ۴.۱ : مجموعه‌ی همه‌ی n تایی‌های مرتب از اعداد صحیح نامنفی را نماد چند اندیسی

[۱] Measurable function

[۲] Compact support

نامیده و با Z_n^+ نمایش می‌دهیم. یعنی [۳]

$$Z_n^+ = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in Z \ , \ \alpha_i \geq 0\}.$$

به ازای هر $\alpha \in Z_n^+$ قرار می‌دهیم

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n.$$

همچنین اگر $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$، قرار می‌دهیم

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

تعریف ۱.۵ : فرض کنید تابع u بر Ω انتگرال‌پذیر باشد. تابع $D^\alpha u$ را که در رابطه‌ی

$$\int_\Omega D^\alpha u(x) \ \phi(x) \ dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(x) \ D^\alpha \phi(x) \ dx, \qquad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega),$$

صدق می‌کند، مشتق ضعیف [۴] مرتبه αی تابع u گویند.

به سادگی می‌توان دید که، در حالتی که تابع مشتق معمولی داشته باشد، مشتق ضعیف همان مشتق معمولی است.

مثال: تابع $u(x) = |x|$ متعلق به $C[-1, 1]$ است و در صفر مشتق معمولی ندارد، اما مشتق ضعیف آن به صورت زیر است

$$u' = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0, \\ +1, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

چرا که اگر فرض کنیم $\psi \in C_0^\infty(-1, 1)$، آنگاه

$$\int_{-1}^{1} u' \ \psi \ dx = \int_{-1}^{0} u' \ \psi \ dx + \int_{0}^{1} u' \ \psi \ dx = -\int_{-1}^{0} \psi \ dx + \int_{0}^{1} \psi \ dx.$$

[۳] Multi-index notaion

[۴] Weak derivatives

حال با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء، دیده می‌شود که

$$\int_{-1}^{1} u'\ \psi\ dx = (-1)^1 \int_{-1}^{1} u\ \psi'\ dx.$$

تعریف ۶.۱ : فرض کنید Ω زیرمجموعه‌ی باز و همبندی از $\mathbb{R}^n$، $n \geq 2$ با مرز Γ باشد و x_0 نقطه‌ای دلخواه روی Γ باشد. برای $\varepsilon > 0$ قرار می‌دهیم

$$B(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x - x_0|| < \varepsilon\}.$$

دستگاه مختصات $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ را طوری قرار می‌دهیم که قطعه‌ی $\Gamma \bigcap B(x_0, \varepsilon)$ را بتوان به صورت $\xi_1 = f(\xi_2, \ldots, \xi_n)$ نوشت. گوییم Γ یک مرز لیپ شیتزی[5] است، اگر f یک تابع لیپ شیتز باشد، یعنی ثابتی مثل k موجود باشد به طوری که

$$|f(\xi) - f(\eta)| \leq k\ |\xi - \eta|, \qquad \forall \xi = (\xi_2, \ldots, \xi_n), \quad \forall \eta = (\eta_2, \ldots, \eta_n).$$

تعریف ۷.۱ : فضای سوبولف[6] مرتبه m را با $H^m(\Omega)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$H^m(\Omega) = \{u :\ D^\alpha u \in L^2(\Omega),\ |\alpha| \leq m\},$$

که در آن $D^\alpha u$ همان مشتق ضعیف مرتبه ی α ی u است.

روی $H^m(\Omega)$ می‌توان ضرب داخلی زیر را تعریف کرد:

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha u \cdot D^\alpha v\ dx, \qquad \forall u, v \in H^m(\Omega),$$

این ضرب داخلی نرمی به صورت زیر روی $H^m(\Omega)$ تعریف می کند (نرم سوبولف):

$$\| u \|^2_{H^m(\Omega)} = (u, u)_{H^m(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u)^2\ dx,$$

[5] Lipsechitzian boundary

[6] Sobolev Space

توجه داریم که $H^{0}(\Omega) = L^{2}(\Omega)$. بنابراین می‌توان نوشت :

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)},$$
$$\| u \|^2_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \| D^\alpha u \|^2_{L^2(\Omega)} .$$

توجه : زیر فضایی از $H^m(\Omega)$ که $|\alpha| \leq m-1$ و $D^\alpha u$ روی Γ برابر با صفر باشد، با $H^m_0(\Omega)$ نشان داده می‌شود.

قضیه ۱.۱ (نامساوی پوانکاره ـ فردریچ[۷]): برای هر $v \in H^1_0(\Omega)$ وجود دارد c ای که

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla v \, dx \geq c \int_\Omega v^2 \, dx.$$

اثبات : رجوع شود به [۱۱] .

تعریف ۸.۱ : یک ضرب داخلی روی فضای برداری حقیقی (یا مختلط) V، تابع‌ای است که به هر زوج از بردارهای x و y در V، اسکالر حقیقی (یا مختلط) (x,y) نسبت داده می‌شود که در شرایط زیر صدق می‌کند:

الف) (x,x) حقیقی باشد و $(x,x) \geq 0$. در ضمن $(x,x) = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$؛

ب) برای هر اسکالر α، $(x,\alpha y) = \alpha(x,y)$؛

ج) برای هر $z \in V$، $(x, y+z) = (x,y) + (x,z)$؛

د) $(x,y) = \overline{(y,x)}$.

تعریف ۹.۱ : یک نرم برداری روی فضای برداری حقیقی یا مختلط V تابع‌ای است از V به $\mathbb{R}$ به طوری که در شرایط زیر صدق کند

[۷] Poincare-Friedrichs

الف) به ازای هر $x \in V$، $\|x\| \geq 0$. بعلاوه $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$؛

ب) به ازای هر $\alpha \in \mathbb{C}$ و $x \in V$، $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$؛

ج) به ازای هر $x, y \in V$، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (نامساوی مثلث).

هر ضرب داخلی روی یک فضای برداری، یک نرم را تولید می‌کند. کافی است برای ضرب داخلی $(.,.)$ قرار دهیم $\|.\| = (.,.)^{\frac{1}{2}}$. نرم‌های برداری متداول و پرکاربرد در جبرخطی، حالت‌های خاصی از نرم هلدر[8]

$$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}},$$

می‌باشند. در صورتی که $p = 2$، به نرم حاصل، نرم برداری اقلیدسی می‌گویند.

تعریف ۱۰.۱ : فرض می‌کنیم r و s اعدادی صحیح باشند. در ماتریس بلوکی

$$M = \begin{pmatrix} A_{r\times r} & C_{r\times s} \\ R_{s\times r} & B_{s\times s} \end{pmatrix}$$

در صورتی که A و B نامنفرد باشند، تعریف می‌کنیم

$$S = B - RA^{-1}C, \qquad T = A - CB^{-1}R.$$

T را ماتریس مکمل شور A[9] و S را ماتریس مکمل شور B می‌نامند.

با توجه به این تعریف، اگر A و S هر دو نامنفرد باشند، آنگاه معکوس ماتریس بلوکی M به شکل زیر خواهد بود

$$\begin{pmatrix} A & C \\ R & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}CS^{-1}RA^{-1} & A^{-1}CS^{-1} \\ -S^{-1}RA^{-1} & S^{-1} \end{pmatrix}.$$

[8] Holder

[9] Schur complement matrix

حال اگر B و T هر دو نامنفرد باشند

$$\begin{pmatrix} A & C \\ R & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} T^{-1} & T^{-1}CB^{-1} \\ -B^{-1}RT^{-1} & B^{-1}+B^{-1}RT^{-1}CB^{-1} \end{pmatrix}.$$

پس در حالت‌های خاصی از ماتریس M با توجه به نکاتی که بیان شد، داریم

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

تعریف ۱۱.۱ : حداکثر تعداد ستون‌ها یا سطرهای مستقل‌خطی یک ماتریس را رتبه‌ی آن ماتریس گویند. ماتریس مربعی A را معکوس‌پذیر گوییم، هرگاه تمام سطرها یا ستون‌های آن مستقل‌خطی باشند یا اصطلاحاً ماتریس A دارای رتبه‌ی کامل [10] باشد.

تعریف ۱۲.۱ : ماتریس A را معین مثبت متقارن (SPD[11]) گویند، هرگاه ماتریس متقارن بوده و به ازای هر بردار غیرصفر x در $\mathbb{R}^n$ داشته باشیم

$$x^TAx > 0,$$

و در صورتی که $x^TAx \geq 0$، A را نیمه معین مثبت متقارن گویند.

تعریف ۱۳.۱ : برای ماتریس $n \times n$، A، $\lambda \in C$ را یک مقدار ویژه‌ی A و بردار ناصفر $x \in \mathbb{R}^n$ را بردار ویژه‌ی نظیر مقدار ویژه‌ی λ گوییم، هرگاه

$$Ax = \lambda x.$$

[10] Full rank

[11] Symmetric Positive Definite

تعریف ۱۴.۱ : اگر A یک ماتریس مربعی $n \times n$ باشد، چندجمله‌ای مشخصه‌ی A به صورت

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A),$$

تعریف می‌شود. می‌توان دید که p یک چندجمله‌ای از درجه‌ی n است و ریشه‌های این چندجمله‌ای مقادیر ویژه‌ی A نامیده می‌شوند.

تعریف ۱۵.۱ : بزرگترین مقدار ویژه‌ی ماتریس A از حیث قدرمطلق را «شعاع طیفی[۱۲]» ماتریس A گویند و با $\rho(A)$ نشان می‌دهند، یعنی

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|,$$

که در آن $\sigma(A)$ مجموعه‌ی تمام مقادیر ویژه‌ی ماتریس A است.

تعریف ۱۶.۱ (نرم طبیعی یا نرم القایی): فرض کنید $||.||$ یک نرم برداری روی $\mathbb{C}^n$ و $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ باشد. در این صورت نرم طبیعی متناظر به این نرم برداری به صورت زیر تعریف می‌شود

$$||A|| = \max_{||x||=1} ||Ax|| = \max_{x\neq 0} \frac{||Ax||}{||x||}.$$

با توجه به این که ماکزیمم و مینیمم توابع پیوسته روی مجموعه‌های بسته و کراندار موجود است، وجود $||A||$ تضمین می‌شود.

تعریف ۱۷.۱: فرض کنید $M, N \in \mathbb{R}^{n\times n}$. در این صورت $A = M - N$ را یک "شکافت" از A گوییم، هرگاه M نامنفرد باشد.

[۱۲] Spectral radius