دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

گروه ریاضی محض

رساله

برای دریافت درجه دکتری

ریاضی محض - جبر

$\Gamma-$ نیم‌ابرحلقه‌ها و برخی خواص آن‌ها

استاد راهنما:

پروفسور بیژن دواز

اساتید مشاور:

دکتر محمدعلی ایرانمنش

دکتر سید محمد انوریه

پژوهش و نگارش :

سهراب استادهادی دهکردی

دی ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

سپاس‌گزاری

معلما مقامت زعرش برتر باد همیشه توسن اندیشه‌ات مظفر باد

به نکته‌های دلاویز و گفته‌های بلند صحیفه‌های سخن از تو علم‌پرور باد

به مصداق «مَن لَم یشکرُ المخلوق لم یشکر الخالق» بسی شایسته است از استاد فرهیخته و فرزانه جناب **پروفسور بیژن دواز** که با کرامتی چون خورشید، سرزمین دل را روشنی بخشیدند و گلشن سرای علم و دانش را با راهنمایی‌های کار ساز و سازنده بارور ساختند تقدیر و تشکر نمایم. ایشان در نهایت دلسوزی و همیاری، با کمک‌ها و پیشنهادات ارزشمندشان در طول این دوره افتخار بزرگی را نصیب اینجانب کردند و دقت نظر ایشان باعث شد در مسیر درست گام بردارم.

در اینجا برخود لازم می‌دانم از کلیه کسانی که من را در انجام این رساله یاری و همراهی کرده‌اند، تشکر نمایم و خوشحالم که از آن‌ها یاد گرفتم و با آن‌ها کار کردم. اساتید گرامی؛

جناب آقای دکتر محمدعلی ایرانمنش و **جناب آقای دکترسید محمد انوریه** به عنوان اساتید مشاور، به خاطر راهنمایی و زحماتی که برای اینجانب کشیدند.

از داوران محترم آقایان**دکتر علی ایرانمنش، دکتر رجبعلی برزویی، دکتر منصور قدیری و دکتر سعید علیخانی** به خاطر پذیرش مسئولیت داوری این پایان‌نامه از سوی ایشان و توفیق بزرگی که نصیب اینجانب نموده‌اند، کمال تشکر را دارم.

از **سرکار خانم عابدینی و خانم عباسی‌زاده** به خاطر دلسوزی‌ها و زحمات بی‌دریغشان و از تمام **معلمان و اساتید بزرگم** که باعث پیشرفت اینجانب بوده‌اند و همچنین از همراهی و همقدمی؛ **همسرم** که این دوران را تحمل نموده و همواره مشوق اینجانب بوده‌اند نیز سپاسگزارم

.در پایان با تشکر عاشقانه از**پدر**، **مادر**، **برادر** و**خواهرانم** که بدون حمایتشان امکان به پایان رساندن این رساله برای اینجانب امری غیر ممکن بود نیز کمال تشکر را دارم.

شکر خدا که هر چه طلب کردم از خدا بر منتهای همت خود کامروا شدم.

چکیده

مفهوم $\Gamma-$ حلقه‌ها توسط نوباسوا معرفی شد و بلافاصله بعد از وی در سال ۱۹۶۶، بارنس این مفهوم را توسعه داد و نتایجی به دست آورد. مفهوم $\Gamma-$ نیم‌حلقه‌ها نیز توسط روآ به عنوان توسیعی از $\Gamma-$ حلقه‌ها معرفی شد. قالب اصلی این رساله بیان مفاهیم و اثبات قضیه‌های گوناگون در $\Gamma-$ نیم‌ابرحلقه‌ها است

مفهوم نیم‌گروه سه‌تایی توسط باناخ معرفی شد. وی با استفاده از مثالی نشان داد که یک نیم‌گروه سه‌تایی قابل تبدیل به یک نیم‌گروه معمولی نیست.

در این رساله مفاهیم $\Gamma-$ نیم‌ابرحلقه و $\Gamma-$ نیم‌ابرحلقه سه‌تایی معرفی می‌شوند که تعمیمی از نیم‌حلقه، نیم‌ابرحلقه و ابرحلقه هستند. مفهوم $\Gamma-$ نیم‌ابرحلقه‌ها، توسیعی از نیم‌حلقه‌ها، نیم‌ابرحلقه‌ها و $\Gamma-$ نیم‌حلقه‌ها است. سپس مفهوم ایده‌آل ناهموار(ایده‌آل اول ناهموار) مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین رابطه‌ی بین تقریب بالایی و تقریب پایینی مطالعه شده است. در ادامه، مفهوم حاصل‌ضرب مختلط معرفی و نتایج مرتبط بدست می‌آیند. به‌علاوه، وجود عملگری همورد بین همدسته $\Gamma-$ نیم‌ابرحلقه‌ها و همدسته نیم‌حلقه‌ها بررسی می‌شود. درنهایت، مفاهیم $\Gamma-$ نیم‌ابرحلقه‌های منظم و ساده معرفی و وجود عملگری همورد بین همدسته $\Gamma-$ نیم‌ابرحلقه‌های جابجایی ضعیف و نیم‌حلقه‌ها بررسی می‌شود.

واژه‌های کلیدی: Γ-نیم‌ابر حلقه، Γ-نیم‌ابرحلقه سه‌تایی، تقریب بالایی و پایینی، حاصلضرب مختلط، نیم‌حلقه اساسی.

فهرست مطالب

تاریخچه و مقدمه

تاریخچه و مقدمه

ای صاحب حمد و ثنا، با تمام وجود به درگاهت سجده شکر می‌گذارم که توفیق نگارش این پایان‌نامه را به من عطا فرمودی.

مفهوم نیم‌حلقه اولین باربه طور ضمنی توسط محقق آلمانی ریچارد ددکیند[۱] معرفی شد. وی به معرفی مثال‌های غیر بدیهی پرداخت. در ادامه این مفهوم توسط مکالی[۲] در سال ۱۹۱۶، نوتر[۳] درسال ۱۹۲۷ و لورنزن[۴] در سال ۱۹۳۹ در ارتباط با ایده‌آل‌های حلقه مورد مطالعه قرار گرفت. این مفهوم توسط هیلبرت[۵] در سال ۱۸۹۹ و هانتینگتون [۶] در سال ۱۹۰۲ در ارتباط با اصول موضوعه اعداد طبیعی و اعداد گویا نیز مورد بررسی قرارگرفت. وندیور[۷] ریاضی‌دان آمریکایی در سال ۱۹۳۴ کاربرد این مفهوم را به صراحت در ارتباط با حساب اعداد طبیعی مورد بررسی قرار داد. بعد از گذشت سال‌ها محققان به دنبال تعمیم مفاهیم نیم‌گروها ونیم‌حلقه‌ها و بررسی کاربردهای این مفهوم هستند. در ادامه تاریخچه کوتاهی از نظریه ابرساختارها بیان می‌شود. در سال ۱۹۳۴ در هشتمین کنگره ریاضی‌دانان اسکاندیناوی، مارتی[۸] برای اوّلین بار مفهوم ابرگروه را در حوزه‌های مختلفی همچون توابع جبری، توابع گویا و گروه‌های ناجابجایی استفاده نمود. این اولین گام در تاریخ ریاضیات در نظریه ابرساختارهای جبری بود. از آن زمان به بعد نظریه ابرساختارهای جبری در سرتاسر جهان از جمله اروپا (فرانسه، ایتالیا، یونان، رومانی و ...)، استرالیا، آمریکا، کانادا و کمی دیرتر در آسیا و در کشورهای چین، تایلند، ژاپن، کره و اردن گسترش یافت. در ابتدا این نظریه در راستای ارتباط بین گروه‌ها و کاربردهای مختلف آن در هندسه (هندسه کروی و هندسه تصویری) و با استفاده از مفهوم ابرگروه‌ها به کار گرفته می‌شد. این نظریه، توسعه‌ی خود را از سال ۱۹۶۰، زمانی که محدوده تحقیق و

---

[۱] Dedekind

[۲] Macaulay

[۳] Noether

[۴] Lorenzen

[۵] Hilbert

[۶] Huntington

[۷] Vandiver

[۸] Marty

پژوهش گسترش یافت، شروع کرد. در فرانسه، کراسنر[۹]،کوسکاس [۱۰] و سورآ[۱۱] تحقیقات خود را در نظریه نیم‌ابرگروه‌ها و نظریه روابط روی ابرساختارها و ابرحلقه‌های کراسنر شروع کردند. در یونان، میتاس[۱۲] استراتی‌گوپولوس [۱۳]، کونستانتنینیدو[۱۴]، سرافیمیدیس[۱۵] و ماسوروس[۱۶] ابرگروه‌های کانونی، ابرحلقه‌ها و ابرمدول‌ها، ابرشبکه‌ها و کاربرد ابرمیدان‌ها در نظریه اتوماتا را مورد مطالعه قرار دادند. وجیوکلیس[۱۷] به آنالیز ابرگروه‌های دوری، $P-$ ابرساختارها و H_v- گروه‌ها پرداخت. مقالات پر ارزش در زمینه ابرگروه‌های منظم، ابرگروه‌های کامل، قلب ابرگروه‌ها و کاربردهای آن در نظریه ترکیبیات و هندسه توسط گروهی از محققین ایتالیایی از جمله، کورسینی[۱۸]، دی سالوو[۱۹]، میگلیوراتو[۲۰]، دی ماریا[۲۱] و فرنی[۲۲] به جهان ریاضیات ارائه شدند. در شروع دهه ۹۰ میلادی، ریاضی‌دانان رومانیایی در پنجمین کنفرانس ابرساختارهای جبری و کاربردهای آن در سال ۱۹۹۳ وارد این نظریه شدند که می‌توان به نام‌هایی همچون استفانسکو[۲۳]، لئوریانو[۲۴]، پلِ‌آ[۲۵] و گوتان[۲۶] اشاره نمود که رساله‌های دکترای خود را در این زمینه نگارش کردند. همچنین ایرانیان

[۹] Krasner

[۱۰] Koskas

[۱۱] Sureau

[۱۲] Mittas

[۱۳] Stratigopoulos

[۱۴] Konstantinidou

[۱۵] Serafimidis

[۱۶] Massouros

[۱۷] Vougiouklis

[۱۸] Corsini

[۱۹] De Salvo

[۲۰] Migliorato

[۲۱] De Maria

[۲۲] Freni

[۲۳] Stefanescu

[۲۴] Leoreanu

[۲۵] Pelea

[۲۶] Gutan

نیز مطالعات و تحقیقات خود را در زمینه ابرساختارهای جبری از دهه ۹۰ شروع کردند و می‌توان به زاهدی، دواز، عامری، ایرانمنش، برزویی، اشرفی و برخی افراد دیگر اشاره کرد.

همچنین، ریاضی‌دانان آمریکایی مقالات ارزشمندی در زمینه ابرگروه‌ها، پلی‌گروه‌ها و فضاهای الحاقی به رشته تحریر در آورده‌اند که از آن جمله می‌توان به کومر[۲۷] و جان‌توشیاک[۲۸] اشاره کرد.

اکنون نظریه ابرساختارهای جبری کاربردهای فراوانی در علوم مختلف از جمله هندسه، توپولوژی، آنالیز و سیستم‌های محدب، گروه‌های متناهی، رمزنگاری و نظریه کدینگ، نظریه اتوماتا، گراف‌ها و ابرگراف‌ها، نظریه مجموعه‌های فازی، نظریه روابط دوتایی و احتمالات داشته است.

از مهمترین مباحث در نظریه ابرساختارها ارتباط بین ابرساختارهای جبری و ساختارهای جبری به وسیله رابطه‌های هم‌ارزی است. در این رساله برخی از این نوع رابطه‌ها، که به رابطه‌های اساسی مشهورند، بررسی می‌شوند.

در **فصل دوم** ، مفهوم‌های ابتدایی در نظریه ابرگروه‌ها معرفی می‌شوند، همچنین مثال‌های متعددی از این ابرساختار جبری آورده شده است. در این فصل رابطه‌ی هم‌ارزی خاصی معرفی می‌شود که اساس تعریف ابرگروه‌های خارج قسمتی با استفاده از یک زیر ابرگروه است. به‌علاوه ثابت می‌شود اگر زیر ابرگروه مورد استفاده برای تعریف ابرگروه خارج قسمتی نرمال باشد، آن‌گاه ابرگروه خارج قسمتی مورد نظر ساختار گروه خواهد داشت. در ادامه این فصل رابطه‌ی اساسی روی نیم‌ابرگروه‌ها نیز معرفی می‌شود.

در **فصل سوم** ابرحلقه‌های ضربی، کلی و کراسنر معرفی و نگاهی اجمالی به تعریف H_v- ابرحلقه‌ها شده است، همچنین مثال‌های متعددی از این نوع ابرحلقه‌ها آورده شده است. رابطه‌ی اساسی روی ابرحلقه‌های کراسنر معرفی شده که در فصل‌های بعد برای تعریف مفاهیم جدید مورد استفاده قرار گرفته است. با استفاده از مفهوم ایده‌آل در ابرحلقه‌های کراسنر می‌توان ابرحلقه خارج قسمتی را ساخت. توجه به این نکته ضروری است که شرط نرمال بودن ایده‌آل ، باعث می‌شود که این ابرحلقه خارج قسمتی ساختار حلقه داشته باشد. در حقیقت با فرض نرمال بودن این ایده‌آل، قضیه‌های یکریختی در ابرحلقه‌های کراسنر مفهوم جدیدی را به دست نمی‌دهد و همان سه قضیه معروف در زمینه حلقه‌ها خواهند بود.

---

[۲۷] Commer

[۲۸] Jantociak

اساس تعریف‌های مورد نیاز در این رساله در **فصل سوم** گنجانده شده است. درابتدا مفهوم $\Gamma-$ نیم‌ابرحلقه معرفی شده که در حقیقت توسیع مناسبی از نیم‌ابرحلقه‌ها، ابرحلقه‌ها، حلقه‌ها و نیم‌حلقه‌ها است. همچنین به مثال‌های متعددی از این ابرساختار جبری اشاره شده است. در این فصل $(R,\Gamma)-$ نیم‌ابرحلقه‌ها نیز معرفی شده و برخی از خواص آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. از دیگر مفاهیم معرفی شده در این فصل می‌توان به $\Gamma-$ نیم‌ابرحلقه‌های ساده اشاره کرد. برخی خواص این نوع ابرساختار جبری نیز مطالعه شده و مشخص‌سازی برای آن به‌دست آمده است. $\Gamma-$ نیم‌ابرحلقه‌های ضربی و $\Gamma-$ نیم‌ابرحلقه‌های منظم از دیگر مفاهیم مطالعه شده در این فصل است. در ارتباط با مفهوم زنجیر در این ابرساختار جبری مفهوم $\Gamma-$ نیم‌ابرحلقه‌های نوتری و آرتینی نیز بررسی شد و نشان داده شد که هر $\Gamma-$ ابرحلقه آرتینی، نوتری است.

معرفی رابطه‌های هم‌ارزی مناسب در ابرساختارهای جبری از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در**فصل پنجم**، این رساله رابطه‌ی هم‌نهشتی خاصی معرفی شده که با استفاده از آن به هر $\Gamma-$ نیم‌ابرحلقه، یک نیم‌حلقه متناظر شده است که آن را نیم‌حلقه اساسی گویند. با استفاده از این تناظر عملگری همورد بین این دو همدسته به‌دست می‌آید که دقیق بودن این عملگر بررسی شده است. بررسی خواص این عملگر می‌تواند به عنوان یک موضوع تحقیقاتی مورد توجه قرار بگیرد. از جمله‌مفاهیم مرتبط به نیم‌حلقه اساسی، حاصل‌ضرب مختلط است که در این فصل معرفی شده و برخی خواص آن نیز مورد مطالعه قرار گرفته است. بررسی خواص این حاصل‌ضرب نیز می‌تواند موضوع یک کار تحقیقاتی باشد.

در **فصل ششم** ، مفهوم مجموعه‌های هموار مورد بررسی قرار می‌گیرد. در ارتباط با این مفهوم، تقریب بالایی و پایینی برای $\Gamma-$ نیم‌ابرحلقه‌ها معرفی و برخی خواص آن مورد مطالعه قرار می‌گیرید. در ادامه، این مفهوم برای $\Gamma-$ نیم‌ابرحلقه‌های جمعی و $\Gamma-$ نیم‌ابرحلقه‌های خارج قسمتی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در**فصل هفتم**، $\Gamma-$ نیم‌ابرحلقه‌های سه‌تایی معرفی می‌شوند. مثال‌های متعددی از این ابر ساختار جبری آورده شده است. این ابرساختار جبری برخلاف ساختارهای قبل که در آن‌ها ابرعمل‌های دوتایی استفاده شده از ابرعمل سه‌تایی بهره می‌برد. در این فصل مفاهیم ایده‌آل منظم و نیم‌حلقه اساسی مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

مقالات استخراج شده از این رساله به شرح زیر می‌باشند:

1) S. O. Dehkordi and B. Davvaz, Γ- *semihyperrings: ideals, homomorphism and regular relations*, submitted.

2) S. O. Dehkordi and B. Davvaz, Γ- *semihyperrings: Approximations and rough ideals*, To appear in Bulletin of the Malaysian Mathematical Scineces Society.

3) S. O. Dehkordi and B. Davvaz, *Ideal theory in* Γ- *semihyperrings*, submitted.

4) S. O. Dehkordi and B. Davvaz, *A strong regular relation on* Γ- *semihyperrings*, To appear in J. Sci. I.R. Iran.

5) S. O. Dehkordi and B. Davvaz, Γ-*semihyperrings: Fundamental rings and complex product*, submitted.

6) S. O. Dehkordi and B. Davvaz, *Ternary* Γ-*semihyperring: ideals, homomorphisms and regular relations*, submitted.

7) S. O. Dehkordi and B. Davvaz, *Complex product*, Extended Abstracts of the 42^{th} Annual Iranian Mathematics Confrence, University of Rafsanjan, Iran, (2011).

8) S. O. Dehkordi and B. Davvaz, *Ternary* Γ-*semihyperrings, ideals, regular idelals and fundamental semirings*, submitted.

مقالات [۱] و [۳] از فصل ۴ و مقاله [۲] از فصل ۶ استخراج شده‌اند. همچنین از فصل ۷ مقاله‌های [۸] و [۶] و از فصل ۵ مقاله‌های [۵]، [۷] و [۴] مستخرج شده‌اند.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

۱.۱ ابرگروه‌ها

در این بخش تعاریف، نمادها و نتایج مهم در نظریه ابرگروه‌ها، بررسی می‌شوند. تعاریف و قضیه‌های این بخش مربوط به مرجع [۱۰] است . همچنین برای مطالعه بیشتر می‌توان به منابع [۸۶، ۸۵، ۸۴، ۸۲، ۸۱، ۸۰، ۶۵، ۵۹، ۴۲، ۱۷، ۱۴، ۱۳، ۱۲، ۹، ۲] مراجعه کرد. برای دیدن کاربردهایی از نظریه ابرگروه‌ها مرجع [۱۱] پیشنهاد می‌شود.

فرض کنید H یک مجموعه ناتهی و $\mathcal{P}^*(H)$ خانواده همه زیرمجموعه‌های ناتهی H است. تابع $+ \ : \ H \times H \to \mathcal{P}^*(H)$ را یکابرعمل دوتایی روی H و زوج مرتب $(H,+)$ را ابرگروه‌وار می‌نامند.

فرض کنید $+$ یک ابرعمل روی H، A و B زیرمجموعه‌های ناتهی H هستند، دراین صورت قرارداد زیر را درنظر بگیرید:

$$A + B := \bigcup_{a\in A, b\in B} a + b.$$

همچنین $A + \{x\} := A + x$ و $\{x\} + A := x + A$. ابرعمل $+$ راشرکت‌پذیر گویند، هرگاه برای هر $(x, y, z) \in H^۳$، $(x + y) + z = x + (y + z)$. اگر ابرعمل $+$ شرکت‌پذیر باشد، آن‌گاه $(H,+)$ را یک نیم‌ابرگروه گویند. ابرعمل $+$ راشرکت‌پذیر ضعیف می‌نامند، هرگاه برای هر $(x, y, z) \in H^۳$، $(x + y) + z \cap x + (y + z) \neq \emptyset$. اگر ابرعمل $+$ شرکت‌پذیر ضعیف باشد، آن‌گاه $(H,+)$ را یک H_v- نیم‌گروه می‌نامند. ابرگروه‌وار H راشبه‌ابرگروه گویند، هرگاه در خاصیت زیر صدق کند. یعنی برای هر $a \in H$ رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$a + H = H + a = H.$$

این خاصیت راتکثیر گویند. یک ابرگروه (H_v- گروه)، نیم‌ابرگروه (H_v- نیم‌گروه) است که شبه‌ابرگروه نیز باشد.

فرض کنید $(H,+)$ یک ابرگروه‌وار است. عضو $e \in H$ راهمانی راست می‌نامند، هرگاه برای هر $y \in H$، $y \in y + e$. همانی چپ به طریق مشابه تعریف می‌شود. عضو $e \in H$ را همانی گویند، هرگاه همانی راست و همانی چپ باشد. پس $e \in H$ همانی است اگر و تنها اگر برای هر $y \in H$،

$$y \in y + e \cap e + y.$$

ابرگروه‌وار $(H,+)$ را جابجایی می‌نامند، هرگاه:

$$\forall x,y \in H, \quad x+y=y+x.$$

همچنین، ابرگروه‌وار $(H,+)$ را جابجایی ضعیف گویند، هرگاه:

$$\forall x,y \in H, \quad x+y \cap y+x \neq \emptyset.$$

فرض کنید ابرگروه $(H,+)$ دارای حداقل یک عضو همانی است. عضو $a' \in H$ را معکوس عنصر $a \in H$ می‌نامند، هرگاه عضو همانی $e \in H$ موجود باشد که

$$e \in a+a' \cap a'+a.$$

مثال ۱.۱.۱ فرض کنید $\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی است. برای هر $x,y \in \mathbb{R}$، ابرعمل $+$ را به این صورت در نظر بگیرید که $x := x+x$ و $x+y$ بازه بین دو عدد حقیقی متمایز x و y است. دراین صورت $(\mathbb{R},+)$ یک ابرگروه است.

مثال ۲.۱.۱ فرض کنید H یک مجموعه ناتهی و R یک رابطه هم‌ارزی روی آن است و برای هر $x \in H$ کلاس هم‌ارزی $R(x)$ شامل حداقل سه عضو است. برای هر زیر مجموعه ناتهی A از H، $\overline{R}(A) = \bigcup_{R(x)\cap A\neq\emptyset} R(x)$ و $\underline{R}(A) = \bigcup_{R(x)\subseteq A} R(x)$. برای هر $x,y \in H$ تعریف زیر را در نظر بگیرید:

$$x+y=\overline{R}(x,y)-\underline{R}(x,y).$$

در این صورت $(H,+)$ یک ابرگروه است.

مثال ۳.۱.۱ فرض کنید G یک مجموعه ناتهی است. ابرعمل $+$ را روی G به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\forall (x,y) \in G^2, \quad x+y := G.$$

در این صورت ابرگروه $(G,+)$ را ابرگروه کلی گویند.

مثال ۴.۱.۱ فرض کنید G یک گروه آبلی است. ابرعمل $+$ را روی G به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\forall (x,y) \in G^2, \quad x+y := \langle x,y \rangle,$$

که در آن $\langle x,y \rangle$ زیرگروه تولید شده توسط x و y است. به آسانی دیده می‌شود که $(G,+)$ یک ابرگروه است.

مثال ۵.۱.۱ فرض کنید G یک گروه است و $H \trianglelefteq G$، ابرعمل $+$ را روی G به‌صورت زیردر نظربگیرید:

$$\forall (x,y) \in G^{2}, \quad x+y := Hxy,$$

در این صورت $(G,+)$ یک ابرگروه است.

تعریف ۶.۱.۱ فرض کنید $(H,+)$ یک ابرگروه و K یک زیرمجموعه ناتهی H است که $K+K \subseteq K$. در این صورت $(K,+)$ را زیر ابرگروه‌وار $(H,+)$ گویند. زیرابرگروه‌وار K را زیر ابرگروه گویند، هرگاه:

$$\forall a \in K, \quad K+a = a+K = K.$$

مثال ۷.۱.۱ مجموعه $H=\{u,v,z,w\}$ را با ابرعمل زیر در نظر بگیرید:

$\circ$	u	v	z	w
u	u	u	$\{u,v,z\}$	H
v	v	v	$\{u,z\}$	H
z	z	z	$\{u,v,z\}$	H
w	w	w	$\{u,v,z\}$	H

در این صورت $(H,+)$ یک ابرگروه و $K=\{u,v,z\}$ یک زیرا برگروه H است.

تعریف ۸.۱.۱ زیرابرگروه K از ابرگروه H را بسته از طرف راست گویند، هرگاه

$$K+(H-K) = H-K.$$

زیرابرگروه بسته از طرف چپ به طریق مشابه تعریف می‌شود. همچنین اگر زیرابرگروه K از ابرگروه H، بسته از طرف راست و بسته از طرف چپ باشد، آن‌گاه به آن بسته گویند.

تعریف ۹.۱.۱ زیرابرگروه K از ابرگروه H، معکوس‌پذیر از طرف راست است، هرگاه برای هر $x,y \in H$،

$$x \in y+K \quad \Rightarrow \quad y \in x+K.$$

به طریق مشابه زیرابرگروه معکوس‌پذیر از طرف چپ تعریف می‌شود. همچنین اگر زیرابرگروه K از ابرگروه H، معکوس‌پذیر از طرف راست و معکوس‌پذیر از طرف چپ باشد، آن‌گاه معکوس‌پذیر نامیده می‌شود.

تعریف ۱۰.۱.۱ زیرابرگروه K از ابرگروه H، را فرابسته از طرف راست گویند، هرگاه

$$K + (H - K) \cap (H - K) \neq \emptyset.$$

زیرابرگروه فرابسته[۱] از طرف چپ به طریق مشابه تعریف می‌شود. همچنین اگر زیرابرگروه K ازابرگروه H، فرابسته از طرف راست و فرابسته از طرف چپ باشد، آن‌گاه آن را فرابسته گویند.

فرض کنید H یک ابرگروه‌وار و $A, B \subseteq H$ است. هرگاه $A \cap B \neq \emptyset$. در این صورت A، B همدیگر راقطع می‌کنند و بانماد $A \approx B$ نشان می‌دهند. توجه داشته باشید که اگر $a \in H$ و $A \subseteq H$، آن‌گاه $a \approx A$ اگر و تنها اگر $a \in A$.

روی ابرگروه H ابرعمل‌های $\diagdown$ و $\diagup$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$a\diagup b = \{x \in H | a \in x + b\} \qquad \text{و} \qquad b\diagdown a = \{x \in H | a \in b + c\},$$

به ابرعمل $\diagup$، ابرترکیب توسیعی راست و به ابرعمل $\diagdown$، ابرترکیب توسیعی گفته می‌شود. حال $x \approx a\diagup b$ اگر و تنها اگر $a \approx x + b$، و $x \approx b\diagdown a$ اگر و تنها اگر $a \approx b + x$.

برای مجموعه‌های $A, B \subseteq H$، نمادهای $A\diagup B$ و $B\diagdown A$ به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$A\diagup B = \bigcup\{a\diagup b | a \in A,\ b \in B\} \qquad \text{و} \qquad B\diagdown A = \bigcup\{b\diagdown a | b \in B,\ a \in A\},$$

بنابراین $A \approx B\diagup C$ اگر و فقط اگر $B \approx A + C$، و $A \approx C\diagdown B$ اگر و فقط اگر $B \approx C + A$. توجه کنید که اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ آن‌گاه، $AC \subseteq BD$ و از این رو $A\diagup C \subseteq B\diagup D$ و $C\diagdown A \subseteq D\diagdown B$. ابرگروه H، را انتقالی گویند، هرگاه خاصیت زیر برقرار باشد:

$$b\diagdown a \approx c\diagup d \quad \Longrightarrow \quad a + d \approx b + c, \qquad \forall a, b, c, d \in H.$$

با توجه به مفاهیم فوق چند نوع ابرگروه می‌توان تعریف کرد که در پایین به آن‌ها اشاره‌می‌شود:

تعریف ۱۱.۱.۱ فضای الحاقی. ابرگروه انتقالی جابجایی یک فضای الحاقی نامیده می‌شود.

در این نوع ابرگروه‌ها ابرعمل‌های $\diagup$ و $\diagdown$ برهم منطبقند. همچنین فضاهای الحاقی نقش اساسی در مطالعه هندسه کلاسیک دارند[۷۲].

---

[۱] Ultra close