بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضیات و کاربردها

عنوان پایان‌نامه

روش تخفیف موجی شکل دومرحله‌ای برای مسائل مقدار اولیه

استاد راهنما

دکتر داود خجسته سالکویه

توسط

زینب حسن‌زاده

دانشگاه محقق اردبیلی

تابستان ۱۳۹۱

در هر چیز از جمله یک نظریه‌ی ریاضی زیبایی را می‌توان درک کرد ولی نمی‌توان توضیح داد.

«رنه دکارت»

تقدیم به پدر و مادرم

که از رفتارشان محبت

و از صبرشان ایستادگی را آموختم

و تمام تجربه‌های زیبای زندگی‌ام مدیون حضور سبز آنهاست.

و تقدیم به برادرم

که با محبت بی‌دریغش

در تمام دوران تحصیلم همراهی‌ام نموده است.

تقدیر و تشکر

شکر و سپاس خداوند را که در این دنیا چیزی بزرگتر از انسان نیافرید و در انسان چیزی بزرگتر از فکر او. سپاس خدای را به جای می‌آورم که لطف و عنایتش شامل حال من شد تا این مجموعه را کامل کنم.

از زحمات استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر داود خجسته سالکویه کمال سپاسگزاری را دارم، هر چند که این جملات قادر به اظهار تشکر من از زحمات بی‌شائبه‌ی این استاد فرزانه نیست. خدا را شاکرم که سعادت شاگردی ایشان را نصیب من کرد. درجات علمی بالا و موفقیتهای بیش از پیش را برایشان از درگاه خداوند متعال خواستارم.

زینب حسن‌زاده

تابستان ۱۳۹۱

نام خانوادگی: حسن‌زاده	**نام:** زینب

عنوان پایان نامه :

روش تخفیف موجی شکل دومرحله‌ای برای مسائل مقدار اولیه

استاد راهنما: دکتر داود خجسته سالکویه

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی کاربردی **گرایش:** آنالیزعددی

دانشگاه: محقق اردبیلی **دانشکده:** علوم ریاضی

تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۱/۴/۲۸ **تعداد صفحه:** ۹۷

کلید واژه‌ها :

تخفیف موجی شکل، تکرار دومرحله‌ای، مسأله‌ی مقدار اولیه، معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات دیفرانسیل جبری، روش θ

چکیده:

در این پایان‌نامه روش تکراری تخفیف موجی شکل و روش تکراری تخفیف موجی شکل دومرحله‌ای را برای حل مسائل مقدار اولیه معرفی می‌کنیم، که هر دو روش بر پایه‌ی روش‌های تکراری ایستا می‌باشند. مسائل مقدار اولیه‌ی مطرح شده، شامل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی و دستگاه معادلات دیفرانسیل جبری است. هدف از معرفی این روش‌های تکراری تبدیل دستگاه معادلات دیفرانسیل بزرگتر به زیردستگاههای کوچکتر است، که این کار با استفاده از شکافت ماتریس‌های ضرایب دستگاه صورت می‌گیرد. روش تکراری تخفیف موجی شکل دومرحله‌ای از افزودن تکرار درونی به روش تکراری تخفیف موجی شکل حاصل می‌شود، که با این عمل سرعت همگرایی بیشتر می‌شود. در پایان چند مثال عددی برای بررسی کارایی این روش‌ها ارائه می‌کنیم و با استفاده از نتایج عددی حاصل، به مقایسه‌ی سرعت همگرایی و دقت این روش‌ها می‌پردازیم.

فهرست مندرجات

لیست اشکال

لیست جداول

مقدمه

صورت کلی دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی و پاره‌ای و معادلات دیفرانسیل جبری، از دستگاههای دینامیکی در مکانیک سیالات از جمله، انتشار امواج و در ترمودینامیک به خصوص، پخش گرما شکل گرفته‌اند. روشهای عددی بسیاری برای حل اینگونه معادلات پیشنهاد و بررسی شده است. در سال ۱۹۸۰ روش تکراری تخفیف موجی شکل برای حل عددی دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی (ODE[۱]) مورد توجه قرار گرفت و بعد از آن بطور گسترده‌ای پیشرفت کرد.

مسأله‌ی مقدار اولیه از دستگاه ODE، $\dot{y}(t) + Qy(t) = f(t)$ را با شرط اولیه‌ی $y(t_0) = y_0$ در نظر بگیرید، که در آن $f(t)$ یک تابع پیوسته روی بازه‌ی $[t_0, T]$ باشد. با در نظر گرفتن شکافت $Q = D - N_1$ برای ماتریس Q، روش تکراری تخفیف موجی شکل (WR[۲]) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\dot{y}^{k+1}(t) + Dy^{k+1}(t) = N_1 y^k(t) + f(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

که در آن $y^0(t) = y_0$ مرحله‌ی شروع عملگر تکراری است و $y^k(t_0) = y_0$ نقطه‌ی آغازین هر تکرار را مشخص می‌کند. با در نظر گرفتن تقریبات تفاضلی برای مشتق مرتبه‌ی اول، می‌توانیم رابطه‌ی تکراری فوق را گسسته‌سازی کنیم و در نتیجه با توجه به یک معیار توقف مشخص، تقریب عددی جواب را بدست می‌آوریم. اگر قبل از عمل گسسته‌سازی مجدداً شکافت $D = M - N_2$ را برای ماتریس D در نظر بگیریم، در این صورت روش تکراری تخفیف موجی شکل دومرحله‌ای (TSWR[۱]) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{z}^{v+1}(t) + Mz^{v+1}(t) = N_2 z^v(t) + N_1 y^k(t) + f(t), \\ z^{v+1}(t_0) = y^k(t_0) = y_0, \quad z^0(t) = y^k(t), \quad k = 0, 1, \dots, \quad v = 1, \dots, s-1, \end{cases}$$

---

[۱] Ordinary differential equations

[۲] Waveform relaxation

[۱] Two-stage waveform relaxation method

که در آن k و v به ترتیب نشان‌دهنده‌ی تکرارهای بیرونی و درونی هستند و به همین دلیل این روش تکراری را دومرحله‌ای (بیرونی—درونی) می‌نامند. با ثابت در نظر گرفتن تعداد تکرارهای درونی $(v = s)$، روش TSWR ایستا خواهد بود، با توجه به این نکته فرض می‌کنیم $y^{k+1}(t) = z^s(t)$. فرض کنیم بازه‌ی $[t_0, T]$ به چند نقطه‌ی گرهی با طول گام h افراز شده باشد، برای گسسته‌سازی این عملگر تکراری، از روش θ[۲] استفاده می‌کنیم، که در این صورت روش تکراری TSWR-Theta حاصل می‌شود. بنابراین می‌توانیم با توجه به یک شرط توقف مشخص، تقریب عددی جواب را بدست آوریم.

با توجه به نوع ماتریس Q و نوع شکافت‌های $Q = D - N_1$، $D = M - N_2$ و $Q = M - N_2 - N_1$، می‌توان همگرایی روش TSWR را بررسی کرد. در فصل دوم، فرض می‌کنیم که Q یک M—ماتریس است و شکافت‌های فوق M—شکافت هستند، همگرایی روش TSWR را نشان داده و وابستگی آنرا نسبت به دو پارامتر h و θ بررسی می‌کنیم.

فرض کنیم مسأله‌ی مقدار اولیه به شکل یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل جبری (DAE[۳]) به صورت $A\dot{y} + By(t) = f(t)$، $y(t_0) = y_0$ باشد که در آن $t \in [t_0, T]$ و $y(t_0) = y_0$ و A یک ماتریس منفرد است. با اعمال یک شکافت برای A و یک شکافت مرکب برای B، می‌توانیم روش WR و TSWR را برای حل این مسأله بکار ببریم، که در فصل سوم به تفصیل به این موضوع می‌پردازیم. همچنین در این فصل فرض می‌کنیم که شکافت‌های بکار رفته P—منظم و P—منظم مرکب هرمیتی باشند. با توجه به این مفروضات روی همگرایی روش TSWR بحث می‌کنیم و رفتار سرعت همگرایی را نسبت به افزایش دو پارامتر h و θ بررسی می‌کنیم.

در پایان فصل دوم و سوم شرایط کلی همگرایی در خصوص روش TSWR برای ODE و DAE را ارائه می‌کنیم، که مستقل از تکرارهای درونی است، ولی در عمل جواب توسط همین تکرارهای درونی محاسبه می‌شود. بنابراین اگر شکافت‌هایی را که برای ماتریس ضرایب دستگاه در نظر می‌گیریم، شکافت‌هایی با سرعت همگرایی بالا (مانند گاوس—سایدل) باشند، روش TSWR در تعداد تکرار بیرونی کمتری به جواب همگرا شده و در نتیجه بازدهی آن بالاتر می‌شود. همگرایی TSWR با این فرض که B یک H—ماتریس باشد، در [۱۷] و یک ماتریس معین مثبت هرمیتی باشد، در [۱۹] نشان داده شده است.

در فصل چهارم به نتایج عددی می‌پردازیم و با استفاده از قضایای مقایسه‌ای برای همگرایی که در

[۲] Theta method

[۳] Differential algebraic equations

فصل‌های ۲ و ۳ آورده شده است، با تغییر پارامترهای h و θ تغییر شاع طیفی ماتریس تکرار را بررسی کرده و رفتار سرعت همگرایی را مشخص می‌کنیم. همچنین در ادامه با ارائه‌ی چند مثال عددی به مقایسه‌ی روش WR و TSWR می‌پردازیم و در پایان یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل جبری با مشتقات جزئی آورده و روش WR و TSWR را برای حل آن اعمال می‌کنیم.

فصل ۱

مروری بر تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل به یادآوری تعاریف و مفاهیم مورد نیاز می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱ فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. گوییم $\lambda \in \mathbb{C}$ یک مقدار ویژه‌ی متناظر با بردار ویژه‌ی ناصفر x برای ماتریس A است، هرگاه

$$Ax = \lambda x.$$

تعریف ۲.۱ مجموعه مقادیر ویژه‌ی ماتریس A را طیف A می‌نامند و با $\sigma(A)$ نشان می‌دهند و شعاع طیفی[۱] A را با $\rho(A)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\rho(A) = \max_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|.$$

تعریف ۳.۱ فرض کنیم $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. می‌گوییم A با B متشابه است و با علامت $A \sim B$ نشان می‌دهیم، هرگاه ماتریس نامنفردی مانند P وجود داشته باشد، به طوریکه $A = P^{-1}BP$.

لم ۱.۱ فرض کنیم دو ماتریس A و B متشابه باشند. در این صورت دارای مقادیر ویژه‌ی یکسانی هستند.

برهان : به [۹] مراجعه شود. □

---

[۱] Spectral radius

تعریف ۴.۱ یک نرم بردای روی فضای بردای حقیقی یا مختلط V، تابع‌ای است از V به $\mathbb{R}$ به طوری که در شرایط زیر صدق کند:

(الف) به ازای هر $x \in V$، $\|x\| \geq 0$. بعلاوه $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$؛

(ب) به ازای هر $\lambda \in \mathbb{C}$ و $x \in V$، $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$؛

(ج) به ازای هر $x, y \in V$، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ **(نامساوی مثلث)**.

فرض کنید $x \in \mathbb{C}^n$. به ازای هر $p \geq 1$، p—نرم[1] بردار $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ به صورت $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p}$ تعریف می شود. به ازای $p = 2$، نرم فوق را نرم اقلیدسی[2] و به ازای $p = 1$، نرم مجموع قدرمطلق[3] نامند.

تعریف ۵.۱ یک نرم ماتریسی روی $\mathbb{C}^{m\times n}$ تابع‌ای است از $\mathbb{C}^{m\times n}$ به $\mathbb{R}$ به طوری که در شرایط زیر صدق کند:

(الف) به ازای هر $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$، $\|A\| = 0$. بعلاوه $\|A\| = 0$ اگر و تنها اگر $A = 0$؛

(ب) به ازای هر $\alpha \in \mathbb{C}$ و $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$، $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$؛

(ج) به ازای هر $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$، $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

تعریف ۶.۱ نرم ماتریسی $\|.\|$ روی $\mathbb{C}^{n\times n}$ خاصیت ضربی دارد هرگاه به ازای هر $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ داشته باشیم، $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

لم ۲.۱ فرض کنید $\|.\|$ یک نرم ماتریسی باشد که خاصیت ضربی دارد. در این صورت

$$\rho(A) = \lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}}.$$

---

[1] Norm

[2] Euclidean norm

[3] Absolute sum norm

برهان : به [۳] مراجعه شود. □

تعریف ۷.۱ فرض کنید $\|.\|$ یک نرم برداری روی $\mathbb{C}^n$ باشد و $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. در این صورت نرم طبیعی (یا نرم القایی)[۱] متناظر به این نرم برداری به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

با توجه به اینکه نرم، یک تابع به طور یکنواخت پیوسته است ([۹]) و همچنین ماکزیمم توابع پیوسته روی مجموعه‌های بسته و کراندار موجود هستند، لذا در تعریف فوق $\|A\|$ وجود دارد.

تعریف ۸.۱ نرم ماتریسی $\|.\|$ را نسبت به نرم برداری $\|.\|_v$ روی $\mathbb{C}^n$ و $\|.\|_w$ روی $\mathbb{C}^m$ سازگار گویند، هرگاه به ازای هر $x \in \mathbb{C}^n$ و $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ داشته باشیم

$$\|Ax\|_w \leq \|A\|\|x\|_v.$$

لم ۳.۱ اگر $\|.\|$ یک نرم برداری باشد و $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$، آنگاه $\|A\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

برهان :

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \max_{\|x\|=1} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

فرض کردیم $x \neq 0$، بنابراین

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\frac{x}{\|x\|}\| \leq \max_{\|y\|=1} \|Ay\| = \|A\|.$$

در این صورت

$$\max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|.$$

به این ترتیب حکم ثابت می‌شود. □

---

[۱] Induced norm

قضیه ۱.۱ فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. اگر $\|.\|_۲$ نرم طبیعی تولید شده توسط نرم برداری اقلیدسی باشد، آنگاه $\|A\|_۲ = \sqrt{\rho(A^H A)}$.

برهان : به [۱] مراجعه شود. □

قضیه ۲.۱ برای هر ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$، و نرم طبیعی $\|.\|_۲$، داریم

$$\rho(A) \leq \|A\|_۲.$$

برهان : به [۱] مراجعه شود. □

قضیه ۳.۱ فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

(الف) سری $\sum\limits_{k=۰}^{\infty} A^k$ همگراست (می‌دانیم که $A^۰ = I$)؛

(ب) $\rho(A) < ۱$؛

(ج) $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = ۰$.

در هر کدام از حالت‌های فوق $I - A$ معکوس‌پذیر است و $(I-A)^{-۱} = \sum\limits_{k=۰}^{\infty} A^k$.

برهان : به [۱] مراجعه شود. □

۱.۱ ماتریس‌های نامنفی

تعریف ۹.۱ فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. ماتریس $A = (a_{ij})$ را نامنفی (مثبت) گوییم و با $A \geq ۰$ $(A > ۰)$ نشان می‌دهیم هرگاه برای هر i و j داشته باشیم $a_{ij} \geq ۰$ $(a_{ij} > ۰)$ و A را معکوس‌پذیر نامنفی گوییم هرگاه $A^{-۱}$ نامنفی باشد.

تعریف ۱۰.۱ ماتریس A را یک M—ماتریس می‌نامند، هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند s و ماتریس نامنفی مانند B وجود داشته باشند به طوری که

$$A = sI - B, \quad \rho(B) < s,$$

که در آن I ماتریس همانی است.

قضیه ۴.۱ ماتریس $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ یک M—ماتریس است اگر و تنها اگر A نامنفرد باشد، $A^{-1} \geq 0$، $a_{ij} \leq 0$، $i \neq j$ و $a_{ii} > 0$، $i = 1, \dots, n$.

برهان : فرض کنید A یک M—ماتریس باشد. در این صورت به ازای s ای مثبت داریم

$$A = sI - B, \quad B \geq 0, \quad \rho(B) < s. \tag{1.1}$$

هر مقدار ویژه‌ی λ از A به صورت $\lambda = s - \mu$ است که در آن μ یک مقدار ویژه‌ی B است. از اینکه $\rho(B) < s$، نتیجه می‌گیریم که $|\mu| < s$. بنابراین $\lambda \neq 0$ و در نتیجه A نامنفرداست. قرار می‌دهیم $T = \frac{1}{s}B \geq 0$. داریم

$$\rho(T) = \frac{1}{s}\rho(B) < 1.$$

بنابراین با توجه به قضیه‌ی ۳.۱ داریم

$$A^{-1} = [s(I-T)]^{-1} = \frac{1}{s}\sum_{k=0}^{\infty} T^k \geq 0.$$

با توجه به رابطه‌ی (۱.۱)، به وضوح برای هر i و j با شرط $i \neq j$، $a_{ij} \leq 0$. از طرفی فرض کنید $A^{-1} = C = (c_{ij})$. در این صورت $AC = I$ و در نتیجه به ازای هر i، $i = 1, \dots, n$، داریم

$$(AC)_{ii} = 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{ji} = 1 \Rightarrow a_{ii}c_{ii} = 1 - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}c_{ji}.$$

سمت راست این عبارت مثبت است و $c_{ii} \geq 0$. بنابراین $a_{ii} > 0$.

برعکس، فرض کنید که A نامنفرد باشد، $A^{-1} \geq 0$، $a_{ij} \leq 0$، $i \neq j$ و $a_{ii} > 0$، $i = 1, \dots, n$. نشان می‌دهیم که A یک M—ماتریس است. قرار می‌دهیم $s = \max_i a_{ii}$ و

$$B = sI - A.$$

در این صورت داریم

$$A = sI - B, \quad B \geq 0, \quad s > 0.$$

ادعا می‌کنیم که $\rho(B) < s$. فرض کنید که (λ, x) یک زوج ویژه‌ی B باشد. در نتیجه

$$\begin{aligned} \lambda x = Bx &\Rightarrow |\lambda||x| = |Bx| \leq |B||x| \\ &\Rightarrow (sI - B)|x| \leq (s - |\lambda|)|x| \\ &\Rightarrow A|x| \leq (s - |\lambda|)|x| \\ &\Rightarrow 0 \leq |x| \leq (s - |\lambda|)A^{-1}|x|. \end{aligned} \tag{۲.۱}$$

از اینکه $A^{-1}|x| \geq 0$، نتیجه می‌گیریم که $s - |\lambda| \geq 0$. اما $s - |\lambda| \neq 0$، زیرا در غیر این صورت بنا به رابطه‌ی (۲.۱) داریم $x \neq 0$ که غیر ممکن است زیرا x یک بردار ویژه‌ی B است. بنابراین $s - |\lambda| > 0$، و این به این معنی است که $\rho(B) < s$. □

قضیه‌ی زیر معروف به قضیه‌ی پرون—فروبنیوس[۱] است و یکی از قضایای مهم و اساسی برای ماتریس‌های مثبت است، که در این بخش به صورتِ خلاصه شده‌ای از آن اکتفا می‌کنیم.

قضیه ۵.۱ فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ و $A > 0$. در این صورت، گزاره‌های زیر برقرارند.

(الف) $\rho(A)$ یک مقدار ویژه‌ی A است و بعلاوه بردار مثبتی مانند $x \in \mathbb{R}^n$ وجود دارد بطوریکه $Ax = \rho(A)x$.

(ب) $\lim_{m\to\infty}(\rho(A)^{-1}A)^m = L$ که در آن $L = xy^T$ و $Ax = \rho(A)x$ و $A^Ty = \rho(A)y$ و $x, y \in \mathbb{C}^n$ دو بردار مثبتی هستند به طوری که $x^Ty = 1$.

برهان: به [۹] مراجعه شود. □

لم ۴.۱ فرض کنید T یک ماتریس نامنفی باشد، در این صورت $\rho(T) < 1$ اگر و تنها اگر $(I - T)^{-1}$ موجود باشد و $(I - T)^{-1} \geq 0$.

[۱] Perron-Frobenius

برهان : فرض کنید $\rho(T) < 1$. با فرض $s = 1$ داریم

$$I - T = sI - T, \quad \rho(T) < s, \quad T \geq 0.$$

لذا بنا به تعریف $(I - T)$ یک M—ماتریس است. در این صورت باتوجه به قضیه ی ۴.۱ $I - T$ نامنفرد بوده و $(I - T)^{-1} \geq 0$. بنا بر قضیه‌ی پرون—فروبنیوس $\rho(T)$ یک مقدار ویژه‌ی T است و یک بردار ویژه‌ی نامنفی مانند x وابسته به $\rho(T)$ برای ماتریس T وجود دارد، به طوری که

$$Tx = \rho(T)x, \quad x \geq 0, \quad x \neq 0.$$

از اینکه $(I - T)^{-1}$ موجود است، داریم

$$(I - T)^{-1}x = \rho((I - T)^{-1})x = \frac{1}{\rho(I - T)}x = \frac{1}{1 - \rho(T)}x.$$

از طرفی x و $(I - T)^{-1}$ نامنفی هستند. بنابراین

$$1 - \rho(T) > 0 \Rightarrow \rho(T) < 1.$$

و به این ترتیب اثبات کامل می‌گرد. □

لم ۵.۱ فرض کنید A، یک M—ماتریس باشد و $\alpha \geq 0$. آنگاه $I + \alpha A$ نیز یک M—ماتریس است.

برهان : بنابر تعریف چون A یک M—ماتریس است، می‌توان A را به صورت زیر نوشت:

$$A = sI - B, \quad B \geq 0, \quad s > 0, \quad \rho(B) \leq s.$$

بنابراین

$$I + \alpha A = I + \alpha(sI - B) = I + \alpha sI - \alpha B = (1 + \alpha s)I - \alpha B.$$

از $B \geq 0$ و $\alpha \geq 0$، نتیجه می‌گیریم $\alpha B \geq 0$ و

$$\alpha \geq 0, \quad s > 0 \Rightarrow 1 + \alpha s > 0.$$

از طرفی

$$\rho(\alpha B) = \alpha\rho(B) \leq \alpha s \Rightarrow \rho(\alpha B) \leq \alpha s \Rightarrow \rho(\alpha B) < 1 + \alpha s.$$

بنابراین $I + \alpha A$ یک M—ماتریس است. □

قضیه ۶.۱ اگر $A \geq 0$، آنگاه برای هر بردار مثبت $x \in \mathbb{R}^n$ رابطه‌ی زیر برقرار است.

$$\min_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j.$$

برهان : به [۹] مراجعه شود. □

قضیه ۷.۱ فرض کنید $A \geq 0$. در این صورت احکام زیر برقرارند.

(الف) فرض کنید $Ax \geq \alpha x$ که در آن x و α به ترتیب بردار نامنفی و اسکالر مثبت هستند. در این صورت $\rho(A) \geq \alpha$.

(ب) فرض کنید $Ax \leq \alpha x$ که در آن x و α به ترتیب بردار نامنفی و اسکالر مثبت هستند. در این صورت $\rho(A) \leq \alpha$.

(ج) A یک مقدار ویژه‌ی حقیقی نامنفی مانند $\lambda \geq 0$، متناظر با بردار ویژه‌ی نامنفی $x \geq 0$ دارد. به طوری که $\lambda = \rho(A)$.

(د) فرض کنیم $A \geq B \geq 0$، که در آن B یک ماتریس نامنفی است. در این صورت $\rho(A) \geq \rho(B)$.

برهان : (الف) فرض کنیم $Ax \geq \alpha x$. در این صورت می‌توان نوشت

$$\alpha \leq \min_{1 \leq i \leq n} x_i^{-1} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j.$$

با توجه به قضیه‌ی ۶.۱ داریم

$$\alpha \leq \min_{1 \leq i \leq n} x_i^{-1} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq \rho(A) \Rightarrow \alpha \leq \rho(A).$$

(ب) اثبات مشابه قسمت (الف) است. فرض کنیم $Ax \leq \alpha x$. بنابراین با استفاده از قضیه‌ی ۶.۱ داریم

$$\alpha \geq \max_{1 \leq i \leq n} x_i^{-1} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq \rho(A) \Rightarrow \alpha \geq \rho(A).$$