بسم الله الرحمن الرحيم

١٠٣٧٨٨

دانشگاه پیام نور

دانشکده علوم

گروه ریاضی

عنوان پایان نامه:

بررسی قضایای همگرای در روشهای تکراری تعمیم یافته برای حل دستگاه معادلات خطی

پایان نامه:

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی کاربردی

استاد راهنما :

دکتر یعقوب رحیمی اردبیلی

پژوهشگر:

بیتا شکوری

دی ۱۳۸۵

۱۰۳۷۸۸

دانشگاه پیام نور

دانشگاه پیام نور – کتابخانه مرکزی
بخش نشریات

شماره ثبت	QA
شماره بازیابی	۶۶۹
شماره ورود	۸۶/۱/۲۵

دانشکده علوم

گروه ریاضی

عنوان پایان نامه:

بررسی قضایای همگرای در روشهای تکراری تعمیم یافته برای حل دستگاه معادلات خطی

پایان نامه:

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی کاربردی

استاد راهنما:

دکتر یعقوب رحیمی اردبیلی

۱۳۸۷ /۱۲/ ۱۱۹۱

پژوهشگر:

بیتا شکوری

دی ۱۳۸۵

۱۰۳۷۸۸

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه پیام نور

تاریخ ۸۵/۱۰/۲۰
شماره ....
پیوست ....

باسمه تعالی

تصویب نامه پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان: بررسی قضایای همگرایی در روشهای تکراری تعمیم یافته برای حل دستگاه معادلات خطی.

که توسط بیتا شکوری **تهیه و به هیأت داوران ارائه گردیده است مورد تأئید می باشد.**

تاریخ دفاع: ۸۵/۱۰/۲۰ **نمره :** ۱۹,۵ نوزده و نیم **درجه ارزشیابی:** عالی

اعضای هیأت داوران:

نام و نام خانوادگی هیأت داوران		مرتبه علمی	امضاء
۱- دکتر محمدیعقوب رحیمی اردبیلی	استاد راهنما	استاد	
۲- ---	استاد راهنمای همکار یا مشاور	---	
۳- دکتر حسین خیری	استاد ممتحن	استادیار	
۴- دکتر مهدی صحت خواه	نماینده گروه آموزشی	استادیار	
۵- سحر اسمانی زراحت	نماینده تحصیلات تکمیلی		

(نمونه تصویب نامه پایان نامه)

تقدیر و تشکر

بیکران سپاسم به درگاه حق که قطره ای از اقیانوس بی انتها علم خود را بر من عنایت نمود تا پیوسته مشتاق بهره گیری از قطره ای دیگر باشم الهی مرا مدد کن تا دانش اندکم نه نردبانی باشد برای فزونی تکبر و غرور و نه مایه ای برای تجارت، بلکه گامی باشد برای تجلیل از تو و تعالی ساختن خود و دیگران. تقدیر و تشکر از استاد فاضل و ارجمندم جناب آقای **دکتر یعقوب رحیمی اردبیلی** که راهنمایی این پایاننامه را به عهده گرفتند و در طول تحصیل و تدوین این پایاننامه زحمت زیادی را متقبل شدند. در این مدت روشنگر راه برایم بوده اند و از محضرشان بسیار استفاده کردم افتخار شاگردی ایشان را هیچگاه فراموش نخواهم کرد. من ایشان را در زندگی الگوی خود قرار خواهم داد. و همچنین از استاد ارجمند جناب آقای **دکتر حسین خیری** که به عنوان استاد داور قبول زحمت نمودند، و پایاننامهٔ مرا مطالعه نموده و همچنین مرا در طول تحصیل راهنمایی نمودند تقدیر و تشکر می نمایم.

تشکر و قدردانی

مادرم: حامی دیروزم، هادی امروزم و همه فردایم

کاش می توانستم رشته ای ازانوار طلایی خورشید را در دست گرفته و با آن بر صورت ابرهای سفید زنگار آسمان بنویسم که من گرمی زندگی را در خورشید محبتت چشیدم و با ذره ذره وجود حس کردم. تو مادر که پر از لطف و نیکی هستی و از امیدهای توست که برق امید در چشمان خسته ام می درخشد تو برگهای بهاری را در دلم رویاندی، ای همیشه یاور، احساسی را که در زیر این کلمات ساده و جملات ضعیف و افتاده پنهان کرده ام دریاب.

پدرم: واژه همیشه جاری در رگهایم

تجسم ایثار، سزاوار ستایش

ریشه ای در من و باوری در قلب من

همیشه جاودان و بزرگی او را در کنارم احساس می کنم. که کرامت را در حق دلبندانش به اوج خود رسانیده است.

خواهر و برادر عزیز و بهتر از جانم که پشتیبان و تکیه گاه و یاورم بودند صمیمانه تشکر می کنم.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

۴- نتایج و بحث عددی

نام خانوادگی دانشجو: شکوری	**نام:** بیتا
عنوان پایاننامه: بررسی قضایای همگرای در روشهای تکراری تعمیم یافته برای حل دستگاه معادلات خطی	
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی کاربردی	**گرایش:** آنالیز عددی
دانشگاه: پیام نور مرکز تبریز **تاریخ فارغ التحصیل:** ۸۵/۱۰/۲	**تعداد صفحه:** ۸۱
اساتید راهنما: دکتر یعقوب رحیمی اردبیلی	
کلید واژه: ماتریس نامنفرد- روش تکراری- شعاع طیفی- تجزیه- روش متناوب- روش غیرپایا- شرایط مقایسه	

چکیده

در حل دستگاه خطی $Ax=b$ زمانی که ماتریس A دارای ابعاد بزرگتر باشد با روشهای تئوری امکانپذیر نیست. لذا از روشهای عددی از جمله روشهای تکراری استفاده می شود در این پایاننامه ماتریس A یک ماتریس نامنفرد و تنک و $n\times n$ در نظر می گیریم و متداولترین روش تکراری برای آن به این صورت بیان می کنیم:

$$A=M-N$$

$$x^{(k+1)}=M^{-1}Nx^{(k)}+M^{-1}b, \qquad k=0,1,2,\ldots$$

که همگرایی این روش به شعاع طیفی یعنی $\rho(M^{-1}N)$ بستگی دارد بنابراین شعاع طیفی نقش اساسی در روشهای تکراری داشته و به عنوان ابزار اصلی در مقایسه روشهای مختلف مورد استفاده قرار می گیرد. با استفاده از نتایج همگرایی روشهای تکراری کلاسیک برای حل دستگاه، که برای روش تکراری متناوب نیز قابل استفاده می باشد. ضمنا قضایای همگرایی روش تکراری متناوب معرفی شده توسط بنزی و سزلد [۳] برای تفکیکهای نامنفی ضعیف نوع اول ماتریس یکنوا را به تفکیکهای نامنفی ضعیف نوع دوم تعمیم می دهیم. و همچنین نتایج مقایسه ای را برای تفکیکهای منظم به تفکیکهای نامنفی تعمیم می دهیم. در ادامه روش تکراری متناوب کلی را معرفی می کنیم ونتایج همگرایی را برای تفکیکهای نامنفی ضعیف از نوع اول و دوم برای یک ماتریس یکنوا در این روش تکراری کلی می آوریم همچنین نتایج همگرایی جهت تفکیکهای P- منظم برای ماتریس معین مثبت متقارن را در روش کلی مورد مطالعه قرار می دهیم.

مقدمه

می دانیم که برای حل مسائلی چون برنامه ریزی خطی، معادلات با مشتقات جزیی، تحقیق در عملیات و.... در نهایت به دستگاه معادلات خطی که به شکل کلی Ax=b می باشد برخورد می نماییم که در آن A ماتریس ضرایب و x بردار مجهول و b برداری معلوم است. در اکثر موارد به ویژه مسائل معادلات با مشتقات جزیی ممکن است مرتبه ماتریس بسیار بزرگ باشد بطوریکه حل دستگاه بطریق مستقیم امکانپذیر نباشد، در اینگونه مواقع می توان از روشهای تکراری برای حل دستگاه استفاده نمود.

در تمامی روشهای تکراری از اولین تقریب برای بدست آوردن تقریب دوم و از تقریب دوم برای بدست آوردن تقریب سوم و.... استفاده می نماییم. نکتهٔ مهم در روشهای تکراری سرعت همگرایی روش می باشد. روشی را همگرا می گوییم که در آن به ازاء هر تقریب اولیه با افزایش تکرار، اختلاف بین جواب بدست آمده به جواب واقعی به سمت صفر میل کند.

متداولترین روش تکراری برای حل دستگاه معادلات خطی با استفاده از نظریه تفکیک ماتریسها یعنی $A=M-N$، که در آن M نامنفرد است، در نظر می گیریم. تقریبها را از رابطه بازگشتی $x^{(k+1)}=M^{-1}Nx^{(k)}+M^{-1}b, k=0,1,2,...$ حساب کرده واین تقریبات را با دقت ε تا آنجا ادامه می دهیم که به ازای نرمی مانند $\|.\|$، $\varepsilon>\left\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\right\|$ باشد. با توجه به انتخابهای متفاوت ماتریس تکرار $M^{-1}N$، این نوع روشهای تکراری، موقعی همگرا است که $\left\|M^{-1}N\right\|<1$ یا $\rho(M^{-1}N)<1$. بنابراین شعاع طیفی نقش اساسی در روشهای تکراری داشته و به عنوان ابزار اصلی در مقایسه روشهای مختلف مورد استفاده قرار می گیرد. البته در این رساله روش تکراری متناوب معرفی شده و قضایای همگرایی را برای تفکیکهای نامنفی و P– منظم به روش تکراری کلی متناوب تعمیم می دهیم.

ساختار این رساله به شرح زیر تدوین گردیده است:

– در فصل اول تعاریف و قضایای اساسی مربوط به ماتریسها که در بررسی همگرایی روشها موثر است.

– در فصل دوم روشهای عددی حل دستگاه معادلات خطی و همگرایی آنها بررسی می شود.

– در فصل سوم معرفی روش تکراری متناوب و تعمیم آن و بررسی همگرایی روش براساس نظریه تفکیک ماتریسها بررسی می شود.

– در فصل چهارم نتایج و بحث عددی روش معرفی شده با روش تکراری پایا مورد مقایسه قرار می دهیم.

فصل اول :

مفاهیم مقدماتی

مربوط به ماتریسها

۱-۱ مقدمه

در این پایاننامه ماتریسها را با حروف بزرگ انگلیسی مانند A و بردارها را با حروف کوچک انگلیسی مانند a و برای نشان دادن اسکالرها از حروف کوچک یونانی و یا حروف کوچک انگلیسی به طوریکه با بردارها اشتباه نشود، استفاده خواهیم کرد. منظور از R، اعداد حقیقی، R^n مجموعه بردارهای حقیقی n بعدی و $R^{n\times n}$ مجموعه ماتریسهای حقیقی به ابعاد $n\times n$ می باشد. اعداد وبردارها و ماتریسهای مختلط را به ترتیب با $c^{n\times n}, c^n, c$ و پایان هر قضیه را باعلامت □ نشان خواهیم داد.
با توجه به اینکه انتخاب یک روش برای حل دستگاه خطی اغلب به ساختار ماتریس ضرایب بستگی دارد در زیر تعاریف اساسی مربوط به ماتریسها و قضایایی از جبرخطی که در فصلهای بعدی از آنها استفاده خواهد شد را بیان می کنیم.

۱ - ۲ تعاریف اساسی مربوط به ماتریسها:

یک دستگاه m معادله با n مجهول $x_1, x_2, ..., x_n$ به صورت زیر:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

نشان داده می شود. که در آنها a_{ij} و b_i ($j=1,...,n$ ، $i=1,...,m$) مقادیر ثابت مفروضی هستند چون بیان دستگاه معادلات خطی به صورت ماتریس مناسب است. لذا ابتدا به معرفی ماتریسها می پردازیم.
ماتریس $m\times n$، A را به صورت مجموعه مرتبی از $m\times n$ عدد حقیقی (یا مختلط) a_{ij} به صورت زیر:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

تعریف می کنیم. که در آن اعداد a_{ij} را درایه های ماتریس A می نامیم. لذا A یک ماتریس از مرتبه $m\times n$ و a_{ij} درایه آن در سطر i ام و ستون j ام می باشد. گاهی اوقات ماتریس A به صورت خلاصه تر $A=(a_{ij})_{m\times n}$ نوشته می شود.
اگر $m=n$، در اینصورت A، ماتریس مربعی از مرتبه n و درایه a_{ii} برای $i=1,...,n$ درایه های قطری آن می باشد.

یک بردارستونی m- بعدی، یک ماتریس $m\times 1$ می باشد که فقط یک ستون دارد.

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

و معمولاً، چنین بردار ستونی را با x نشان می دهیم و همچنین ماتریس $1\times n$ را یک بردار سطری n- بعدی می خوانیم و ماتریسی است که فقط یک سطر دارد، مثلا ماتریس

$$[x_1,\dots x_n]$$

ماتریس صفر: از مرتبه $m\times n$ ماتریسی است که تمام درایه های آن صفر باشد و با O نشان می دهیم.

ماتریس همانی: ماتریس همانی را با I نشان می دهیم و $I=(\delta_{ij})_{n\times n}$ که در آن برای $i,j=1,2,\dots,n$ داریم $\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$، δ_{ij} را دلتای کرونکر می نامند .

ماتریس همانی I، عضو خنثی عمل ضرب ماتریسها می باشد، یعنی $AI=IA=A$.

با توضیحات فوق دستگاه معادلات خطی را می توان بصورت ماتریس $Ax=b$ بیان کرد که در آن

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad ، \quad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad ، \quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ماتریس قطری: ماتریس مربع A از مرتبه n را قطری گویند هرگاه عناصر غیرقطری آن صفر باشد. به عبارت دیگر A یک ماتریس قطری است اگر $a_{ij}=0, i\neq j$.

اگر D یک ماتریس قطری با عناصر قطری $d_1,\dots,d_n$ باشد بطور خلاصه D را به صورت $D=diag(d_1,\dots,d_n)$ نیز نشان می دهند.

ماتریس پایین مثلثی (اکید): ماتریس مربع A را پایین مثلثی گویند هرگاه عناصر بالای قطر آن صفر باشد.به بیان دیگر $a_{ij}=0, i\leq j(i<j)$.

ماتریس بالامثلثی (اکید): ماتریس مربع A را بالا مثلثی گویند هرگاه عناصرزیرقطر آن صفر باشد. یعنی $a_{ij}=0, i\geq j(i>j)$.

ماتریس مثلثی: ماتریس مربع A را مثلثی گویند هرگاه پایین مثلثی یا بالا مثلثی باشد.

تجزیه یک ماتریس به عوامل بالا مثلثی و پایین مثلثی به صورت LU:

فرض کنیم A یک ماتریس مربعی $n\times n$ باشد. در اینصورت می توان آن را به حاصلضرب دو ماتریس بالا مثلثی U و پایین مثلثی L تجزیه کرد. از روشهای تجزیه می توان به تجزیه مستقیم دولیتل-تجزیه

مستقیم کروت و تجزیه مستقیم چولسکی اشاره کرد. برای کسب اطلاعات بیشتر می توانید به مرجع [۲] مراجعه کنید.

ماتریس هسنبرگ بالایی و پایینی: ماتریس مربعی $A=(a_{ij})_{n\times n}$ را ماتریس هسنبرگ بالایی گویند هرگاه ، برای $i,j=1,2,...,n$ ، $a_{ij}=0, i>j+1$ و هسنبرگ پایینی است هرگاه برای $a_{ij}=0, j>i+1$.

ترانهاده و ترانهاده مزدوج: اگر در ماتریس $A\in R^{m\times n}$ جای سطرها و ستونها را عوض کنیم یک ماتریس به ابعاد $n\times m$ بدست می آید که آن را ترانهاده ماتریس A می گوییم و با A^T نشان می دهیم.مزدوج عدد مختلط z را با z^* و همینطور مزدوج ماتریس مختلط A را با A^* نمایش داده که تعویض درایه ماتریس A با مزدوج آن بدست می آید. مزدوج ترانهاده ماتریس A را با A^H نشان داده که همان ترانهاده A^* یا مزدوج A^T می باشد. بنابراین داریم :

$$A^H=(A^*)^T=(A^T)^*$$

$$(A^H)^H=A,(A^T)^T=A,(A^*)^*=A$$

و برای ماتریسهای مربعی B,A بطوریکه AB تعریف شده داریم:

$$(AB)^T=B^TA^T$$

$$(AB)^H=B^HA^H$$

$$(AB)^*=B^*A^*$$

ترانهاده یک ماتریس پایین مثلثی، ماتریس بالا مثلثی و ترانهاده ماتریس بالا مثلثی، ماتریس پایین مثلثی است.

ماتریس تنک: ماتریس A را تنک گویند هرگاه اکثر مؤلفه های آن صفر باشد.

در زیر انواعی از ماتریسهایی که ساختار ویژه خاصی دارند، بیان می کنیم.

- اگر ماتریس مربعی حقیقی A به ابعاد n طوری باشد که $A=A^T$، آنگاه A را متقارن گویند.
- اگر ماتریس مربعی حقیقی به ابعاد n طوری باشد که $A^T=-A$، آنگاه A را پاد متقارن گویند.
- اگر ماتریس مختلط A به ابعاد n طوری باشد که $A=A^H$، آنگاه A را هرمیتی گویند. توجه می کنیم که برای یک ماتریس حقیقی دار $A^T=A^H$.
- اگرماتریس A چنان باشد که داشته باشیم $AA^H=A^HA$، آنگاه A را ماتریس نرمال گویند.
- ماتریس $A\in R^{n\times n}$ را یک ماتریس متعامد گویند، هرگاه داشته باشیم $A^T=A^{-1}$.
- ماتریس $A\in C^{n\times n}$ را یک ماتریس یکه ای گویند، هرگاه داشته باشیم $A^H=A^{-1}$.

حاصلضرب دو ماتریس متعامد یک ماتریس متعامد و حاصلضرب دو ماتریس یکه ای یک ماتریس یکه ای است.

ماتریس وارون: ماتریس مربع A از مرتبه n را وارون پذیر گویند هرگاه ماتریسی مربعی مانند B چنان یافت شود که $AB=BA=I_n$، در اینصورت Bرا وارون A نامیده و با A^{-1} نشان می دهند، و A را معکوس پذیر یا نامنفرد می گوییم، $B=A^{-1}$.

- اگر A نامنفرد باشد، آنگاه A^{-1} منحصر بفرد است، و داریم $AA^{-1}=A^{-1}A=I$.

- اگر A و B هر دو نامنفرد باشند، آنگاه AB نیز نامنفرد است و $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

دترمینان یک ماتریس:

دترمینان یک ماتریس $n\times n$ مانند $A=(a_{ij})$ را با $\det(A)$ یا $|A|$ نشان داده و به شکل زیر تعریف می کنیم :

$$\det(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

که در آن

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}A_{ij}$$

می باشد و A_{ij} دترمینان ماتریس حاصل از حذف سطر iام و ستون jام ماتریس A می باشد.

قضیه: اگر A و B ماتریسهای $n\times n$ باشند، آنگاه :

$$\det A.B=\det A.\det B=\det B.\det A$$

قضیه ۱-۲-۱: ماتریس مربعی $n\times n$، A را نامنفرد یا ناویژه گویند هرگاه $\det(A)\neq 0$.

برهان: به[۱] مراجعه کنید.

لازم به ذکر است اگر $\det(A)\neq 0$، آنگاه دستگاه معادلات $Ax=b$ دارای جواب یکتای به شکل $x=A^{-1}b$ می باشد .

قضیه۱-۲-۲: اگر A یک ماتریس وارون پذیر باشد آنگاه :

الف). A^{-1} نیز وارون پذیر است و $(A^{-1})^{-1}=A$

ب). A^n وارون پذیر است و $(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n$

ج). برای هر عدد حقیقی $\lambda A,\lambda\neq 0$ وارون پذیر است و $(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$

د). اگر A^{-1} موجود باشد $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$.

قضیه۱-۲-۳: ماتریس مربع A معکوس پذیر است اگر وفقط اگر به ازای هر $x\neq 0$ ، $Ax\neq 0$.

برهان : به [۱] رجوع کنید.

قضیه۱-۲-٤: دستگاه خطی $Ax=b$ دارای جواب منحصر بفرد است اگر و فقط اگر Aنامنفرد باشد. واگر Aمنفرد باشد، آنگاه این دستگاه یا جواب ندارد یا بی نهایت جواب دارد.

ماتریسهای متشابه: ماتریسهای B, A (حقیقی یا مختلط) را متشابه گوییم هرگاه ماتریس نامنفرد P موجود باشد بطوریکه $B = P^{-1}AP$.

قضیه ۱-۲-۵ : فرض کنید A یک ماتریس حقیقی متقارن باشد در اینصورت ماتریس متعامدی چون P موجود است به طوریکه $B = P^T AP$ که در آن B یک ماتریس قطری است.

برهان : به [۱] رجوع کنید.

ماتریس معین مثبت: ماتریس مربعی A به ابعاد n را معین مثبت گوییم هرگاه

الف- A هرمیتی باشد و تمامی مقادیر ویژه اش مثبت باشد

ب- به ازای هر $0 \neq x \in C^n$ داشته باشیم $x^* Ax > 0$.

چون اکثرا با ماتریسهای حقیقی سروکار داریم لذا تعریف ماتریس معین مثبت را برای ماتریسهای حقیقی بکار خواهیم برد، به ینصورت که اولا A متقارن و ثانیا برای هر $0 \neq x \in R^n$ داشته باشیم $x^T Ax > 0$. در صورتیکه $x^T Ax \geq 0$، A را معین نامنفی(نیمه معین مثبت) گویند. و A را معین مثبت متقارن[1] گوییم هرگاه A متقارن و معین مثبت باشد.

قضیه : یک ماتریس A حقیقی مثبت (حقیقی نامنفی) است اگر وفقط اگر $A + A^T$ حقیقی و معین مثبت (معین نامنفی) باشد.

برهان : به [۲۱] مراجعه کنید.

ماتریس قطر غالب: ماتریس مربعی A از مرتبه n را قطر غالب گویند هرگاه

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, i \neq j \qquad i = 1, \dots n$$

و اکیدا قطر غالب گویند هرگاه

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, i \neq j \qquad i = 1, \dots n$$

قضیه ۱-۲-۶ : هر ماتریس معین مثبت و اکیدا قطر غالب وارون پذیر (نامنفرد) است.

ماتریس جایگشت: ماتریس $P = (P_{ij})$ که از تغییر مکان سطرهای یک ماتریس همانی حاصل شود یک ماتریس جایگشت نام دارد . که ماتریس جایگشت یک ماتریس متعامد است.

مثال ۱-۲-۱ : ماتریس زیر یک ماتریس جایگشت است که از جابجایی سطرهای اول ودوم ماتریس همانی حاصل می شود.

[1] - Symmetric Positive definite

$$P_{12}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

۱ – ۳ رتبه ماتریس:

فضای برداری

تعریف: یک فضای برداری (یا فضای خطی) متشکل است از

۱- یک هیات F از اسکالرها

۲- یک مجموعه V از اشیایی بنام بردارها

۳- یک قاعده (یا عمل) بنام جمع برداری که به هر جفت از بردارهای α و β از V بردار $\alpha+\beta$ از V را که مجموع α و β نامیده می شود وابسته می سازد با این شرایط که

الف) جمع جابجایی است. یعنی $\alpha+\beta=\beta+\alpha$

ب) جمع شرکت پذیر است. یعنی $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

پ) بردار یکتای 0 بنام بردار صفر در V موجود است بطوریکه به ازای هر α در V، $\alpha+0=\alpha$، $0+\alpha=\alpha$.

ت) به ازای هر بردار α در V ، بردار یکتای $-\alpha$ در V موجود است بطوریکه $\alpha+(-\alpha)=0$.

٤- یک قاعده (یا عمل) بنام ضرب اسکالری که به هر اسکالر c از F و هر بردار α از V بردار $c\alpha$ در V را که حاصلضرب c و α نامیده می شود وابسته سازد با این شرایط که

الف) به ازای هر α در V، $1\alpha=\alpha$.

ب) $(c_1c_2)\alpha=c_1(c_2\alpha)$.

پ) $c(\alpha+\beta)=c\alpha+c\beta$.

ت) $(c_1+c_2)\alpha=c_1\alpha+c_2\alpha$.

تعریف: فرض کنیم V یک فضای برداری و $x_1,x_2,...,x_n$ بردارهایی از V و $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ اسکالری از R باشند اگر بردار y در V را بتوان به صورت $y=\alpha_1x_1+...+\alpha_nx_n$ نوشت آنگاه گوییم y یک ترکیب خطی از $x_1,x_2,...,x_n$ می باشد.

تعریف زیر فضا: فرض کنید S مجموعه بردارها در R^n باشند، S یک زیرفضای R^n است اگر هر ترکیب خطی از دو تا بردارها در S، همچنین در S باشد. $v_1,v_2\in S\Rightarrow c_1v_1+c_2v_2\in S$ که c_2,c_1 هر اسکالری است.

حداکثرتعداد سطرها یا ستونهای مستقل خطی ماتریس Aرا رتبه آن ماتریس نامیده و با $rank(A)$ نشان می دهند. اگر A یک ماتریس $m\times n$ باشد آنگاه $rank(A)\le \min(m,n)$

ماتریسهای متشابه دارای رتبه یکسان هستند.

قضیه ۱-۳-۱: اگر A یک ماتریس مربع از مرتبه n باشد آنگاه عبارات زیر معادلند:

الف- A وارون پذیر است.

ب- $\det(A)\neq 0$.

ج- $rank(A)=n$.

د- سطرها و ستونهای ماتریس A مستقل خطی اند.

قضیه ۱-۳-۲:

الف- رتبه ماتریس همانی I_n برابر n است ، یعنی $rank(I_n)=n$

ب- $rank(A)=rank(A^T)$

ج- اگر A یک ماتریس $n\times n$ باشد آنگاه $rank(A)<n \Leftrightarrow \det(A)=0$

تعریف برد وفضای پوچ ماتریس: برای هر ماتریس $m\times n$ ، A ، دو تا زیر فضاهای متناظر مهم وجود دارند. برد ماتریس A را که با $R(A)$ یا کرنل یا هسته یک ماتریس و فضای پوچ A را که با $N(A)$ نشان داده می شوند ، به صورت زیر تعریف می شوند

$$R(A)=\left\{b\in R^m : b=Ax, x\in R^n\right\}$$

$$N(A)=\left\{x\in R^n : Ax=0\right\}$$

تعریف می شوند. یک ماتریس از رتبه کامل است هرگاه رتبه آن برابر $\min(n,m)$ باشد.

۱ – ٤ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه:

فرض کنیم A یک ماتریس مربعی به ابعاد n باشد اسکالر λ و بردار ناصفر x را به ترتیب مقدار ویژه و بردار ویژه ماتریس A می گوییم هرگاه $Ax=\lambda x$.

قضیه ۱-٤-۱

۱- مقادیر ویژه ماتریسهای قطری و مثلثی اعضای قطری آن هستند

۲- مقادیر ویژه یک ماتریس معکوس پذیر مخالف صفر هستند

۳- مقادیر ویژه دو ماتریس متشابه با هم برابرند.

۴- مقادیر ویژه ماتریس A^P به ازای عدد صحیح مثبت P عدد λ_i^P می باشد.(اگر λ_i مقادیر ویژه A باشد).

۵- ماتریس $A+kI$ (برای $0 \neq k \in R$) مقادیر ویژه $\lambda_i + k$ را دارد .

برهان: به [۱] مراجعه کنید.

تعریف: یک ماتریس هرمیتی، معین مثبت است اگر تمامی مقادیر ویژه اش مثبت باشد.

بدیهی است هر ماتریس معین مثبت یک ماتریس حقیقی مثبت می باشد، اما عکس آن برقرار نیست .

روش یافتن مقادیر ویژه یک ماتریس:

تساوی $Ax = \lambda x$ را می توان به فرم $Ax = \lambda Ix$ نوشت بنابراین با فاکتور گیری از x داریم

$$(\lambda I - A)x = 0$$

می دانیم که دستگاه همگن فوق زمانی دارای جواب ناصفر است که دترمینان ماتریس ضرایب آن صفر باشد لذا

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

پس λ یک مقدار ویژه ماتریس A است اگر وفقط اگر $\det(\lambda I - A) = 0$. با داشتن مقدار ویژه λ و حل دستگاه $(A-\lambda I)x = 0$ بردار ویژه نظیر λ محاسبه می شود که از بسط دترمینان فوق یک چند جمله ای برحسب λ از درجه n حاصل می شود به این چند جمله ای، چندجمله ای مشخصه ماتریس A می گویند و در حالت کلی به شکل زیر می باشد

$$(-1)^n \det(A - \lambda I) = \lambda^n - (tracA)\lambda^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det(A) = 0$$

که $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ و $trac(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ می باشد .

اگر $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ مقادیر ویژه متمایز ماتریس A و $v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(n)}$ بردارهای ویژه متناظر با آنها باشند آنگاه $\left\{v^{(k)}\right\}_{k=1}^{n}$ مستقل خطی اند. (ر . ک . [۱])

البته روشهای عددی متعددی برای محاسبه مقادیر ویژه یک ماتریس وجود دارند، که یکی از مهم ترین آنها روش توانی است که در اینجا شرح داده می شود. و سایر روشهای دیگر در کتابهای جبرخطی یافت می شود.

روش توانی محاسبه مقادیر ویژه یک ماتریس

فرض کنیم A یک ماتریس $n \times n$ باشد بطوریکه : $Au_i = \lambda_i u_i$ ، $i = 1, 2, \ldots, n$ و $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$ یعنی λ_1 بزرگترین مقدار ویژه از نظر قدرمطلق باشد.

λ_iها متمایز هستند. پس بردارهای ویژه مستقل خطی می باشند و در نتیجه تشکیل یک پایه می دهند.

$$x \in R^n \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i \Rightarrow Ax = \sum_{i=1}^{n} c_i A u_i = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i u_i$$

$$= c_1 \lambda_1 u_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i \lambda_i u_i = \lambda_1 (c_1 u_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i \frac{\lambda_i}{\lambda_1} u_i)$$

چون $\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right| < 1$ در نتیجه

$$A^2 x = \lambda_1 (c_1 A u_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i \frac{\lambda_i^2}{\lambda_1} u_i = \lambda_1^2 (c_1 u_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^2 u_i)$$

$$\Rightarrow A^k x = \lambda_1^k (c_1 u_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k u_i)$$

$$A^{k+1} x = \lambda_1^{k+1} (c_1 u_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k+1} u_i)$$

برای درایه t ام داریم:

$$\Rightarrow \frac{(A^{k+1}x)_t}{(A^k x)_t} = \lambda_1 \frac{c_1 (u_1)_t + \sum_{i=2}^{n} c_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k+1} (u_i)_t}{c_1 (u_1)_t + \sum_{i=2}^{n} c_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k} (u_i)_t}, t = 1, 2, \ldots, n$$

n تا از این تساویها داریم . حال اگر $k \to \infty$ ، این کسر به λ_1 میل می کند که λ_1 بزرگترین مقدار ویژه ماتریس می باشد.

الگوریتم روش چنین می باشد اگر y_0 را بردار مشخصی فرض کنیم .

$$Z_{k+1} = Ay_k, \alpha_{k+1} = \|Z_{k+1}\|_\infty, y_{k+1} = \frac{1}{\alpha_{k+1}} Z_{k+1} \Rightarrow Z_{k+1} = \alpha_{k+1} y_{k+1}$$

در اینصورت α_{k+1} قدرمطلق بزرگترین مقدار ویژه است.

قضیه ۱-٤-۲

مقادیر ویژه ماتریس متقارن حقیقی ، همگی حقیقی هستند.

نتیجه : اگر ماتریس A متقارن با مقادیر ویژه متمایز باشد، بردارهای ویژه آن متعامدند.

قضیه ۱-٤-۳

مقادیر ویژه یک ماتریس معین مثبت حقیقی، همگی مثبت اند.

قضیه ۱-٤-٤

اگر A و B ماتریسهای مربعی باشند، آنگاه AB و BA دارای مقادیر ویژه یکسانند و نیز λ یک مقدار ویژه AB مضربی از k است اگر وفقط اگر λ یک مقدار ویژه BAمضربی از k باشد.