بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه بین المللی امام خمینی

IMAM KHOMEINI
INTERNATIONAL UNIVERSITY

وزارت علوم تحقیقات و فناوری
دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)
علوم پایه

سرشت نمایی جبری جبرهای اندازه

نگارش:
پگاه علی زاده
استاد راهنما:
آقای دکتر عزیزا... عزیزی
استاد مشاور:
آقای دکتر رضا میرزایی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض (آنالیز هارمونیک)

آذر ماه ۸۷

تقدیم به :

پدرم که اولین درس زیستن را به من آموخت ،
مادرم که همیشه و در همهء مراحل دلسوز من بوده است و

خانم کبری نکوزاد دریای بی کران محبت.

بسمه تعالی

دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)

جلسه دفاع از پایان نامه خانم پگاه علی زاده دانشجوی مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی – آنالیز هارمونیک در مورخ ۸۷/۹/۱۲ تحت عنوان « سرشت نمایی جبری جبرهای اندازه » در دانشگاه تشکیل گردید و مورد تأیید نهایی هیأت داوران قرار گرفت .

هیأت داوران :

۱- استاد راهنما:

آقای دکتر عزیزا... عزیزی

امضاء

۲- استاد مشاور:

آقای دکتر رضا میرزایی

امضاء

۳- عضو هیأت علمی به عنوان داور خارجی:

آقای دکتر محمد موسایی

امضاء

۴- عضو هیأت علمی به عنوان داور داخلی:

آقای دکتر عبدالرحمن رازانی

امضاء

۵- نماینده تحصیلات تکمیلی:

آقای دکتر شیرویه پیروی

امضاء

اداره تحصیلات تکمیلی حوزه آموزشی دانشگاه بین المللی امام خمینی

سپاس و قدردانی

اکنون که به یاری خداوند متعال کار تدوین این پایان نامه به پایان رسیده است، بدین وسیله از اساتید بزرگوار، فرزانه، دلسوز و فرهیخته به ویژه استاد راهنمایم جناب آقای دکتر عزیزا... عزیزی که در تهیه این رساله کمک شایانی به من کرده و از هیچ حمایت و مساعدتی دریغ ننموده اند، کمال تشکر را دارم. همچنین از استاد مشاورم جناب آقای دکتر رضا میرزایی که از راهنمایی ها و مشاوره های ایشان بهره برده ام،
تشکر و قدردانی می نمایم و از خداوند متعال صحت، سلامت و موفقیت این اساتید بزرگوار در تمام مراحل زندگیشان را خواستارم.
همچنین از اساتید و عزیزانی که در طی مدت تحصیل مشوق و هادی اینجانب بوده اند کمال تشکر را دارم.

پگاه علی زاده

چکیده

در این پایان نامه شرایط لازم و کافی برای وجود اندازهٔ جمعی شمارا روی $\sigma-$ جبر بول B را ارائه می دهیم .

برای مثال $\sigma-$ جبر بول B یک جبر اندازه است اگر و فقط اگر $B-\{0\}$ اجتماع دسته ای از مجموعه های $C_1 \subset C_2 \subset \ldots$ باشد به گونه ای که برای هر n :

(۱) هر پادزنجیر در C_n حداکثر $k(n)$ عضو داشته باشد ($k(n)$ یک عدد صحیح است)

(۲) اگر $\{a_n\}_n$ یک دنباله با این ویژگی باشد که برای هر n ، $a_n \notin C_n$ آنگاه $\lim_n a_n = 0$ و

(۳) برای هر k ، اگر $\{a_n\}_n$ دنباله ای باشد که $\lim_n a_n = 0$ ، آنگاه احتمالاً برای همهٔ n ها ، $a_n \notin C_k$.

زنجیر $\{C_n\}$ اساساً یکتاست .

کلید واژه : جبر بول ،جبر اندازه ،جبر ماهارام .

ماخذ اصلی این پایان نامه ، مقالهٔ زیر است :

"T.Jech,Algebraic Characterizations of Measure Algebras,Amer.Math.Soc.,136:1285 -1294,2008."

فهرست مندرجات

مقدمه

در این پایان نامه ، جبرهای اندازه و جبرهای ماهارام را مورد بررسی قرار می دهیم و این جبرها را از نظر جبری سرشت نمایی می کنیم . در واقع منظور از سرشت نماییِ جبری ، بررسی و بیان ویژگی ها و خصوصیت هايِ جبری این جبرها می باشد .

در فصل اول این پایان نامه ، تعاریف و قضایای مقدماتی مورد نیاز برای بیان این خصوصیت ها گفته می شوند .

در بخش اول از این فصل ، تعاریف مقدماتی و تعدادی از لم های مورد نیاز مطرح شده است .

در بخش دوم صورت های مختلف و مورد نیازِ به طور ضعیف توزیع پذیر بودن روی جبر های اندازه بیان شده است .

در بخش سوم نشان داده ایم که جبرهای اندازه و جبرهای ماهارام دارای ویژگی به طور ضعیف توزیع پذیری و شرط زنجیر شمارش پذیر می باشند و همینطور ، ویژگی های دیگر مربوط به این جبرها از جمله فراگیر بودن و متمرکز شدگی مورد بررسی قرار گرفته است .

در ضمن در این بخش یکی از اساسی ترین قضایا به نام قضیه کالتن رابرتس بیان شده است که این قضیه لزوم وجود اندازهٔ جمعی متناهی را بیان می کند .

در بخش چهارم ، دومین قضیه اساسی این پایان نامه به نام بالکار جک پازاک بیان و اثبات شده است . در این بخش تعاریف و قضایای مقدماتی برای اثبات این قضیه مطرح شده است ، توجه داشته باشید که این قضیه در فضای توپولوژیک دنباله ای اثبات شده است . قضیه بالکار جک پازاک ، شرایط لازم برای وجود جبر اندازه را از دیدگاهی خاص بررسی می کند .

در فصل دوم ، خصوصیات جبريِ جبرهای اندازه ، به صورت ویژه بیان شده است ، که این خصوصیات از مهمترین نتایج این پایان نامه می باشند .

در بخش اول ، قضایای ابتدایی برای بیان چنین ویژگی هایی مطرح شده است . در این بخش ویژگی های مربوط به $\sigma-$ جبر بول B با اعمال شرایطی خاص از جمله ، توزیع پذیری

فهرست مندرجات

ضعیف ، متمرکز شدگی ، شرط زنجیر شمارش پذیر و ... بیان شده است ، که در بخش دوم از آنها استفاده شده است .

در بخش دوم که اساس این پایان نامه می باشد نشان داده ایم که تحت شرایطی خاص ، چگونه یک σ — جبر بول دارای جبر اندازه می باشد .

در فصل سوم نتیجه گیری پایان نامه بیان شده است .

در بخش اول شرط زنجیر σ — کراندار و شرط زنجیر σ — متناهی تعریف شده است و لزوم وجود اندازهٔ جمعی متناهی در قضیه ای از این بخش مطرح شده است .

همینطور درخت ساسلین و جبر کوهن به عنوان مثال هایی برای قابل فهم تر کردن مسائل مربوط به این پایان نامه مطرح شده اند . در آخر بعضی از تعاریف قبلی با اصطلاح واداشتگی مطرح شده اند و وجود جبر اندازه در اصطلاح واداشتگی تحت قضیه ای مطرح شده است .

لازم به ذکر است در این پایان نامه شماره فصل ، قضیه یا تعریف از راست به چپ نوشته شده است . به عنوان مثال منظور از قضیه (۷.۱) قضیه هفتم از فصل اول می باشد ، همینطور در ارجاع به مراجع از علامت کروشه [ ] استفاده شده است .

فصل ۱

آشنایی باجبرهاو اندازه ها

۱—۱ تعاریف و قضایای مقدماتی

تذکر ۱.۱ : در این مقاله نماد ω بر اولین کاردینال شمارش پذیر دلالت می کند که همان مجموعهٔ اعداد صحیح غیر منفی می با شد و ω_1 بر اولین کاردینال شمارش ناپذیر دلالت می کند که همان مجموعهٔ اعداد حقیقی می باشد.

تعریف ۲.۱ : یک دستهٔ B از زیرمجموعه‌های X رایک جبر مجموعه‌ها می‌گوییم هرگاه:

(۱) برای هر $a, b \in B$ ، $a \cup b \in B$ ،

(۲) برای هر $a \in B$ ، $a^c \in B$ ،

(۳) برای هر $a, b \in B$ ، $a \cap b \in B$.

مثلاً برای هر مجموعهٔ X ، P(X) یک جبر مجموعه ها می باشد .

تبصره ۳.۱ : اگر یک دستهٔ B از زیر مجموعه های X دارای شرط (۱) و (۲) باشند آنگاه بنابر قانون های دمورگان B شرط (۳) را نیز داراست بنابراین یک جبر می باشد.

تبصره ۴.۱ : اگر $a_1, \ldots, a_n \in B$ ، با تشکیل اجتماع دو به دوی این مجموعه‌ها ملاحظه می شود که $a_1 \cup \ldots \cup a_n \in B$ و همینطور $a_1 \cap \ldots \cap a_n \in B$.

تعریف ۵.۱ جبر B از زیر مجموعه های مجموعهٔ غیر تهی X همراه با عملگرهای بول $a \cup b$ ، $a \cap b$ ، $-a = X - a$ و عناصر صفر $\emptyset = \mathbf{0}$ و واحد(یکه) $X = \mathbf{1}$ یک جبر بول نامیده می شود .

مثلاً برای مجموعهٔ دلخواه X ، $(P(X), \cup, \cap, -, \emptyset, X)$ یک جبر بول می باشد .

تعریف ۶.۱ : فرض کنید $\Re$ یک رابطه روی مجموعهٔ X باشد . $\Re$ را ترتیب جزیی گوییم اگر در شرایط زیر صدق کند:

(۱) برای هر $x \in X$ ، $(x, x) \in \Re$ ،

(۲) برای هر $x, y \in X$ ، اگر $(x, y), (y, x) \in \Re$ آنگاه $x = y$ ،

(۳) برای هر $x, y, z \in X$ ، اگر $(x, y), (y, z) \in \Re$ آنگاه $(x, z) \in \Re$.

برای مثال $\subseteq$ یک رابطهٔ ترتیب جزیی می باشد .

تذکر ۷.۱ : به صورت متداول در این مقاله از نماد $x \subseteq y$ به جای $(x, y) \in \Re$ استفاده می شود .

تعریف ۸.۱ : جبر بول B ، σ-جبر بول نامیده می شود هر گاه هر مجموعهٔ شمارش پذیر $A \subset B$ ، در ترتیب جزیی B تحت شمول ، سوپریمم $\sup A = \vee A$ (و اینفیمم $\inf A = \wedge A$)

داشته باشد .

فرض کنید S یک زیرمجموعه از $B-\{0\}$ باشد ،

عنصر a در S را کران بالا گوییم هر گاه برای هر $s \in S$ ، $s \subseteq a$ باشد .

عنصر b در S را کران پایین گوییم هر گاه برای هر $s \in S$ ، $b \subseteq s$ باشد .

حال فرض کنید S دارای کران بالا و کران پایین باشد .

کران بالای d از S را سوپریمم گوییم اگر برای هر کران بالای دیگر مانند a از S داشته باشیم $d \subseteq a$.

کران پایین c از S را اینفیمم گوییم اگر برای هر کران پایین دیگر مانند b از S داشته باشیم $b \subseteq c$

تعریف ۹.۱ : یک اندازه(به صورت دقیق تر،اندازه احتمال σ — جمعی) روی σ — جبر بول B یک تابع حقیقی مقدار m روی B است به گونه ای که :

(۱) $m(0)=\circ$ و برای هر $a \neq 0$ ، $m(a)>\circ$ و $m(1)=۱$ ،

(۲) اگر $a \subset b$ آنگاه $m(a) \leq m(b)$ ،

(۳) هنگامی که a_n ها دو به دو مجزا باشند داشته باشیم $m(\vee_{n=۱}^{\infty} a_n)=\Sigma_{n=۱}^{\infty} m(a_n)$ که این خاصیت را خاصیت σ — جمعی می گویند.

تعریف ۱۰.۱ : جبر اندازه، یک σ — جبر بول است که دارای اندازه باشد.

لم ۱۱.۱ :[p.234,14.28][14] فرض کنید B یک جبر اندازه و m یک اندازه روی B باشد اگر $(a_n)_{n\in \mathbb{N}}$ و a,b عناصری از B باشند داریم :

(۱) اگر $a_۱,\dots a_k$ دو به دو مجزا باشند ، $m(a_۱ \cup \dots \cup a_k)=m(a_۱)+\dots+m(a_k)$ ،

(۲) اگر $a \subseteq b$ آنگاه $m(a) \leq m(b)$ و $m(b-a)=m(b)-m(a)$ ،

(۳) اگر $a \subset b$ آنگاه $m(a)<m(b)$ ،

(۴) $m(\vee_{i=۱}^{\infty} a_i) \leq \Sigma_{i=۱}^{\infty} m(a_i)$ ،

(۵) برای هر عدد حقیقی $\epsilon > \circ$، $k \in \mathbb{N}$ وجود دارد به گونه ای که:

$$m(\cup_{n=1}^{\infty} a_n) - m(a_1 \cup \ldots \cup a_{k-1}) < \epsilon$$

برهان:

(۱) از خاصیت (۴) در تعریف (۹.۱) هر گاه برای $n > k$ قرار دهیم $a_n = 0$ به دست می آید.

(۲) فرض کنید $a \subseteq b$، می دانیم $a, b-a$ مجزا هستند از طرفی $b = a \cup (b-a)$ آنگاه طبق (۱)

$$m(b) = m(a \cup (b-a)) = m(a) + m(b-a) \Rightarrow m(b-a) = m(b) - m(a)$$

در نتیجه داریم $m(b) = m(b-a) + m(a)$ لذا $m(a) \leq m(b)$ (چون طبق تعریف ۹.۱(۱) $m(b-a) \geq \circ$).

(۳) نتیجه ای از قسمت (۲) می باشد چون $a \subset b$ لذا $b - a > 0$، طبق ۹.۱(۱) داریم $m(b-a) > \circ$ آنگاه $m(a) < m(b)$.

برای اثبات قسمت های (۴) و (۵) گیریم:

$$b_n = a_n - \bigcup_{i<n} a_i \Rightarrow b_n \subseteq a_n \Rightarrow m(b_n) \leq m(a_n)$$

b_n ها دو به دو مجزا هستند و همچنین $b_\circ \cup \ldots \cup b_n = a_\circ \cup \ldots \cup a_n$ لذا برای قسمت (۴) داریم:

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} a_n) = m(\bigcup_{n=1}^{\infty} b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(b_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(a_n)$$

در (۵) $k \in \mathbb{N}$ را به اندازه ای بزرگ انتخاب می کنیم که :

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(b_n) - \sum_{n<k} m(b_n) < \epsilon \qquad \text{(a)}$$

آنگاه با توجه به تسا وی های زیر :

$$m(\bigcup_{n<k} a_n) = m(\bigcup_{n<k} b_n) \quad , \quad m(\bigcup_{n=1}^{\infty} a_n) = m(\bigcup_{n=1}^{\infty} b_n)$$

می توانیم بنویسیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(b_n) - \sum_{n<k} m(b_n) = m(\bigcup_{n=1}^{\infty} b_n) - m(\bigcup_{n<k} b_n) = m(\bigcup_{n=1}^{\infty} a_n) - m(\bigcup_{n<k} a_n)$$

که با توجه به رابطهٔ (a) داریم:

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} a_n) - m(\bigcup_{n<k} a_n) < \epsilon$$

تذکر ۱۲.۱ : هر گاه B یک جبر بول باشد ، $B^+ = B - \{0\}$ تعریف می شود.

تعریف ۱۳.۱ : مجموعهٔ $A \subset B^+$ یک پادزنجیر است اگر برای هر دو عضو متمایز $a, b \in A$ داشته باشیم $a \cap b = \mathbf{0}$.

تعریف ۱۴.۱ : پادزنجیر ماکزیمال W ،یک پادزنجیر است ،اگر $\vee W = \mathbf{1}$.

مثال ۱۵.۱ : افراز W (از $\mathbf{1}$) یک پادزنجیر ماکزیمال است .

تعریف ۱۶.۱ : B در شرط زنجیر شمارش پذیر صدق می کند هر گاه پادزنجیر شمارش ناپذیر نداشته باشد .

تعریف ۱۷.۱ B به طور ضعیف توزیع پذیر می باشد اگر برای هر دنبالهٔ $\{W_n\}_n$ از افرازها ، افرازی مانند W وجود داشته باشد به طوری که هر $a \in W$ تنها با تعداد متناهی از عناصر هر W_n اشتراک داشته باشد.

تعریف ۱۸.۱ : اگر $\{a_n\}_n$ دنباله ای در σ — جبر بول B باشد آنگاه :

$$\liminf_n a_n = \vee_{n=1}^{\infty} \wedge_{k=n}^{\infty} a_k \text{ و } \limsup_n a_n = \wedge_{n=1}^{\infty} \vee_{k=n}^{\infty} a_k$$

و اگر $\limsup_n a_n = \liminf_n a_n = a$ باشد آنگاه a حد دنباله $\{a_n\}_n$ می باشد و به صورت $\lim_n a_n = a$ $(a_n \to a)$ نشان داده می شود .

تبصره ۱۹.۱ [p.62,2.2][1]: ویژگی های اساسی ، $\to$ در زیر خلاصه شده است :

(۱) هر دنباله حداکثر یک حد دارد،

(۲) برای هر دنبالهٔ ثابت $< x : n \in \mathbb{N} >$ داریم $< x : n \in \mathbb{N} > \to x$ ،

(۳) $x_n \to 0$ اگر و تنها اگر $\limsup_n x_n = 0$ ،

(۴) اگر x_n ها دو به دو مجزا باشند آنگاه $x_n \to 0$ ،

(۵) $\limsup_n (x_n \vee y_n) = \limsup_n x_n \vee \limsup_n y_n$ ،

(٦) اگر $x_n \to x$ و $y_n \to y$ آنگاه $x_n \vee y_n \to x \vee y$ و $-x_n \to -x$ ،

(۷) اگر $< x_n >_n$ یک دنبالهٔ صعودی باشد آنگاه $x_n \to \vee_{i=1}^{\infty} x_n$.

تعریف ۲۰.۱ : σ — جبر بول B به طور یکنواخت توزیع پذیر ضعیف می باشد اگر دنباله ای از توابع $\{F_n\}_n$ وجود داشته باشد به گونه ای که برای هر افراز W ، $F_n(W)$ یک زیر مجموعهٔ متناهی از W باشد و اگر $\{W_n\}_n$ دنباله‌ای از افرازهای شمارش پذیر باشد آنگاه $\lim \bigcup_n F_n(W_n) = \mathbf{1}$.

تعریف ۲۱.۱ : گوییم c_n به سمت بالا بسته می باشد هر گاه، اگر $a \subset b$ و $a \in c_n$ آنگاه $b \in c_n$.

تعریف ۲۲.۱ : گوییم c_n به سمت پایین بسته می باشد هر گاه، اگر $a \subset b$ و $b \in c_n$ آنگاه $a \in c_n$.

تعریف ۲۳.۱ : فرض کنید B یک σ — جبر بول باشد. B متمرکز شده می باشد اگر برای هر دنبالهٔ $\{A_n\}_n$ از پادرنجیرهای متناهی که $|A_n| \geq 2^n$ ، $a_n \in A_n$ وجود داشته باشد به گونه ای که $\lim_n a_n = \mathbf{0}$.

تعریف ۲۴.۱ : σ — جبر بول B به طور یکنواخت متمرکز شده می باشد اگر تابع F وجود داشته باشد به گونه ای که برای هر پادرنجیر متناهی A ، $F(A)$ عضوی از A باشد و اگر $\{A_n\}_n$ دنباله ای از پادرنجیرهای متناهی باشد با این ویژگی که $|A_n| \geq 2^n$ آنگاه $\lim F(A_n) = \mathbf{0}$.

تعریف ۲۵.۱ : یک زیر اندازه (اکیداً مثبت) روی جبر بول B یک تابع حقیقی مقدار m روی B می باشد به گونه ای که:

(۱) برای هر $a \neq \mathbf{0}$ ، $m(a) > 0$ و $m(\mathbf{0}) = 0$ و $m(\mathbf{1}) = 1$ ،

(۲) اگر $a \subset b$ آنگاه $m(a) \leq m(b)$ ،

(۳) $m(a \cup b) \leq m(a) + m(b)$ ،

یک زیر اندازهٔ ماهارام روی یک σ — جبر بول یک زیراندازه است که پیوسته باشد یعنی:

(۴) اگر $\{a_n\}_n$ یک دنبالهٔ نزولی در B باشد که $\bigwedge_{n=1}^{\infty} a_n = \mathbf{0}$ آنگاه $\lim_n m(a_n) = 0$.

تبصره ۲۶.۱ : جبر ماهارام، یک σ — جبر بول است که دارای زیر اندازهٔ ماهارام باشد.

تعریف ۲۷.۱ : یک اندازهٔ جمعی متناهی روی جبر بول یک تابع m می باشد که در شرایط زیر صدق کند:

(۱) $m(\mathbf{0}) = 0$ و برای هر $a \neq \mathbf{0}$ ، $m(a) > 0$ و $m(\mathbf{1}) = 1$ ،

(۲) اگر $a \subset b$ آنگاه $m(a) \leq m(b)$ ،

(۳) هر گاه $a \cap b = \mathbf{0}$ ، آنگاه $m(a \cup b) = m(a) + m(b)$.

تعریف ۲۸.۱ : زیر اندازهٔ m روی جبر بول B فراگیر می باشد اگر برای هر پادزنجیر نامتناهی $A = \{a_n : n = ۱, ۲, ۳ \ldots\}$ داشته باشیم $\lim_n m(a_n) = ۰$.

تعریف ۲۹.۱ : زیر اندازهٔ m روی جبر بول B به طور یکنواخت فراگیر می باشد اگر برای هر $\epsilon > ۰$ ، $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که دنباله ای از n عنصر مجزای $a_۱, \ldots a_n \in B$ وجود نداشته باشد که در آن $i = ۱, \ldots, n$ ، $m(a_i) \geq \epsilon$.

تعریف دیگری برای به طور یکنواخت فراگیر وجود دارد که معادل تعریف ۳۰.۱ می باشد.

تذکر ۳۰.۱ : m به طور یکنواخت فراگیر است هر گاه برای هر $\epsilon > ۰$ ، $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که برای هر n ، مجموعه های مجزای $a_۱, \ldots, a_n$ را داشته باشیم به گونه ای که $\min_{۱ \leq i \leq n} m(a_i) \leq \epsilon$

تعریف ۳۱.۱ : یک جبر B از مجموعه ها یک جبر کامل از مجموعه ها می باشد هر گاه برای هر $M \subseteq B$ داشته باشیم $\cap M \in B$ و $\cup M \in B$.

(به تعریف ۸.۱ توجه نمایید ، مشابه همین تعریف می باشد)

تذکر ۳۲.۱ : هر جبر مجموعهٔ توانی S (همهٔ زیر مجموعه های مجموعهٔ S که با $P(S)$ نشان داده می شود) یک جبر کامل از مجمو عه ها می باشد .

تعریف ۳۳.۱ : زیر مجموعهٔ A از جبر بول B ، یک زیر جبر[1] می باشد ، هر گاه A شامل $\mathbf{0}$ و $\mathbf{1}$ باشد و تحت اعمال $\cup$ ، $\cap$ و $-$ بسته باشد .

تذکر ۳۴.۱ : در این پایان نامه هر گاه $a, b \in B$ باشد منظور از $a+b$ همان $a \cup b$ و $a.b$ همان $a \cap b$ و $a \leq b$ همان $a \subseteq b$ و $a < b$ همان $a \subset b$ می باشد .

[1] subalgebra

تبصره ۳۵.۱ : (خاصیت جمع پذیری) فرض کنید A, B دو زیر مجموعهٔ ناتهی $\mathbb{R}$ باشند و C مجموعهٔ

$$C = \{x + y | x \in A, y \in B\}$$

باشد . هر گاه A, B هر دو sup (inf) داشته باشند آنگاه C نیز sup (inf) دارد و $\sup C = \sup A + \sup B \quad (\inf C = \inf A + \inf B)$

۱—۲ به طور ضعیف توزیع پذیری

در این بخش با اعمال شرایطی ، تعریف های معادل با به طور ضعیف توزیع پذیر بودن را با توجه به تعریف ۱۷.۱ ارائه می دهیم . ضمن اینکه قانون توزیع پذیری ضعیف حالت ضعیف تری از قانون توزیع پذیری میباشد که اولین بار در یک سخنرانی در سال ۱۹۳۲ توسط وان نیومن[۲] مطرح شده است .

یادآوری ۳۶.۱ [p.243][4] هر σ — جبر بول B در قانون توزیع پذیری که به صورت زیر می باشد صدق می کند :

$$(\bigvee_{x\in X} a_x) \wedge (\bigvee_{y\in Y} b_y) = \bigvee_{x\in X, y\in Y}(a_x \wedge b_y) \qquad \text{(b)}$$

که X و Y مجموعه اندیس های دلخواه و $b_y, a_x \in B^+$ هستند .

نکته ۳۷.۱ : قانون توزیع پذیری کلی به صورت زیر است :

$$\bigwedge_{x\in X} \bigvee_{y\in Y} \quad a_y^x = \bigvee_f \bigwedge_x a_{f(x)}^x \qquad \text{(c)}$$

[۲] Von Neumann

که دامنهٔ تغییرات f روی همهٔ توابع از X به Y می باشد و همچنین $a_y^x \in B^+$ می باشد .
برای مشخصه سازی جبرهای اندازه وان نیومن ، قانون توزیع پذیری ضعیف را به صورت زیر فرمول سازی کرده است .

تعریف ۳۸.۱ : σ — جبر بول B به طور ضعیف توزیع پذیر گفته می شود هر گاه برای $n = 1, 2, \ldots$ ، $a_0^n \le a_1^n \le \ldots$ داشته باشیم :

$$\bigwedge_n \bigvee_k a_k^n = \bigvee_{f:\, \omega\to\omega} \bigwedge_n a_{f(n)}^n \qquad \text{(d)}$$

(که در اینجا دامنهٔ تغییرات f روی همهٔ توابع از ω به ω می باشد)

قضیه ۳۹.۱ :[p.251][4] فرض کنید B یک σ — جبر بول باشد که در شرط ccc صدق کند . آنگاه عبارات زیر با توزیع پذیری ضعیف B معادل هستند(توجه داشته باشید که $a_y^x \in B^+$ می باشد که در آن x و y اندیس های دلخواه هستند) .

(۱) اگر برای $n = 0, 1, 2, \ldots$ $a_0^n \le a_1^n \le \ldots$ به طوری که $\bigvee_k a_k^n = \mathbf{1}$ آنگاه :

$$\bigvee_{f:\, \omega\to\omega} \bigwedge_n a_{f(n)}^n = \mathbf{1}$$

(۲) فرض کنید برای $n = 0, 1, 2, \ldots$ $a_0^n \le a_1^n \le \ldots$ به طوری که $\bigvee_k a_k^n = \mathbf{1}$ ، آنگاه برای $k = 0, 1, 2, \ldots$ توابع $f_k : \omega \to \omega$ وجود دارند به گونه ای که :

$$\bigvee_k \bigwedge_n a_{f_k(n)}^n = \mathbf{1}$$

(۳) فرض کنید $n = 0, 1, 2, \ldots$ $a_0^n \le a_1^n \le \ldots$ به طوری که $\bigvee_k a_k^n = \mathbf{1}$ آنگاه تابع $f : \omega \to \omega$ وجود دارد به گونهٔ ای که :

$$\lim_n a_{f(n)}^n = \mathbf{1}$$

برهان:

ویژگی (۱) اصلاح شدهٔ تعریف ۳۸.۱ می باشد با این فرض که برای هر n ،