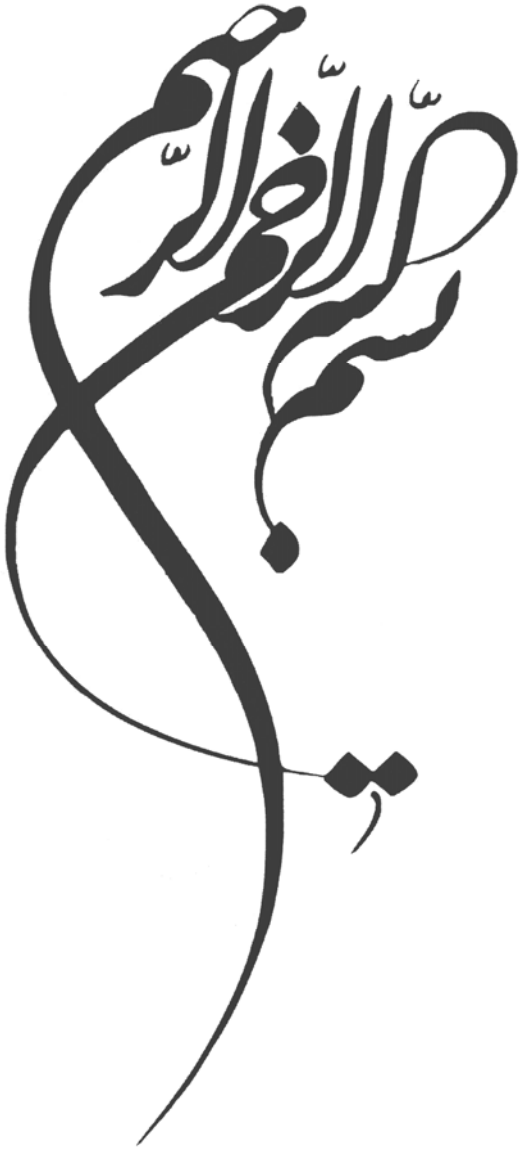

بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده مهندسی عمران

بررسی پایداری ارتجاعی و غیر ارتجاعی صفحات مایل به روش نوار محدود اسپیلاین

Elastic and inelastic local buckling analysis of skew plates by Spline Finite Strip Method

پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی عمران- سازه

شهرام لطفی مهیاری

استاد راهنما

دکتر مجتبی ازهری

بهار ۱۳۸۹

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده مهندسی عمران

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته مهندسی عمران- سازه

آقای شهرام لطفی مهیاری

تحت عنوان

بررسی پایداری ارتجاعی و غیر ارتجاعی صفحات مایل به روش نوار محدود اسپیلاین

در تاریخ ۱۳۸۹/۴/۲۲ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهایی قرار گرفت.

۱. استاد راهنمای پایان نامه	دکتر مجتبی ازهری	امضاء
۲. استاد مشاور پایان نامه	دکتر بیژن برومند	امضاء
۳. استاد داور	دکتر حمید هاشم الحسینی	امضاء
٤. استاد داور	دکتر علی محمد مومنی	امضاء
سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده	دکتر عبدالرضا کبیری سامانی	امضاء

تشکر و قدردانی

سپاس و ستایش پروردگار یکتائی که ذات بی‌کرانش آکنده از علم و دانش است و چه بـا سـخاوت از ایـن خـوان بی‌همتا و با لطف و رحمت خود، مرا در مسیر کسب علم و معرفت رهنمون ساخت.

اکنون که در پایان راه و بر سر هزاران آغاز ایستاده‌ام باید که قدردان یارها و همراهیها باشم.

درآغاز از زحمات پدر و مادر عزیزم، همچنین همسر صبور و مهربانم خاضعانه تـشکر مـی‌کـنم. از اسـتاد راهنمـای فرزانه، اندیشمند و بزرگوار این رساله، جناب آقای دکتر مجتبی ازهری که با صبر و محبت فراوان اجـازه کـسب علـم از حضور محترمشان را دادند و با دلگرمی‌ها و راهنمائی‌های ارزنده‌اشان در تمامی مراحل اجرای پایـان نامـه، بنـده را مـورد عنایت قرار دادند، و افتخار شاگردی در محضر گوهربارشان آفریننده برگهای سبز دفتر تحصیل اینجانـب شـد، صـمیمانه سپاس‌گذاری می‌کنم. از استاد بزرگوار جناب آقای دکتر برومند که مشاورت پایـان نامـه را عهـده دار شـدند، صـمیمانه تشکر می‌کنم.

ازجناب آقای دکتر سعادت پور به خاطر راهنمائیهای ارزنده‌اشان در طی دوران تحصیل سپاس‌گذاری می‌کنم.

از دوستان عزیزو مهربانم، که بسیاری از لحظه‌های سخت و دلگیر مرا با همراهی‌ها، محبت‌ها و همفکری هایشان به شادی تبدیل کردند و با حضورسبزشان باعث دلگرمی ام شدند، خاضعانه تـشکر مـی‌کـنم. دوره تحـصیل، بهانـه‌ای بـرای آشنائی با عزیزانی بود که یاد و خاطرات دوست داشتنی آنها همواره با من خواهد بود. در پایـان بـرای همـه ایـن عزیـزان آرزوی سلامتی و توفیق روزافزون را از خداوند متعال خواستارم.

شهرام لطفی مهیاری

بهار ۱۳۸۹

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات
و نوآوریهای ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه
متعلق به دانشگاه صنعتی اصفهان است

فهرست مطالب

عنوان	صفحه
فهرست مطالب	هفت
چکیده	۱
فصل اول: مقدمه و کلیات	۲
۱-۱- مقدمه	۲
۱-۲- کمانش ورق	۵
۱-۳- انواع کمانش	۸
۱-۴- تحلیل پدیده‌ی کمانش الاستیک در ورق‌ها	۹
۱-۵- کمانش غیر الاستیک در صفحات	۱۴
۱-۵-۱- روابط تنش- کرنش	۱۵
۱-۵-۲- تئوری‌های پلاستیسیته	۱۶
۱-۵-۳- روابط اساسی مواد	۱۷
۱-۶- هدف و تشریح مسأله	۱۹
۱-۷- محتوای فصول بعدی	۲۰
فصل دوم: معادلات حاکم بر کمانش صفحات و روش‌های حل آن‌ها	۲۱
۲-۱- مقدمه	۲۱
۲-۲- فرضیات به کاررفته در تعیین معادلات حاکم بر رفتار ورق	۲۲
۲-۳- تعیین معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر کمانش ورق	۲۳
۲-۳-۱- روابط بین تنش کرنش و تغییر مکان	۲٤
۲-۳-۲- روابط لنگر- تغییر شکل	۲۵
۲-۳-۳- معادلات تعادل ورق	۲۷
۲-۳-٤- تعادل نیروهای واقع در صفحه	۲۸
۲-۳-۵- تعادل لنگرها و نیروهای برشی	۲۹
۲-۳-٦- استخراج معادله‌ی دیفرانسیل کمانش ورق	۳۱
۲-۴- روش‌های حل معادلات دیفرانسیل مربوط به کمانش صفحات	۳۲

۲-٤-۱- روش‌های تحلیلی ۳۲
۲-٤-۲- روش‌های عددی ۳۷
فصل سوم:روش‌های نوار محدود در حل معادلات دیفرانسیل مربوط به کمانش صفحات ۴۰
۳-۱- مقدمه ٤۰
۳-۲- مراحل انجام کار به روش نوارهای محدود ٤۱
۳-۳- انتخاب نوع نوار و توابع شکل در روش نوارهای محدود ۴۳
۳-۳-۱- نوار مستطیلی مرتبه‌ی پایین (LO_2) ۴۴
۳-۳-۲- نوار مرتبه‌ی بالای مستطیلی با خط گره‌ی میانی (HO_3) ۴۵
۳-۳-۳- نوار مرتبه‌ی بالای مستطیلی با دو خط گره (HO2) ٤٦
۳-۳-٤- توابع شکل طولی در روش نوار محدود ٤۷
۳-٤- روش نوار محدود عادی ٤۷
۳-۵- روش نوار محدود مختلط ٤۸
۳-٦- روش نوار محدود اسپیلاین ٤۹
۳-٦-۱- تابع اسپیلاین-B3 ۵۱
۳-٦-۲- توابع شکل در روش نوار محدود اسپیلاین ۵۲
۳-٦-۳- اصلاح توابع اسپیلاین با توجه به شرایط مرزی ۵۳
۳-۷- روش نوار محدود اسپیلاین در صفحات مایل ۵۹
۳-۷-۱- نگاشت ۵۹
۳-۷-۲- روابط تنش ـ کرنش ٦۱
۳-۷-۳- استخراج ماتریس‌های سختی و هندسی ٦۳
فصل چهارم: مثال‌های حل شده و نتایج آن‌ها ۶۸
٤-۱- مقدمه ٦۸
٤-۲- بررسی همگرایی روش ارائه شده ٦۹
۴-۳- کمانش ارتجاعی صفحات متوازی‌الاضلاع با ضخامت ثابت ۷۰
٤-۳-۱- کمانش موضعی ورق ایزوتروپیک متوازی‌الاضلاع ۷۱
٤-۳-۲- کمانش موضعی ورق ایزوتروپیک مستطیلی بر روی تکیه‌گاه ساده تحت برش ۷۲
٤-۳-۳- کمانش موضعی ورق ارتوتروپیک مستطیلی با شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری مختلف ۷۳
٤-۳-٤- کمانش موضعی ورق ایزوتروپیک متوازی‌الاضلاع با تکیه‌گاه خطی میانی ۷٤
۴-۴- کمانش غیر ارتجاعی صفحات متوازی‌الاضلاع با ضخامت ثابت ۷۵

٤-٤-١- کمانش غیر ارتجاعی صفحات مربع شکل با ضخامت ثابت ٧٦
٤-٤-٢- کمانش غیر ارتجاعی صفحات مستطیلی با ضخامت ثابت ٧٧
٤-٤-٣- کمانش غیر ارتجاعی صفحات متوازی‌الاضلاع با ضخامت ثابت ٧٨
٤-٥- کمانش غیر ارتجاعی صفحات ذوزنقه با ضخامت متغیر ٨٠
٤-٥-١- کمانش صفحات مربعی با ضخامت متغیر ٨٠
٤-٥-٢- کمانش ورق مستطیلی با ضخامت متغیر تحت اثر برش ٨٦
٤-٥-٣- کمانش ورق متوازی‌الاضلاع با ضخامت متغیر تحت اثر تنش σx ٨٧
٤-٥-٤- کمانش ورق ذوزنقه با ضخامت متغیر تحت اثر تنش σx ٨٨
٤-٥-٥- کمانش ورق ذوزنقه با ضخامت متغیر تحت اثر تنش σy ٨٩
٤-٥-٦- کمانش ورق ذوزنقه با ضخامت متغیر تحت اثر تنش دو محوره (σx و σy) ٩٠
فصل پنجم: نتیجه گیری و پیشنهادات ٩١
٥-١- مقدمه ٩١
٥-٢- نتیجه گیری ٩١
٥-٣- پیشنهادات ٩٢
منابع ٩٣

چکیده

ورق‌ها را می‌توان اجزای سازه‌ای دو بعدی با هندسه‌ی تخت و یا خمیده دانست که در صنایع مختلف امروزی کاربرد وسیعی یافته‌اند. عملکرد دو بعدی ورق، همچنین امکان شکل‌دهی آسان آن به اشکال گوناگون، صنعتگران را قادر به ساخت سازه‌های سبک‌تر نموده‌است. این ویژگی مزایای اقتصادی فراوانی به همراه داشته و سبب توجه چشمگیر مهندسین به استفاده‌ی بیشتر از ورق در صنایع مختلف امروزی شده است. امروزه ورق‌های نازک با شکل‌های گوناگون در صنایع کشتی‌سازی، ماشین‌سازی، ساختمانی و غیره به کار می‌روند، لذا بررسی پایداری ورق‌های نازک تحت فشار، مورد توجه کارشناسان قرار گرفته است.

با توجه به مشکل بودن حل دقیق معادله‌ی دیفرانسیل پاره ای مربوط به تحلیل پایداری ورق‌ها، امروزه، از روش‌های عددی به شکل وسیعی در حل این معادلات استفاده می‌شود. روش نوار محدود، یکی از کاراترین روش‌های حل عددی در تحلیل مسائل مربوط به خمش و پایداری ورق‌ها است. از انواع این روش می‌شود به روش نوار محدود عادی، مختلط و یا روش نوار محدود اسپیلاین اشاره کرد. استفاده از سری‌های هارمونیک، روش نوار محدود اسپیلاین را به ابزاری موثر و دقیق در آنالیز سازه‌هایی که خصوصیات هندسی آنها در یک جهت، ثابت باشد تبدیل نموده است. مشخصه‌ی بارز روش نوار محدود اسپیلاین، وجود گره در راستای طولی نوارهاست که می‌تواند تغییرات بارگذاری و هندسی در طول ورق را پوشش دهد. با استفاده از این روش، حتی با فرض یک درجه‌ی آزادی کمتر در گره‌ها نسبت به روش المان محدود، می‌توان به کسب نتایج بهتر امیدوار بوده و در ضمن این روش سریع‌تر به جواب همگرا می‌شود.

در تحقیق حاضر، ابتدا با استفاده از روش نوار محدود اسپیلاین، پایداری صفحات نازک به شکل‌های مربع، مستطیل، متوازی‌الاضلاع و ذوزنقه، تحت اثر بارگذاری درون صفحه، برای برخی از حالات متداول تکیه‌گاهی و در هر دو محدوده‌ی رفتار ارتجاعی و رفتار غیر ارتجاعی مواد سازنده‌ی ورق بررسی شده و ضریب کمانش موضعی در این ورق‌ها محاسبه شده است. با استفاده از نتایج به دست آمده می‌توان بارهای بحرانی این صفحات را یافته و در طراحی ورق‌های به شکل‌های مختلف از آن‌ها استفاده نمود.

در بخش دوم این تحقیق، به بررسی پایداری صفحات نازک چهار ضلعی با تکیه‌گاه ساده، در هر دو محدوده‌ی رفتار ارتجاعی و غیر ارتجاعی مواد سازنده‌ی ورق، با استفاده از روش نوار محدود اسپلاین پرداخته می‌شود. در این روش، روابط کرنش و میدان جابجایی با استفاده از تئوری کیرشهف در صفحات نازک استخراج شده و در محاسبه‌ی ماتریس‌های سختی و هندسی ورق به کار برده شده‌است. ضریب کمانش موضعی این ورق‌ها تحت اثربارگذاری درون صفحه، به شکل جداولی بر حسب تغییرات خطی ضخامت ورق در طول آن تنظیم شده است.

کاهش ضخامت ورق، در مناطقی از آن که تاثیر چشمگیری در مقدار ضریب کمانش نداشته باشد، سبب سبک‌تر شدن سازه و اقتصادی شدن طرح می‌شود. از این خاصیت می‌توان در ساخت بدنه و بال هواپیما و موشک و افزایش کارایی آنها در سرعت‌های بالا، همچنین در سبک‌تر ساختن دال‌های پی و سقف، دریچه‌ها، دیوارهای حائل نازک و عرشه‌ی پل‌ها بهره برد

کلمات کلیدی: پایداری، صفحه، غیر ارتجاعی، نوار محدود، اسپیلاین

فصل اول

مقدمه و کلیات

۱-۱- مقدمه

ورق‌ها محیط‌های پیوسته و محدودی هستند که ضخامت آن‌ها، (t)، بسیار کوچکتر از دو بعد دیگرشان است. ورق‌ها را می‌توان اجزای سازه‌ای دو بعدی با هندسه‌ی تخت و یا خمیده دانست که در صنایع مختلف امروزی کاربرد وسیعی یافته‌اند. عملکرد دو بعدی ورق، همچنین امکان شکل‌دهی آسان آن به اشکال گوناگون، به صنعتگران در جهت ساخت سازه‌های سبک‌تر که مزایای اقتصادی فراوانی به همراه دارد، کمک می‌نماید. این مزایا سبب توجه چشمگیر مهندسین به استفاده‌ی بیشتر از ورق در صنایع مختلف امروزی شده است. گستره‌ی وسیعی از سازه‌ها و اجزای سازه‌ای مهندسی را می‌توان نام برد که در آن‌ها از ورق به شکل اجزای سازه‌ای، یا حتی به عنوان یک سازه‌ی کامل استفاده می‌شود. در مهندسی عمران می‌توان به مثال‌هایی از قبیل دال‌های پی و سقف، دریچه‌ها، دیوارهای حائل نازک و عرشه‌ی پل‌ها اشاره نمود. همچنین در صنایع کشتی‌سازی و صنایع هوافضا، استفاده از ورق‌ها به طور گسترده‌ای رواج دارد.

تحلیل بیشتر سازه‌های ساخته شده از ورق مستلزم ساده‌سازی و حل معادلات مربوط به آن در تئوری الاستیسیته است. به این ترتیب تئوری‌های گوناگونی برای بیان رفتار الاستیک ورق‌ها ارائه شده و تکنیک‌های تحلیلی و عددی گوناگونی جهت حل مسائل ورق‌ها توسعه یافته است.

حل تحلیلی (دقیق) معادلات دیفرانسیل ورق در تئوری‌های مختلف، تنها برای حالت‌های نسبتاً ساده امکان‌پذیر است. برای حالات دیگر که در گستره‌ی وسیعی از مسائل کاربردی با آن‌ها مواجه می‌شویم، استفاده از روش‌های تحلیلی کلاسیک معمولاً میسر نبوده یا به حل‌های بسیار پیچیده و غیرمعقول منتهی می‌شود. در این شرایط استفاده از روش‌های تقریبی و روش‌های عددی نه تنها راهکاری معقول خواهد بود بلکه به تعبیری می‌توان گفت این روش‌ها تنها راه‌های کارآمد هستند. استفاده از روش‌های انرژی در بیشتر موارد منجر به نتایج منطقی و قابل قبولی می‌شود. بیشتر روش‌های عددی برگسسته‌سازی[1] یک محیط پیوسته متکی می‌باشند. روش تفاضل‌های محدود[2] و روش المان‌های مرزی[3] بر مبنای گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل عمل می‌کنند، در حالی که روش‌های اجزای محدود[4] و نوارهای محدود[5]، یک گسسته‌سازی فیزیکی با ملاحظات مهندسی را به کار می‌برند. کلیه‌ی تکنیک‌های مذکور را می‌توان در حل مسائل استاتیکی، دینامیکی و پایداری الاستیک ورق‌ها به کار برد.

تحلیل دقیق ورق به عنوان یک محیط سه بعدی منجر به حل مسائل طولانی و بغرنج ریاضی می‌شود که تحلیلی کسل کننده و از نظر محاسباتی پرهزینه خواهد بود. این مسأله سبب توسعه‌ی روش‌های منطقی‌تر در تحلیل ورق‌ها شد. با توجه به رفتارهای متفاوت سازه‌ای که ورق‌ها از خود نشان می‌دهند، آن‌ها را به چهار دسته، که هر یک معادله‌ی دیفرانسیل مربوط به خود را دارد تقسیم می‌نمایند. ملاک اصلی در این تقسیم‌بندی، نسبت ضخامت به عرض ورق (t/L)، است. هر چند مرزبندی کاملاً مشخصی برای این دسته‌بندی وجود ندارد، ولی با این حال می‌توان ورق‌ها را به چهار دسته‌ی اصلی تقسیم نمود [۱]:

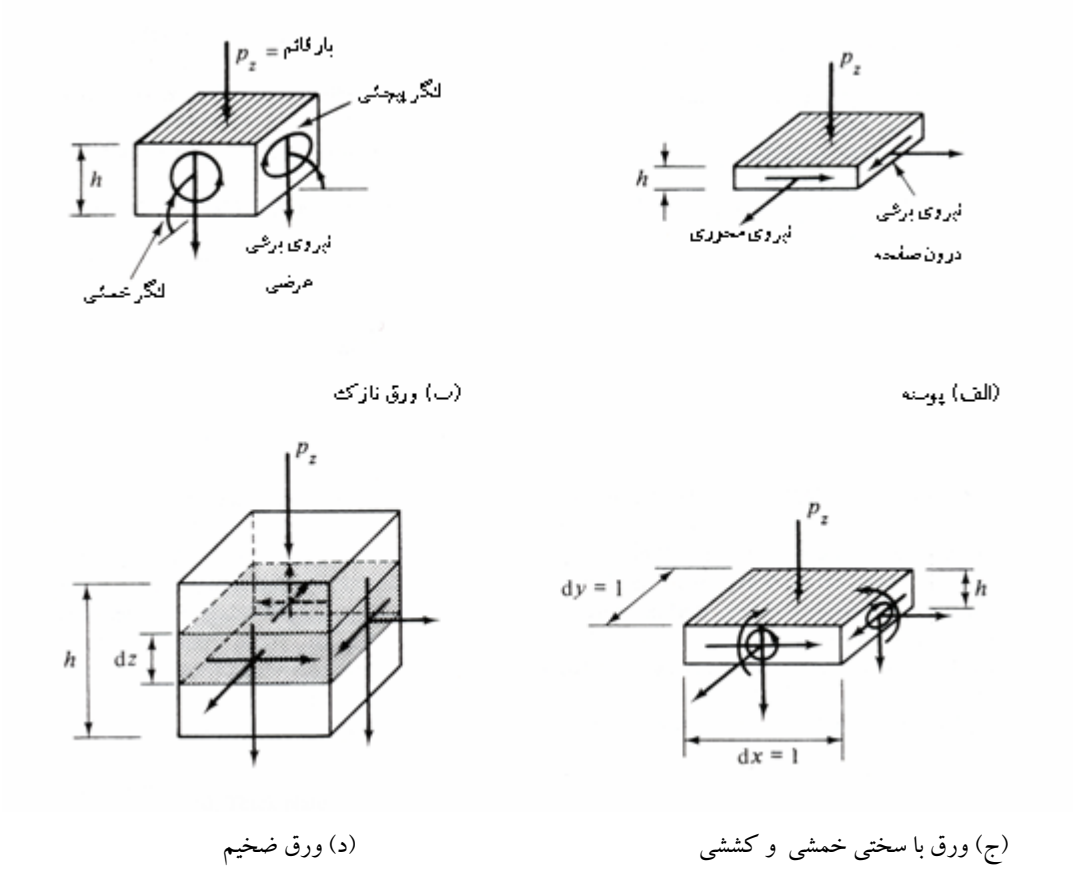
۱- غشاءها[6] یا پوسته‌ها $(t/L < 1/50)$؛ ورق‌های بسیار نازکی هستند که سختی خمشی نداشته و بارها را به وسیله‌ی نیروهای محوری و برشی درون صفحه‌ای انتقال می‌دهند (شکل ۱-۱ الف).

۲- ورق‌های سخت[7] $(1/50 \leq t/L \leq 1/10)$؛ این دسته از ورق‌ها مطابق شکل ۱-۱ ب، ورق‌های نازکی هستند که دارای سختی خمشی بوده و بارهای اعمالی را از طریق لنگرهای خمشی، لنگرهای پیچشی و نیروهای برشی عرضی انتقال می‌دهند. در تحلیل این ورق‌ها از اثرات تغییر شکل‌های برشی صرف‌نظر می‌شود. ورق‌های به کار رفته در اغلب کاربردهای مهندسی در این دسته قرار می‌گیرند. در تحلیل مسائل مربوط به ورق نازک، عدم اعمال محدودیت تغییر شکل‌های این ورق به مقادیر خاص، سبب توسعه‌ی عملکرد غشائی در آن شده و بدین ترتیب بارهای خارجی

---

[1] Discretization
[2] Finite Difference Method
[3] Boundary Element Method (BEM)
[4] Finite Element Method (FEM)
[5] Finite Strip Method (FSM)
[6] Membranes
[7] Stiff Plates

اعمالی بر ورق به وسیله‌ی ترکیبی از لنگرهای خمشی و پیچشی، نیروهای برشی عرضی و درون صفحه‌ای و نیز نیروهای محوری انتقال می‌یابد (شکل ۱-۱ ج). به همین دلیل است که مبانی تئوری‌های الاستیک ورق‌ها، بین ورق‌های با تغییر شکل‌های کوچک و بزرگ متفاوت است. در بیشتر کاربردهای عام مهندسی، ورق با تغییر شکل‌های بزرگ به دلیل پیچیدگی‌های خاص تحلیلی و اجرایی مورد استفاده قرار نمی‌گیرد.



(ج) ورق با سختی خمشی و کششی (د) ورق ضخیم

شکل ۱-۱ نیروهای دا خلی برای انواع المان ورق [۱]

۳- ورق‌های نسبتاً ضخیم[1] $(1/10 \leq t/L \leq 1/5)$؛ این ورق‌ها شبیه ورق‌های نازک هستند، با این تفاوت که در آن‌ها نیروهای برشی عرضی تأثیرگذار بوده و در تحلیل مسأله باید لحاظ شوند (شکل ۱-۱ ج).

۴- ورق‌های ضخیم[2] $(t/L > 1/5)$؛ در این ورق‌ها شرایط حاکم بر میدان تنش همانند یک محیط پیوسته‌ی سه بعدی در نظر گرفته می‌شود (شکل ۱-۱ د).

کیرشهف را می‌توان بنیانگذار تئوری ورق‌ها نامید، چرا که او در تئوری خود اثرات توأم خمش و کشش را در نظر گرفت. همچنین، او اولین کسی بود که فهمید در تحلیل ورق‌های با تغییر شکل بزرگ نمی‌توان از جملات غیرخطی صرف‌نظر کرد. توسعه‌ی معادله‌ی فرکانس ورق‌ها و معرفی روش‌های تغییر شکل مجازی برای حل مسائل مختلف

[1] Moderately Thick Plates
[2] Thick Plates

ورق، از دیگر فعالیت‌های او به شمار می‌آید [۱].

با آغاز قرن بیستم و رویکرد سازندگان کشتی‌ها به استفاده از فولاد به جای چوب، تئوری ورق بیش از پیش توسعه یافت. دانشمندان اتحاد جماهیر شوروی سابق پیشگامان توسعه‌ی تئوری الاستیسیته بودند. تحقیقات آن‌ها به صنایع کشتی‌سازی کشورشان کمک‌کرد، گام‌های مهمی در راستای پیشرفت بردارد. از جمله‌ی این دانشمندان می‌توان به نام‌هایی چون کرایلوف (۱۹۴۵-۱۸۶۳) و شاگردش بوبنوف، که نقش بسزایی در توسعه‌ی تئوری ورق‌ها داشتند اشاره کرد. علاوه بر آن‌ها، نقش و شهرت تیموشنکو در این زمینه از عوامل مهم موفقیت روس‌ها بود. توسعه‌ی صنایع هوایی دانشمندان را به منظور انجام بررسی‌های دقیق و موشکافانه بر روی مسائل ورق‌ها برانگیخت. از جمله مسائل مورد بررسی می‌توان به تحلیل ورق تحت اثر نیروهای داخل صفحه، رفتار پس از کمانش ورق‌ها، ارتعاش آزاد ورق‌ها و ورق‌های سخت شده اشاره کرد [۱].

همان‌گونه که می‌دانیم مهم‌ترین فرضیه‌ی کیرشهف در تئوری ورق (سطوح عمود بر میان صفحه، بعد از تغییر شکل به صورت عمود و مستوی باقی می‌مانند)، به قیمت صرف‌نظر از تغییر شکل‌های ناشی از نیروهای برشی عرضی تمام می‌شود. اگر از این تئوری در تحلیل ورق‌های نسبتاً ضخیم استفاده شود خطاهای قابل توجهی ایجاد خواهد شد. در چنین ورق‌هایی استفاده از این تئوری، تغییر مکان‌ها را کمتر از حد واقعی و فرکانس‌ها و بارهای کمانشی را بیش از حد واقعی آن‌ها به دست می‌دهد. برای رفع چنین اشکالاتی، ریسنر و میندلین تئوری‌هایی برای ورق‌های نسبتاً ضخیم ارائه‌کردند. این تئوری‌ها علاوه بر کاربردی که در حل مسائل ورق‌های نسبتاً ضخیم دارند، اخیراً در حل مسائل ورق‌های نازک به روش اجزای محدود نیز به کار گرفته شده‌اند [۱].

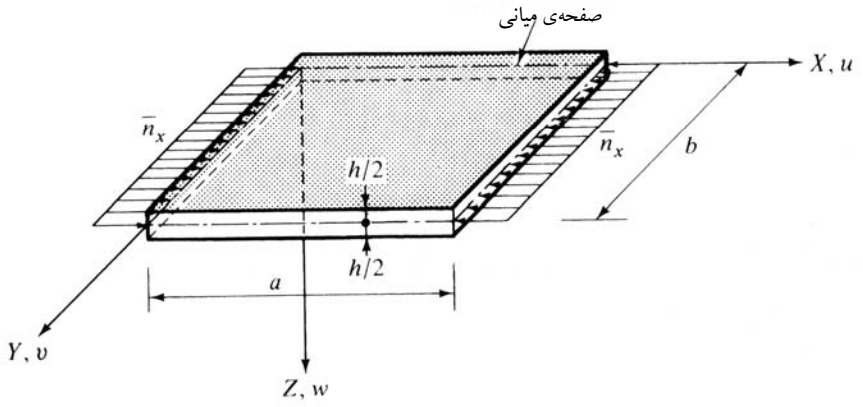
دسته‌بندی ورق‌ها ممکن است بر اساس مشخصات مکانیکی، یا جنس مواد تشکیل دهنده‌ی آن انجام بپذیرد. در این موارد تغییرات و اصلاحاتی در تئوری حاکم بر ورق پدید می‌آید. تئوری‌های حاکم بر رفتار ورق‌ها را نیز می‌توان با توجه به رابطه‌ی حاکم بین تنش و کرنش دسته‌بندی نمود. تئوری‌های الاستیک خطی مبتنی بر فرض وجود یک رابطه‌ی خطی بین تنش و کرنش هستند (قانون هوک) در حالی که در تئوری‌های الاستیک غیرخطی، پلاستیک و ویسکو الاستیک، روابط پیچیده‌تری بین تنش‌ها و کرنش‌ها حاکم است.

به دلیل تمرکز موضوع پایان‌نامه بر مسأله‌ی کمانش ورق‌ها، در ادامه‌ی این فصل در پی بررسی اجمالی مبحث کمانش، نگاهی نیز به روش‌های حل آن خواهیم داشت.

۱-۲- کمانش ورق

همان‌گونه که گفته شد، ورق‌ها اجزای سازه‌ای مسطح یا منحنی شکلی هستند که ضخامت آن‌ها در مقایسه با ابعاد

دیگرشان بسیار کوچک است. در برخی موارد، ورق‌ها برای انتقال نیروهای فشاری (شکل ۱-۲) و یا برشی داخل صفحه طراحی و ساخته می‌شوند. اگر مقدار این نیروها زیاد نباشد، ورق در حالت تعادل پایدار قرار می‌گیرد به این مفهوم که تغییر شکل‌های خارج از صفحه،w، در آن رخ نخواهد داد ($w=0, u\neq0, v\neq0$). با افزایش مقدار بارهای درون‌صفحه‌ای و همزمان با رسیدن آن‌ها به مقدار مشخصی بنام بارهای بحرانی[1]، علاوه بر تغییر شکل‌های داخل صفحه، به ناگاه تغییر شکل عمود بر صفحه نیز پدیدار گشته، ورق از حالت تعادل پایدار به حالت ناپایدار رسیده و اصطلاحاً پدیده‌ی کمانش رخ می‌دهد.

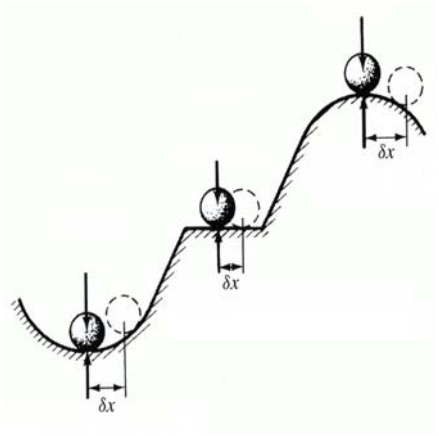


شکل ۱-۲ ورق مستطیلی تحت اثر بار لبه‌ای فشاری[۱]

اعمال بارهای بیش از بارهای بحرانی به ورق سبب ایجاد تغییر شکل‌های بزرگ خارج از صفحه در ورق شده و در نهایت، با افزایش بار، ورق گسیخته خواهد شد. به همین دلیل محاسبه‌ی هر چه دقیق‌تر بارهای بحرانی ورق‌ها همواره از دغدغه‌های ذهنی طراحان بوده‌است [۱].

مفهوم کمانش سازه‌ها را می‌توان با مثال ساده‌ای که شامل وضعیت‌های مختلف تعادل یک گوی (شکل ۱-۳) است بیان نمود. گوی نشان داده شده در حالت الف درون یک سطح مقعر واقع شده و در حالت تعادل پایدار است. در این حالت اگر با اعمال یک جابجایی کوچک δx تعادل گوی را بر هم زنیم، پس از چند نوسان به حالت اول خود برمی‌گردد. گوی نشان داده شده در حالت ب روی یک سطح صاف افقی قرار داشته و در حالت تعادل خنثی است. اعمال تغییر مکان کوچک δx در بر هم زدن وضعیت تعادل گوی و یا تغییر سطح انرژی آن، بی اثر است. گوی نشان داده شده در حالت ج روی یک سطح محدب قرار داشته و در حالت تعادل ناپایدار است. با ایجاد کوچک‌ترین اختلالی در این حالت، تعادل سیستم به طور کامل از بین می‌رود.

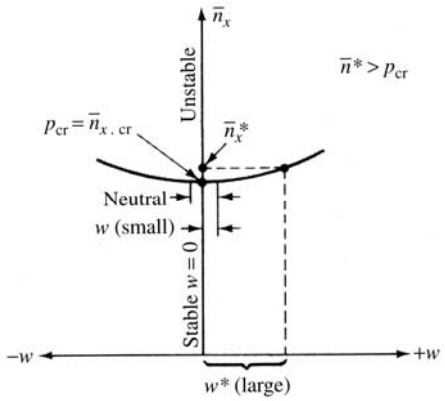
[1] Critical Loads



(الف) (ب) (ج)

شکل ۱-۳ حالات مختلف تعادل[۱]

نکته‌ی قابل توجه آن است که سازه در مسیر گذار از حالت تعادل پایدار به حالت تعادل ناپایدار، همواره حالت تعادل خنثی را تجربه می‌کند. این نکته یکی از مبانی همه‌ی فرمول‌بندی‌های ریاضی در تحلیل پایداری ورق‌ها است [۱]. در استخراج روابط مربوط به مسائل کمانش الاستیک ورق‌ها، از حالت تعادل پایدار به عنوان نقطه‌ی دوگانگی[1] تغییر شکل یاد شده است. هنگامی که ورق بار بحرانی را تجربه می‌کند، از میان دو مسیر ممکن برای ادامه‌ی تغییر شکل (که یکی از آن‌ها مربوط به حالت تعادل پایدار و دیگری مربوط به تعادل ناپایدار است)، ورق همواره مسیر منتهی به شکل کمانش یافته را انتخاب می‌کند (شکل ۱-۴). علاوه بر فرض وجود این نقطه‌ی دوگانگی در مسیر تعادل، فرض دیگری نیز مبنی بر حاکمیت رفتار الاستیک خطی وجود دارد.



شکل ۱-۴ نقطهٔ دوگانگی[۱]

[1] Bifurcation

افزون بر تئوری کلاسیک کمانش ورق‌ها، قدرت پس از کمانش[1] ورق‌های مسطح نیز همواره مورد توجه محققان بوده است. تحلیل این مسأله به علت ماهیت غیرخطی آن پیچیده‌تر است. همچنین نوع دیگری از رفتار کمانشی موسوم به Snap-through buckling در ورق‌های با انحنای کم که تحت تأثیر همزمان نیروهای فشاری درون صفحه و بارهای جانبی هستند ملاحظه شده است.

اولر را می‌توان نخستین کسی دانست که موفق به تحلیل مسأله‌ی کمانش شد. وی در سال ۱۷۴۴ با استفاده از روش تعادل خنثی تحلیل صحیحی از پایداری یک ستون ارائه داده و مودهای کمانش و ضرایب کمانش تحت این مودها را استخراج نمود. به همین سبب، در برخی مراجع به بار کمانشی ستون، بار اولر ستون نیز گفته می‌شود. کانسیدره و انگسر، در سال ۱۸۸۹ اولین تئوری اصلاحی برای کار اولر رامطرح نمودند و از آن پس تحقیقات زیادی برروی کمانش اعضای فشاری انجام گرفت [۲].

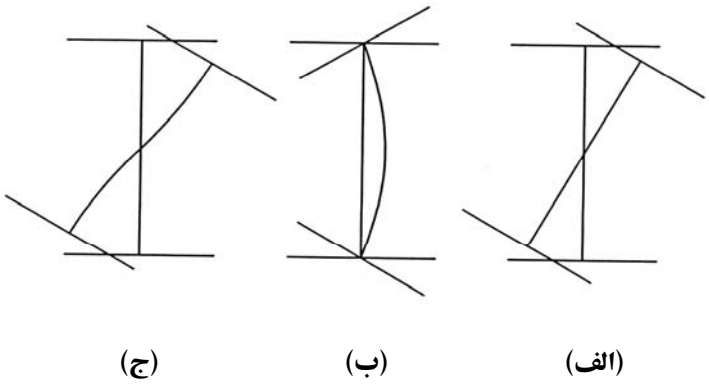
۱-۳- انواع کمانش

انواع تغییر شکل‌های ناشی از کمانش در سازه‌ها را می‌توان به سه دسته‌ی کمانش موضعی[2]، کمانش جانبی[3] و کمانش تغییر شکلی[4] تقسیم‌بندی نمود. در اعضای سازه‌ای ساخته شده از ورق، هر یک از سه نوع کمانش مذکور ممکن است رخ دهد.

کمانش جانبی معمولاً در تیرها و ستون‌ها رخ می‌دهد. اگر مقاومت مقطع در مقابل خمش جانبی کمتر از مقاومت خمشی آن در صفحه‌ی تقارن باشد، کمانش جانبی رخ می‌دهد [۳]. در این نوع کمانش، کل عضو بدون تغییر در شکل مقطع خود دچار کمانش پیچشی- جانبی شده، خطوط اتصال ورق‌ها از حالت مستقیم خارج و دچار انحناء می‌شوند (شکل ۱-۵ الف). درحالی‌که در کمانش موضعی، خطوط اتصال قبل و بعد از کمانش مستقیم هستند و ورق‌ها دچار کمانش می‌شوند (شکل ۱-۵ ب). چنانچه هر دو نوع کمانش مذکور اتفاق افتد، می‌گوئیم کمانش تغییر شکلی رخ داده است (شکل ۱-۵ ج). شکل ۱-۵ انواع مودهای کمانش برای یک مقطع I شکل را نشان می‌دهد.

---

[1] Post buckling
[2] Local Buckling
[3] Lateral Buckling
[4] Distortional Buckling



شکل ۱-۵ انواع کمانش

رفتار ورق‌ها در مودهای کمانش موضعی که موضوع بحث این پایان‌نامه است مؤید این نکته است که جابجایی‌های درون صفحه‌ای، معروف به جابجایی‌های غشایی، اثر قابل ملاحظه‌ای بر بارهای کمانشی ندارند [۴]. به همین دلیل در این پایان‌نامه به بررسی جابجایی‌های خارج از صفحه بسنده شده و اثر تغییر شکل‌های درون صفحه در نظر گرفته نمی‌شود.

۱-۴- تحلیل پدیده‌ی کمانش الاستیک در ورق‌ها

با حل شدن مسأله‌ی خمش صفحات توسط دانشمندانی چون ناویر و لوی در ده‌ی دوم قرن نوزدهم، تحلیل و بررسی حالات مختلف بارگذاری صفحات، بویژه حل مسأله‌ی کمانش یا بارگذاری داخل صفحه بیشتر مورد توجه محققین قرار گرفت. سنت و نانت در سال ۱۸۸۳ معادله‌ی دیفرانسیل ورق تحت اثر بارهای جانبی و بارهای واقع در صفحه‌ی میانی را ارائه داده و متعاقباً در سال ۱۸۹۱ برایان، با استفاده از سری‌های مضاعف فوریه و به کار بردن روش انرژی مسأله‌ی کمانش یک ورق مستطیلی روی تکیه‌گاه‌های مفصلی تحت اثر نیروی فشاری تک محوری را حل نمود که نخستین راه حل مسأله‌ی کمانش صفحات قلمداد می‌شود [۴].

بررسی مسأله‌ی کمانش صفحات در طراحی سازه‌های ساخته شده از ورق، همواره از مهم‌ترین مسائل مورد توجه طراحان بوده‌است چراکه در طراحی سازه‌های ساخته‌شده از مقاطع نازک مثل ورق‌ها، باید هر دو معیار پایداری و مقاومت به کار رود. برای محاسبه‌ی بارهای بحرانی ورق باید معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بررفتار کمانش آن حل شود. در فصل بعد این معادله‌ی دیفرانسیل برای مواد ایزوتروپیک استخراج خواهد شد:

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)+N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=0 \qquad (۱-۱)$$

که در این رابطه D صلبیت خمشی ورق است و برای ورق با ضخامت ثابت از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$D = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} \qquad (۲-۱)$$

که در آن t ضخامت ورق، E مدول الاستیسیته و ν ضریب پواسون است. همچنین w تغییر مکان راستای قائم ورق، N_x بار فشاری در راستای x ، N_y بار فشاری در راستای y و N_{xy} بار برشی می‌باشند [۱].

این معادله در حالت کلی در بر دارنده‌ی بارگذاری در هر دو جهت طولی و عرضی و بارگذاری برشی است. در صورتی که مسأله فقط برای یکی از این حالات حل شود، با تبدیل مسأله به یک مسأله‌ی مقدار ویژه، مقادیر بار بحرانی تعیین می‌شود. ولی در شرایطی که دو یا سه بارگذاری همزمان به ورق اعمال شود، باید جهت محاسبه‌ی بار بحرانی یکی از تنش‌ها را مبنا قرار داد و سایر تنش‌ها را به صورت ضرایبی از آن در نظر گرفت.

معادله‌ی دیفرانسیل بالا برای مواد ایزوتروپیک کاربرد دارد و برای مواد ارتوتروپیک باید از معادله‌ی (۱-۳) که توسط ویتریک در سال ۱۹۸۷ ارائه شد استفاده کرد [۵]:

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{13}\frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2D_{12}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{33}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{23}\frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \qquad (۳-۱)$$

مقادیر D_{ij} در رابطه‌ی بالا تابع مشخصات ماده‌ی تشکیل دهنده‌ی ورق می‌باشند. (برای اطلاع بیشتر به مرجع [۵] رجوع شود). در سال‌های نخست، دانشمندان از روش‌های تحلیلی برای حل معادلات فوق بهره می‌جستند. آن‌ها سعی در یافتن جواب دقیق معادله‌ی دیفرانسیل ورق به کمک سری‌های فوریه داشتند. ولی با افزایش کاربرد ورق‌ها در صنعت، مسائل متنوعی در پایداری و خمش صفحات به وجود آمد. تنوع بارگذاری روی صفحات، یا وجود شرایط مرزی گوناگون (نظیر لبه‌های آزاد، گیردار و یا لبه‌های بطور نسبی مقاوم در برابر دوران) در کنار استفاده از صفحات با اشکال هندسی مختلف از مهم‌ترین این مسائل به شمار می‌رفت.

در برخی موارد، پژوهشگران موفق به یافتن جواب‌های دقیق معادله‌ی دیفرانسیل حاکم برمسأله می‌شدند، لیکن مشکلات محاسباتی نظیر همگرایی کند سری‌ها و یا پیچیدگی معادلات، سبب رویکرد محققین به استفاده از روش‌های تقریبی به جای روش‌های تحلیلی (حل بسته) در حل مسائل صفحات شد. از جمله روش‌های مهم تقریبی می‌توان به روش انرژی تیموشنکو [۶]، روش ریلی- ریتز[1] [۷] و روش گالرکین [۸] اشاره نمود. دو روش اول مبتنی براصل بقای انرژی و پایستگی انرژی پتانسیل کل بوده و از جمله روش‌های انرژی به شمار می‌آیند. روش گالرکین از

[1] Rayleigh- Ritz

جمله روش‌های وزنی است که به طور کلی برای حل تقریبی معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم‌های پیوسته به کار می‌رود. با به‌کارگیری این روش سعادت‌پور و همکاران [۹] در سال ۱۹۹۸ کمانش موضعی ارتجاعی ورق‌های چهارضلعی با اشکال هندسی مختلف همراه با تکیه‌گاه‌های میانی را، تحت اثر بارهای درون‌صفحه‌ای بررسی نمودند.

پیشرفت کامپیوترها، تحولی بنیادی در روش‌های تحلیل سازه‌ها از جمله حل پایداری ورق‌ها ایجاد کرد و کلیه‌ی روش‌های عددی حل سازه که به صورت محض بحث می‌شد به ابزار اساسی تحلیل سازه‌ها تبدیل شدند. بسیاری از محققین از جمله گالاکر و پدلاگ [۱۰] در سال ۱۹۶۳، والاس، مارتین، کاپر و هارتز در سال ۱۹۶۶ و گالاکر و پرزمینسکی در سال ۱۹۶۸ روش قدرتمند اجزای محدود را برای تحلیل پایداری ورق‌ها به‌کار بردند. به گونه‌ای که تا اواخر دهه‌ی شصت میلادی روش‌های اجزای محدود، برای تحلیل کمانش کاملاً فرموله شده بود. تحقیقات بعدی که با استفاده از روش‌های المان محدود برای آنالیز عددی کمانش ورق‌ها انجام شد در واقع حاصل تلاش پژوهشگرانی چون گالاگر [۱۱]، پرزمینیسکی [۱۲] و زینکویچ و همکارانش [۱۳] بوده‌است.

اگرچه روش اجزای محدود به عنوان یکی از ابزارهای بسیار قدرتمند و کارآمد در تحلیل سازه‌ها شناخته شده‌است ولی استفاده از این روش درتحلیل کمانش سازه‌ها، حتی برای سازه‌های با شرایط مرزی ساده نیز احتیاج به حافظه‌ی زیاد کامپیوتر داشته و مستلزم صرف زمان زیادی است. افزایش حجم محاسبات و در پی آن، افزایش احتمال ایجاد خطاهای محاسباتی سبب مشکل بودن استفاده از این روش در بسیاری از موارد می‌شود. این مسأله به‌ویژه برای تحلیل سه بعدی و مسائل پایداری صادق است. لذا احتیاج به روشی که ضمن کاهش محاسبات کامپیوتری، تا حدی قابلیت‌های روش اجزای محدود را دارا باشد، به خوبی احساس می‌شد.

با توسعه‌ی روش نوار محدود که تعدیل‌یافته‌ی روش اجزای محدود است، این نیازها برطرف شده‌است. در جدول ۱-۱، دو روش اجزای محدود و نوار محدود به طور خلاصه با هم مقایسه شده‌اند.

معمولاً سعی می‌شود روش نوار محدود برای سازه‌هایی استفاده شود که طول آن‌ها حداقل در یک جهت ثابت باشد. در این روش، سازه به نوارهایی تقسیم می‌شود که لبه‌های انتهایی آن‌ها منطبق بر مرز سازه است. نوارها به وسیله‌ی خطوط گرهی که موازی با مرزهای طولی هستند در امتداد طول به یکدیگر متصل می‌شوند. در برخی حالات نیز ممکن است از خطوط گره‌ای داخلی برای رسیدن به یک نوار با مرتبه‌ی بالاتر استفاده شود. در این روش که می‌توان آن را نوعی اجزای محدود ساده شده هم نامید در جهت طولی نوارها، تابع جابجایی با توابع خاصی که به توابع پایه معروفند حدس زده شده و پس از تشکیل معادلات، انتگرال‌ها روی جهت طولی گرفته شده و معمولاً تنها درجات آزادی در جهت عرضی باقی می‌مانند. این کار سبب کاهش قابل توجه محاسبات کامپیوتری شده و سرعت پردازش داده‌ها را افزایش می‌دهد. در جهت عرضی هم برای درونیابی میدان جابجایی عمود بر صفحه (w)، معمولاً از توابع

چندجمله‌ای استفاده می‌شود. این توابع معمولاً به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که بتوانند حداقل مشتقات مورد نیاز را ارضا کنند. در اغلب موارد توابع چندجمله‌ای هرمیتی به خصوص برای صفحات مناسب هستند. با انتخاب این توابع انتگرال‌گیری از آن‌ها بسیار ساده شده که خود، سبب افزایش سرعت و دقت محاسبات می‌شود. در فصل بعد توضیحات کامل‌تری در این زمینه ارائه خواهدشد.

جدول ۱-۱- مقایسه‌ی روش اجزای محدود و نوار محدود

نوار محدود	اجزای محدود
معمولاً سعی می‌شود روش نوار محدود برای سازه‌هایی استفاده شود که طول آن‌ها حداقل در یک جهت ثابت باشد. برای تحلیل دینامیکی برای هر نوع شرایط مرزی استفاده می‌شود به شرطی که تکیه‌گاه منفصل نداشته باشند.	برای هر نوع شرایط هندسی و مرزی و هر نوع تغییرات در ساختار مواد سازنده کاربرد دارد.
در بیشتر مسائل تعداد معادلات و درجات آزادی کمتری نیاز دارد. پهنای نوار ماتریس کوچک است و در نتیجه زمان لازم برای انجام محاسبات کمتر است.	تعداد معادلات و درجات آزادی مورد نیاز بسیار زیاد است و پهنای نوار ماتریس هم بزرگ است و در نتیجه زمان و هزینه‌ی زیادی برای انجام محاسبات لازم است.
حجم داده‌ها بسیار کمتر است و با توجه به نواربندی منظم داده‌ها می‌توانند نظم مناسبی داشته باشند.	حجم داده‌ها زیاد است و امکان اشتباه زیادتر می‌شود. همچنین به برنامه‌ایی برای تولید مش نیاز است.
حجم خروجی‌ها نیز کمتر است. زیرا تعداد درجات آزادی کمتر است، پس اطلاعات مربوط به مقادیر جابجایی و تنش نیز در این درجات آزادی کمتر است.	حجم خروجی‌ها بیشتر است. زیرا تعداد درجات آزادی و المان‌ها بیشتر است. همچنین در لبه‌های المان‌ها، در بیشتر موارد شرط تساوی تنش‌ها ارضا نمی‌شود و نیاز به تصحیح آن‌ها می‌باشد.
در نتیجه حافظه‌ی کامپیوتری کمتری نیاز است و برنامه نویسی نیز ساده‌تر خواهد بود. در مسائل مقادیر ویژه هم به کمک روش‌های معمول قابل حل هستند.	درنتیجه حافظه‌ی کامپیوتری زیادی لازم است و برنامه نویسی آن هم مشکل‌تر است. در مسائل مقادیر ویژه هم اکثراً به تکنیک‌های پیشرفته‌ای برای حل مسأله نیاز است.

در چهل سال اخیر، بسیاری از پژوهشگران انواع روش‌های نوار محدود را در بررسی کمانش موضعی ورق‌های مختلف به‌کار برده‌اند. نکته‌ی مهم این است که برای حل هر مسأله‌ی به خصوص یکی از این روش‌ها مناسب‌تر از بقیه است.

انواع روش‌های نوار محدود که در حل مسائل کمانش ورق‌ها به کار می‌روند عبارتند از:

۱- روش نوار محدود معمولی[1]

[1] Ordinary Finite Strip Method