بسم الله الرحمن الرحیم
الحمد لله رب العالمین

دانشگاه الزهراء (س)

دانشکده علوم پایه

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی کاربردی

عنوان

حل عددی چند رده از معادلات انتگرال با استفاده از چند جمله‌ای‌های برنشتاین و توابع هایبرید آن‌ها

استاد راهنما

دکتر یداله اردوخانی

استاد مشاور

دکتر علیمردان شاهرضایی

دانشجو

سارا دوائی‌فر

شهریور ماه سال ۱۳۹۰

قدردانی و تشکر

حمد و سپاس می‌گویم یگانه‌ای را که زبان از عنایت شکرش قاصر است و خرد در ژرفای معرفتش عاجز. او که مهربان است و با لطف بی‌کران خویش مرا در به پایان رساندن این دوره یاری نمود. حال که با یاری خداوند این دوره به پایان رسیده، بر خود واجب می‌دانم از تمامی عزیزانی که مرا در این راه یاری رساندند تشکر و قدردانی نمایم.

نخست از پدر و مادر عزیزم برای حمایت‌های بی‌دریغشان در لحظه لحظه زندگی و دعای خیرشان که همواره بزرگترین سرمایه زندگی‌ام بوده قدردانی می‌کنم و بر دستان پاکشان بوسه می‌زنم.

از استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر اردوخانی که با تشویق‌ها، پیگیری‌ها و راهنمایی‌های به‌موقع خود در به‌ثمر رسیدن این پایان‌نامه مرا یاری نمودند کمال سپاس و قدردانی را دارم .

همچنین از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر شاهرضایی که از مشاوره سودمندشان بهره‌مند شدم تشکر می‌نمایم.

باعث افتخار من است که جناب آقای دکتر بابلیان به عنوان داور خارجی قبول زحمت نموده و در جلسه دفاع از پایان‌نامه من شرکت نمودند. از ایشان به خاطر نظرات ارزنده و مفیدشان بسیار متشکرم.

علاوه برآن از خانم دکتر تجویدی به عنوان داور داخلی که زحمت مطالعه و ارزشیابی پایان‌نامه را تقبل فرمودند و در جلسه دفاعیه شرکت نمودند، صمیمانه تشکر می‌نمایم.

تقدیم به

پدر و مادر مهربان و بزرگوارم

که در طول زندگی و پیمودن نشیب و فرازهای دوران تحصیل، خود را مدیون آن‌ها می‌دانم و وجودشان مایه آرامش و دلگرمی من است،

برادرانم

که مظهر محبت و یاری هستند

و

تمام کسانی که صادقانه برای تعلیم و تعلم بشریت در تلاشند.

اثبات[□□□□□□□]

چکیده

در این پایان‌نامه روش‌های عددی کارا برای پیداکردن جواب چند رده از معادلات بر اساس پایه چندجمله‌ای‌های برنشتاین ارائه می‌شود. معادلات مطرح شده، معادله دیفرانسیل خطی، معادلات انتگرال و انتگرال-دیفرانسیل فردهلم خطی و غیرخطی و معادلات انتگرال ولترای خطی و غیرخطی می‌باشند. ایده اصلی در این روش‌ها، استفاده از ماتریس‌های عملیاتی چندجمله‌ای‌های برنشتاین می‌باشد. بدین منظور، نخست جواب معادله موردنظر را به صورت $C^T B(t)$ (که در آن C بردار ضرایب مجهول و $B(t)$ بردار پایه برنشتاین می‌باشد) تقریب زده و سپس با بکارگیری ماتریس‌های عملیاتی این چندجمله‌ای‌ها، این معادله را به یک معادله ماتریسی هم‌ارز که با یک دستگاه از معادلات جبری با ضرایب مجهول برنشتاین مطابقت دارد، تبدیل می‌کنیم. جواب این معادله ماتریسی بردار ضرایب C را بدست می‌دهد. در انتهای هر روش تعدادی مثال عددی ارائه می‌شود و نتایج آن‌ها با نتایج عددی بدست آمده از دیگر روش‌های موجود برای حل این معادلات مقایسه می‌شود.

همچنین، با تعویض بردار پایه $B(t)$ با بردار پایه توابع چندمقیاسی (هایبرید) برنشتاین $\phi(t)$ ، روش‌های یادشده را برای حل معادلات انتگرال فردهلم خطی وغیرخطی نیز بکار می‌بریم و همان معادلاتی را که نخست با پایه برنشتاین حل نمودیم با پایه توابع چندمقیاسی برنشتاین نیز مورد مطالعه قرار می‌دهیم و نتایج حاصل از دو پایه را با هم مقایسه می‌نماییم.

واژه‌های کلیدی: چندجمله‌ای برنشتاین، توابع چندمقیاسی برنشتاین، معادله دیفرانسیل، معادله انتگرال، فردهلم، ولترا، خطی، غیرخطی، ماتریس عملیاتی انتگرال، ماتریس عملیاتی حاصلضرب، ماتریس عملیاتی دوگان.

فهرست مطالب

مقدمه

در سال‌های اخیر چندجمله‌ای‌های برنشتاین [۱] توجه بسیاری از محققین را به خود جلب نموده‌اند. این چندجمله‌ای‌ها برای حل معادلات گوناگون با استفاده از روش‌های تقریبی متفاوت بکار گرفته شده‌اند. برای مثال، چندجمله‌ای‌های برنشتاین برای حل معادلات انتگرال فردهلم [۱، ۲]، معادلات انتگرال ولترا [۳] ، معادلات دیفرانسیل [۷-۴] و معادلات انتگرال-دیفرانسیل [۸] مورد استفاده قرار گرفته‌اند. در علم ریاضیات روش‌های تحلیلی و عددی متعددی برای تعیین جواب رده‌های گوناگونی از معادلات وجود دارد. از آن‌جایی‌که حل این معادلات به صورت تحلیلی معمولاً آسان نمی‌باشد، لذا غالباً از روش‌های عددی برای حل این معادلات استفاده می‌شود. در این پایان‌نامه، روش‌های عددی برای حل چند رده از معادلات با گرایش جواب تقریبی به جواب دقیق در پایه چندجمله‌ای‌های برنشتاین ارائه می‌شود. معادلات مطرح شده، معادله دیفرانسیل خطی، معادلات انتگرال و انتگرال-دیفرانسیل فردهلم خطی و غیرخطی و معادلات انتگرال ولترای خطی و غیرخطی می‌باشند. در تمامی روش‌هایی که ارائه می‌شود، محور کار بکارگیری ماتریس‌های عملیاتی این چندجمله‌ای‌هاست. این ماتریس‌های عملیاتی تاکنون به دو طریق ساخته شده‌اند.

آمیت سینف [۲] و همکارانش [۶] نخست با استفاده از فرآیند متعامدسازی گرام اشمیت [۳] چندجمله‌ای‌های برنشتاین را متعامد یکه نمودند و سپس ماتریس عملیاتی انتگرال این چندجمله‌ای ها را محاسبه نمودند. یوسفی و بهروزیفر [۷] با استفاده از بسط چندجمله‌ای‌های برنشتاین برحسب پایه تیلور موفق به ساخت ماتریس‌های عملیاتی انتگرال، حاصلضرب و دوگان این چندجمله‌ای‌ها شدند.

در این پایان‌نامه با توجه به ایده فوق و با استفاده از بسط چندجمله‌ای‌های برنشتاین برحسب

[۱] Bernstein
[۲] Amit K. Singh
[۳] Gram-Schmidt

پایه لژاندر [۹] ماتریس‌های عملیاتی مذکور ارائه می‌شوند. علت اصلی استفاده از این بسط، کاهش حجم محاسبات، به‌ویژه در محاسبه ماتریس عملیاتی انتگرال است. در این روش ماتریس عملیاتی انتگرال از حاصل‌ضرب سه ماتریس زیر که دارای فرم بسته می‌باشند، محاسبه می‌شود:

۱) ماتریس تبدیل پایه برنشتاین به لژاندر،

۲) ماتریس عملیاتی انتگرال چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته بر [۰, ۱]،

۳) ماتریس تبدیل پایه لژاندر به برنشتاین.

ذکر این نکته ضروری است که ماتریس‌های بند (۱) و (۳) معکوس یکدیگر می‌باشند، لذا در عمل با استفاده از حاصل‌ضرب دو ماتریس با فرم بسته می‌توان ماتریس عملیاتی انتگرال را محاسبه نمود. پس از محاسبه این ماتریس‌ها از آن‌ها برای حل معادلات مطرح شده در بند پیش بهره می‌گیریم. مشخصه اصلی این تکنیک، آن است که این گونه معادلات را به سیستم‌هایی با معادلات جبری تبدیل کرده و بطور شگفت‌آوری حجم محاسبات را کاهش می‌دهد. در این پایان‌نامه، همچنین توابع چندمقیاسی برنشتاین معرفی شده و ماتریس‌های عملیاتی آن‌ها ارائه شده‌اند [۱۰]. سپس معادلات انتگرال فردهلم خطی و همرشتاین با روش بسط برحسب این پایه و بکارگیری ماتریس‌های عملیاتی این توابع حل شده‌اند. در این‌جا به برخی از روش‌های موجود برای حل معادلات مطرح شده در این پژوهش اشاره می‌کنیم.

یوسفی [۱۱] از روش موجک‌های لژاندر برای حل معادلات دیفرانسیل از نوع لین-امدن [۴] استفاده کرده است. بابلیان و فتاح‌زاده [۱۲] ماتریس عملیاتی انتگرال موجک‌های چبیشف را برای حل این معادلات بکار برده‌اند. در [۱۳] و [۱۴] یالسینباس [۵] و همکارانش به ترتیب روش سری لاگر و لژاندر را برای معادلات انتگرال فردهلم خطی پیشنهاد داده‌اند. لپیک [۶] و تامی [۷] [۱۵] و بابلیان و شاهسواران [۱۶] با استفاده از روش موجک هار [۸] معادلات انتگرال فردهلم غیرخطی را مورد بحث قرار دادند. روش تیلور [۹] توسط کرت [۱۰] و سزر [۱۱] و روش استفاده از ماتریس

[۴] Lane-Emden
[۵] Yalcınbas
[۶] Lepik
[۷] Tamme
[۸] Haar
[۹] Taylor
[۱۰] Kurt
[۱۱] Sezer

عملیاتی موجک‌های CAS توسط دانفو [۱۲] و شوفنگ [۱۳] در [۱۷] و [۱۸] برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل فردهلم خطی ارائه شده است. نوع غیرخطی این معادلات با استفاده از توابع والش به همراه گره‌های نیوتن-کاتس [۱۴] و با استفاده از توابع پیمایش و موجک‌های B -اسپلاین نیمه متعامد و توابع دوگان آن‌ها در [۱۹] و [۲۰] مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در [۲۱] و [۲۲] به ترتیب روش‌های موجک لژاندر و هم‌محلی سینک برای حل معادلات انتگرال ولترای خطی بکار برده شده است. نوع غیرخطی این معادلات با استفاده از روش‌های توابع والش و توابع مثلثاتی در [۲۳] و [۲۴] مورد بحث واقع شده‌اند.

این پایان‌نامه در چهار فصل تنظیم گردیده است. در فصل اول، مقدماتی از آنالیز حقیقی و عددی که مورد نیاز فصل‌های بعدی است ارائه می‌گردد. در فصل دوم، حل تحلیلی برخی از معادلات انتگرال و معادلات انتگرال-دیفرانسیل معرفی می‌شوند. در فصل سوم، ماتریس‌های عملیاتی انتگرال، حاصلضرب و دوگان چندجمله‌ای‌های برنشتاین و توابع چندمقیاسی برنشتاین ارائه می‌شوند. در فصل چهارم، روش‌های حل عددی چند دسته از معادلات را بیان کرده و با ارائه مثال‌های عددی روش را مورد ارزیابی قرار می‌دهیم و با نتایج موجود از حل این معادلات با دیگر روش‌ها مقایسه می‌نماییم.

[۱۲] Danfu
[۱۳] Xufeng
[۱۴] Newton-Cotes

فصل ۱

پیش‌نیازها

در این فصل برخی تعاریف و قضایای مهم از آنالیز حقیقی [۲۵، ۲۶] و آنالیز عددی [۲۷] را بیان می‌کنیم که برای درک بهتر مفاهیم موجود در فصل‌های بعدی مورد نیاز هستند.

۱.۱ مفاهیم پایه در آنالیز حقیقی

تعریف ۱.۱.۱. یک فضای برداری (خطی) متشکل است از:

۱) یک میدان F از اسکالرها،

۲) یک گروه آبلی $(V, +)$ به‌نام بردارها،

۳) یک نگاشت $\sigma : F \times V \to V$ با ضابطه $\sigma(\alpha, x) = \alpha\, x$ به‌نام ضرب اسکالر که در اصول موضوعه زیر صدق می‌کند.

$i)\, \forall\, \alpha \in F, \forall\, x, y \in V; \;\; \alpha\,(x+y) = \alpha\, x + \alpha\, y,$

$ii)\, \forall\, \alpha, \beta \in F, \;\forall\, x \in V; \;\; (\alpha+\beta)\, x = \alpha x + \beta x,$

$iii)\, \forall\, \alpha, \beta \in F, \;\forall\, x \in V; \;\; (\alpha\, \beta)\, x = \alpha\, (\beta\, x),$

$iv)\, \forall\, x \in V; \;\; ۱ .\, x = x.$

در تعریف بالا V را یک فضای برداری روی میدان F می‌نامیم. عمل جمع در گروه آبلی $(V, +)$ را جمع برداری می‌نامیم. اگر $F = R$ آن‌گاه V را فضای برداری حقیقی و اگر $F = C$ آن‌گاه V را فضای برداری مختلط گوییم.

مثال ۱.۱.۱. فضای توابع چندجمله‌ای بر روی میدان F (با نماد $F[x]$): گیریم F یک میدان باشد. فرض می‌کنیم:

$$V = \left\{a_{0} + a_{1}x + a_{2}x^{2} + \cdots + a_n x^n \,|\, a_i \in F,\, 0 \le i \le n,\, n \in N\right\}.$$

برای دو بردار $f(x), g(x)$ و $c \in F$ ، فرض کنید $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ و $g(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} b_i x^i$ و $m \ge n$. در این صورت تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i + \sum_{i=n+1}^{m} b_i x^i, \\ cf(x) &= \sum_{i=0}^{n} c a_i x^i. \end{aligned}$$

با توجه به تعریف ۱.۱.۱ ، V تحت جمع و ضرب تعریف شده یک فضای برداری روی F می‌باشد و با $F[x]$ یا $P[F]$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم V یک فضای برداری حقیقی باشد. مجموعه $S \subseteq V$ را محدب گوییم هرگاه:

$$\forall\, x, y \in S, \quad \forall t \in [0,\, 1]; \qquad (1 - t)\, x + t\, y \in S.$$

به عبارت دیگر، هر نقطه روی پاره خط واصل x و y در S واقع باشد.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم V یک فضای برداری روی F باشد. زیرمجموعه W از V را یک زیرفضای V می‌نامیم هر گاه W خودش با اعمال جمع برداری و ضرب اسکالری روی V ، یک فضای برداری روی F باشد.

تعریف ۴.۱.۱. فضای برداری V را یک فضای نرم دار (نرمیده) گوییم، در صورتی که به‌ازای‌هر $x \in V$ عدد حقیقی و نامنفی $\|x\|$ که نرم x نامیده می‌شود، وجود داشته باشد به‌طوری‌که:

$i)\ \forall\, x,\, y \in V;\ \ \|x + y\| \le \|x\| + \|y\|,$

$ii)\ \forall\, x \in V,\ \forall\, \alpha \in F;\ \ \|\alpha\, x\| = |\alpha|\ \|x\|,$

$iii)\ \forall\, x \in V;\ \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0.$

مثال ۲.۱.۱. فضای $\left(R^n, \|\,.\,\|_p\right)$ که در آن $p \geq ۱$ و $\|x\|_p = (|x_۱|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{۱}{p}}$ یک فضای نرم‌دار است.

اگر V یک فضای نرم‌دار باشد و برای هر $x, y \in V$ داشته باشیم $d(x, y) = \|x - y\|$ آن‌گاه (V, d) را یک فضای متری القا شده به‌وسیله نرم گوییم. بنابراین هر فضای نرم‌دار یک فضای متری است.

تعریف ۵.۱.۱. دنباله $\{x_n\}_{n=۰}^{\infty}$ را در فضای نرم‌دار V به x همگرا گوییم $(x_n \to x)$ هرگاه:

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = ۰.$$

تعریف ۶.۱.۱. دنباله $\{x_n\}_{n=۰}^{\infty}$ را در فضای نرم‌دار V کشی[۱] گوییم هرگاه:

$$\forall\,\varepsilon > ۰, \quad \exists\,N, \quad \forall\,m, n \in z^+, \quad (m, n > N \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon).$$

تعریف ۷.۱.۱. فضای متری (V, d) را کامل گوییم هرگاه هر دنباله کشی در V همگرا باشد.

تعریف ۸.۱.۱. فضای نرم‌دار V را یک فضای باناخ[۲] گوییم هرگاه فضای متری (V, d) با متر متعارف (متری که به‌وسیله نرم القا می‌شود)، یک فضای متری کامل باشد.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنیم X یک مجموعه غیرتهی باشد. خانواده M از زیرمجموعه‌های X را یک جبر گوییم هرگاه:

۱) اجتماع هر دو عضو M در M باشد (M تحت عمل اجتماع بسته باشد)،

۲) متمم هر عضو M در M باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱. جبر M را یک σ -جبر گوییم هرگاه تحت اجتماع شمارا بسته باشد. در حقیقت فرض کنیم $\{m_i\}_{i=۱}^{\infty} \subseteq M$ ، اگر $m = \bigcup\limits_{i=۱}^{\infty} m_i \in M$ آن‌گاه M را یک σ -جبر گوییم.

تعریف ۱۱.۱.۱. اگر X یک مجموعه غیرخالی و M یک σ -جبر روی X باشد، زوج (X, M) را یک فضای اندازه‌پذیر گوییم.

[۱] Cauchy
[۲] Banach

تعریف ۱.۱.۱۲. فرض کنیم (X, M) یک فضای اندازه‌پذیر و $f : X \to R^*$ یک تابع حقیقی توسعه یافته باشد. f را تابعی اندازه‌پذیر گوییم هرگاه به‌ازای هر زیرمجموعه باز O در R ، مجموعه $f^{-1}(O)$ در X نسبت به M اندازه‌پذیر باشد یعنی $f^{-1}(O) \in M$.

تعریف ۱.۱.۱۳. فرض کنیم $0 < p < \infty$ ، در این صورت مجموعه تمام توابع اندازه‌پذیری مانند f که $|f(t)|^p$ انتگرال‌پذیر باشد ($\int_X |f(t)|^p dt < \infty$) را فضای $L^p(X)$ گوییم. به عبارت دیگر:

$$L^p(X) = \left\{ f | f : X \to C : \text{اندازه پذیر}\ f,\ \int_X |f(t)|^p dt < \infty \right\}.$$

به‌آسانی می توان نشان داد که L^p یک فضای برداری است. به ازای هر $p \geq 1$ و $f \in L^p$ تعریف می‌کنیم:

$$\|f\|_p = \left\{ \int_X |f(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}},$$

و عدد $\|f\|_p$ را L^p-نرم f گوییم. به‌آسانی می‌توان نشان داد که این نرم در شرایط نرم صدق می‌کند.

تعریف ۱.۱.۱۴. اگر $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ دنباله‌ای در فضای نرم‌دار X باشد. گوییم سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ در X همگرا به x است هرگاه دنباله $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n} x_i$ به x همگرا باشد. در این صورت می‌نویسیم $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n = x$. سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ را مطلقاً همگرا گوییم هرگاه $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|x_n\|$ همگرا باشد.

قضیه ۱.۱.۱. شرط لازم و کافی برای آن‌که فضای نرم‌دار X کامل باشد، آن است که هر سری مطلقاً همگرا در این فضا همگرا باشد.

قضیه ۱.۱.۲. (ریز-فیشر [۳]) فضای L^p ، $(1 \leq p \leq \infty)$ کامل است.

به‌این‌ترتیب با توجه به قضایای فوق، L^p به‌ازای $1 \leq p \leq \infty$ یک فضای نرم‌دار کامل است پس L^p به‌ازای $1 \leq p \leq \infty$ یک فضای باناخ است.

[۳] Riesz-Fischer

در حالت خاص $L^{2}(X)$ ، یعنی

$$L^{2}(X)=\left\{f|f:\, X\rightarrow C:\ \text{اندازه پذیر}\ f,\ \int_{X}|f(t)|^{2}dt<\infty\right\},$$

با نرم

$$\|f\|_{2}=\left\{\int_{X}|f(t)|^{2}dt\right\}^{\frac{1}{2}},$$

یک فضای باناخ است.

تعریف ۱.۱.۱۵. فضای خطی مختلط (حقیقی) X را یک فضای ضرب‌داخلی گوییم هرگاه یک تابع مختلط (حقیقی) روی $X\times X$ که آن را با نماد $\langle\, .\, ,\, .\,\rangle$ نشان می‌دهیم، وجودداشته‌باشد به‌طوری‌که برای هر $x,\, y,\, z\in X$ و هر $\alpha\in C$ داشته باشیم:

$i)\ \langle x+y,\, z\rangle=\langle x,\, z\rangle+\langle y,\, z\rangle\,,$

$ii)\ \langle x,\, y\rangle=\overline{\langle y,\, x\rangle},$

$iii)\ \langle\alpha\, x,\, y\rangle=\alpha\,\langle x,\, y\rangle\,,$

$iv)\ \langle x,\, x\rangle=0\ \Leftrightarrow\ x=0,\quad \langle x,\, x\rangle\geq 0.$

آن‌گاه $\langle x,\, y\rangle$ ضرب‌داخلی x و y نامیده می‌شود.

یک ضرب‌داخلی روی X یک نرم تعریف می‌کند که به‌وسیله $\|x\|=\sqrt{\langle x,\, x\rangle}$ نمایش داده می‌شود و به‌همین‌ترتیب یک متر روی X با ضابطه زیر تعریف می‌شود:

$$d(x,\, y)=\|x-y\|=\sqrt{\langle x-y,\, x-y\rangle}.$$

تعریف ۱.۱.۱۶. فرض کنیم X یک فضای ضرب‌داخلی باشد، آن‌گاه برای هر $x,y\in X$ داریم:

۱) نامساوی کشی - شوارتز[۴] $|\langle x,\, y\rangle|\leq\|x\|\,.\,\|y\|$،

۲) نامساوی مثلثی $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$،

۳) اتحاد متوازی الاضلاع $\|x+y\|^{2}+\|x-y\|^{2}=2\|x\|^{2}+2\|y\|^{2}$.

تعریف ۱.۱.۱۷. فضای باناخ H را یک فضای هیلبرت[۵] گوییم هرگاه یک ضرب‌داخلی $\langle\, .\, ,\, .\,\rangle$

[۴] Cauchy-Schwartz
[۵] Hilbert

روی H تعریف شده باشد به‌طوری‌که به‌ازای‌هر $x \in H$ ، $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

به عنوان مثال، فضای $L^{۲}[a, b]$ با نرمی که به‌وسیله $\|x\|_{۲} = \left\{\int_a^b |x(t)|^{۲} dt\right\}^{\frac{۱}{۲}}$ تعریف می‌شود، یک فضای هیلبرت است که ضرب‌داخلی آن به‌وسیله $\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)y(t)\, dt$ تعریف می‌شود، هرگاه $x(t)$ و $y(t)$ توابع حقیقی باشند و اگر $x(t)$ و $y(t)$ توابعی با مقدار مختلط باشند، ضرب‌داخلی چنین تعریف می‌شود:

$$\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\, dt.$$

تعریف ۱۸.۱.۱. عضو x از یک فضای ضرب‌داخلی X بر عضو y از این فضا را عمود گوییم هرگاه $\langle x, y\rangle = ۰$ و آن را با $x \perp y$ نمایش می‌دهیم. همچنین اگر $A, B \subseteq X$ ، گوییم x بر A عمود است و نمایش می‌دهیم $x \perp A$ ، هرگاه به‌ازای‌هر $a \in A$ داشته باشیم $x \perp a$ و گوییم A و B بر هم عمودند، هرگاه به‌ازای‌هر $a \in A$ و هر $b \in B$ داشته باشیم $a \perp b$.

تعریف ۱۹.۱.۱. فرض کنیم F یک زیرفضای فضای هیلبرت H باشد. بنا به تعریف، مجموعه $F^{\perp}$ را مکمل متعامد F گوییم هرگاه:

$$F^{\perp} = \{x \in H \mid x \perp F\}.$$

قضیه ۳.۱.۱. اگر F یک زیرفضای فضای هیلبرت H باشد، آنگاه $F^{\perp}$ زیرفضای بسته H است.

قضیه ۴.۱.۱. (ریز [۶]) فرض کنیم F زیرفضای فضای هیلبرت H باشد. اگر F بسته باشد، آن‌گاه $F \oplus F^{\perp} = H$.

تعریف ۲۰.۱.۱. $A \subset X$ را متعامد گوییم هرگاه:

$$\forall\, x, y \in A, \qquad \langle x, y\rangle = \begin{cases} ۰, & x \neq y, \\ \alpha > ۰, & x = y. \end{cases}$$

اگر برای‌هر $x \in A$ داشته باشیم $\|x\| = ۱$ ، مجموعه A را متعامد یکه یا نرمال گوییم.

[۶] Riesz

قضیه ۵.۱.۱. اگر A یک زیرمجموعه متعامد یکه از فضای ضرب‌داخلی X باشد و $x_۱, x_۲, \cdots, x_n$ عناصر متمایزی از A باشند آن‌گاه

$$\forall\, y \in X, \qquad \sum_{k=۱}^{n} |\langle y,\, x_k\rangle|^۲ \leq \|y\|^۲.$$

قضیه ۶.۱.۱. اگر A زیرمجموعه متعامد یکه از فضای ضرب‌داخلی X باشد و $y \in X$، آن‌گاه:

۱) $\{x \in A \mid \langle y,\, x\rangle \neq ۰\}$ شمارش‌پذیر است.

۲) $\sum\limits_{x\in A} |\langle y,\, x\rangle|^۲ \leq \|y\|^۲$ (نامساوی بسل[۷]).

قضیه ۷.۱.۱. اگر A یک زیرمجموعه متعامد یکه از فضای هیلبرت H باشد، آن‌گاه سری فوریه[۸] $\sum\limits_{x\in A} \langle y,\, x\rangle\, x$ مستقل از ترتیب جملات، همگراست.

تعریف ۲۱.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای ضرب‌داخلی و A زیرمجموعه متعامد یکه از X باشد. آن‌گاه A را یک پایه متعامد یکه برای X گوییم هرگاه به‌ازای‌هر $y \in X$ داشته باشیم:

$$y = \sum_{x\in A} \langle y,\, x\rangle\, x.$$

تعریف ۲۲.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای ضرب‌داخلی و A زیرمجموعه‌ای از X باشد. گوییم A کامل است هرگاه:

$$A^{\perp} = \{y \in X \mid \langle x,\, y\rangle = ۰ \quad \forall x \in A\} = \{۰\}.$$

قضیه ۸.۱.۱. اگر A یک زیرمجموعه متعامد یکه از فضای هیلبرت H باشد، آن‌گاه شرایط زیر معادل هستند:

۱) به‌ازای‌هر $y \in X$ داریم، $\sum\limits_{x\in A} |\langle y,\, x\rangle|^۲ = \|y\|^۲$ (اتحاد پارسوال[۹]).

۲) A کامل است.

۳) A یک پایه متعامد یکه برای H است.

---

[۷] Bessel

[۸] Fourier

[۹] Parseval

با توجه به قضیه قبل اگر A یک زیرمجموعه متعامد یکه کامل از فضای هیلبرت H باشد، آن‌گاه هر عنصر $y \in H$ را می‌توان به‌صورت سری فوریه $y = \sum\limits_{x\in A} \langle y,\, x\rangle\, x$ بسط داد که سری فوریه مذکور همگرا به y است.

تعریف ۲۳.۱.۱. تابع w را بر $[a,\, b]$ یک تابع وزن گوییم هرگاه:

۱) w بر $(a,\, b)$ نامنفی باشد،

۲) w بر $[a,\, b]$ انتگرال‌پذیر باشد،

۳) w بر هیچ زیر بازه غیر بدیهی $(a,\, b)$ متحد با صفر نباشد.

قبلاً در $L^{2}[a,\, b]$ ضرب‌داخلی را تعریف کردیم، اینک ضرب‌داخلی نسبت به تابع وزن w را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\langle x,\, y\rangle = \int_a^b w(t)x(t)\overline{y(t)}\, dt.$$

تعریف ۲۴.۱.۱. دستگاه متعامد نرمال $\{f_i\}$ را یک دستگاه متعامد نرمال کامل گوییم هرگاه هیچ دستگاه متعامد نرمال وسیع‌تر از آن وجود نداشته باشد. به‌عبارت‌دیگر:

$$\exists\, f,\ \ \forall\, i,\ \ \langle f,\, f_i\rangle = 0 \to f = 0.$$

قضیه ۹.۱.۱. اگر $f_1, f_2, ..., f_n$ دنباله‌ای از توابع متعامد نرمال (یکه) در $L^{2}(a,b)$ باشند و همچنین $f \in L^{2}(a,b)$ ، آن‌گاه $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ی هست که $\left\| f - \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \right\|$ مینیمم است و به $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$ تقریب کمترین مربعات f گوییم.

لم ۱۰.۱.۱. در هر فضای ضرب‌داخلی، دنباله توابع متعامد مستقل خطی هستند.

۲.۱ معادلات انتگرال

در این بخش تعاریف اولیه از معادلات انتگرال را ارائه می‌دهیم [۲۸] .