۱۰ /۱۲/ ۱۳۷۸

بسم‌الله الرّحمن الرّحیم

برآورد درجه دوم بیزی پایا در یک مدل رگرسیونی خطی کلی

بوسیله

فرج‌الله نگهداری

پایان نامه

ارائه شده به دانشکده تحصیلات تکمیلی بعنوان بخشی

از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ

درجه کارشناسی ارشد

دررشته

آمار

از

دانشگاه شیراز

شیراز، ایران

ارزیابی وتصویب شده توسط کمیته‌پایان نامه بادرجه: بسیار خوب

امضاء اعضاء کمیته پایان نامه

دکتر ناهید سنجری فارسی‌پور، دانشیار بخش آمار دانشگاه شیراز (رئیس کمیته) ....

دکتر جواد بهبودیان، استاد بخش آمار دانشگاه شیراز ....

دکتر عبدالرسول برهانی حقیقی، استادیار بخش آمار دانشگاه شیراز ....

آبان ماه ۱۳۷۸

تقدیم به

<< پدر و مادر >> عزیزم که همواره در طول زندگی مدیون
بزرگواریهایشان بوده‌ام

سپاسگزاری

سپاس مخصوص خداوندی است که به بندگان خود منت نهاد و آنها را به زینت معرفت آراسته و نعمت علم و قلم را همچون نگین درخشان سرلوحه وجودشان ساخت. شایسته است مراتب تشکر و قدردانی خود را از همه عزیزانی که به نحوی مرا در انجام این پایان‌نامه یاری فرمودند، خصوصاً خانم دکتر سنجری "رئیس کمیته پایان‌نامه" و آقایان دکتر بهبودیان و دکتر برهانی حقیقی، اعضای محترم کمیته پایان‌نامه، ابراز نمایم.

در پایان از خانم دکتر عباسی بخاطر راهنمائیها و کمکهای بی‌دریغشان کمال تشکر را دارم.

چکیده

برآوردهای درجه دوم بیزی پایا در یک مدل رگرسیونی خطی

توسط

فرج‌اله نگهداری

با توجه به اهمیت برآوردهای نقطه‌ای و برآوردهای فاصله‌ای در سالهای اخیر مطالعات زیادی در این زمینه انجام گرفته است. در فصل اول پایان‌نامه حاضر ضمن معرفی چند برآوردگر معمولی برآوردگر اشتاین مربوطه را بیان می‌کند و تابع توزیع و تابع چگالی برآوردگر اشتاین را برای واریانس آشوب در یک مدل رگرسیونی خطی بدست می‌آورد.

در فصل دوم با معرفی یک مدل رگرسیونی چند نوع برآوردگر اشتاین را معرفی می‌کنیم و سپس با ذکر و اثبات یک قضیه ثابت می‌کنیم که جانشین کردن برآوردگر اشتاین بجای برآوردهای معمولی در یک فاصله اطمینان باعث افزایش احتمال پوشش و کاهش طول فاصله می‌شود و در پایان فصل این نتایج را محاسبات عددی نشان خواهیم داد.

در فصل سوم روش بدست آوردن برآوردهای درجه دوم بیزی پایا را برای تابعی از مولفه‌های واریانس در یک مدل رگرسیون خطی را طی معرفی چند لم و قضیه بیان می‌کنیم.

در فصل چهارم روش بدست آوردن برآوردهای درجه دوم بیزی پایا را بر اساس جبر ژوردان بطور کامل بیان می‌کنیم و در آخر چند مثال مهم در این رابطه خواهیم آورد.

فهرست مطالب

عنوان صفحه

فهرست جدولها

عنوان | **صفحه**

فهرست اشکال

مقدمه و دورنما

فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی از توزیع نرمال با میانگین و واریانس نامعلوم μ، σ^2 باشند می‌دانیم که برآورد $S^2 = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$ بهترین برآورد پایای مقیاسی-مکانی تحت تابع زیان درجهٔ دو برای σ^2 در میان برآوردگرهای که به شکل ضریبی از $\delta(x) = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$ می‌باشد (اثبات در ضمیمه شماره ۱).

Zidek و Brewster در سال (۱۹۷۴) نشان دادند که S^2 یک برآورد نارواست. اشتاین در سال (۱۹۶۴) نشان داد که تحت تابع زیان درجه دوم برآوردگر

$$\hat{\sigma}_s^2 = min\left\{s^2, \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu_0)^2}{n+2}\right\} \tag{۲}$$

تحت تابع زیان درجه درجه دوم بر S^2 غلبه می‌کند که در آن μ_0 یک عدد ثابت می‌باشد. این برآوردگر، برآوردگر اشتاین نامیده می‌شود.

در سال (۱۹۶۸) Brown یک برآوردگری ارائه داد که بر S^2 غالب بود. بعد از آن نیز Zidek و Brewster در سال (۱۹۷۴) ایده‌های Brown را گسترش دادند و برآوردگرهای بهتری ساختند.

در این پایان‌نامه ما بیشتر با برآوردگرهای اشتاین کار می‌کنیم. برآوردگرهای اشتاین می‌توانند بعنوان نوعی از برآوردگرهای Pre-test (Preliminary test estimator) در نظر گرفته شوند. در حالت کلی بخصوص در زمینه رگرسیونی خطی این نوع برآوردگرها به آسانی می‌توانند بوسیله کاربران تعبیر شوند.

از طرف دیگر مطالعات مشابهی برای فاصله اطمینان σ^2 صورت گرفته است که در این زمینه Cohen (1972)، Nagata (1989) و Matta and Casella (1990) مطالعاتی داشته‌اند. در مورد برآورد فاصله‌ای سه مرحله که فقط به $\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$ بستگی دارد و مانند فاصله اطمینان معمولی تولید می‌شود،اشاره می‌کنیم. اینها عبارتند از I_{ML} یعنی فاصله اطمینان با کوتاهترین طول

و I_{su} یعنی کوتاهترین فاصله نااریب و I_{ET} یعنی فاصله با احتمال مساوی در دمها. اما چون σ^2 یک برآورد مقیاسی می‌باشد، Brown (1990) و Nagata (1989) نشان دادند که I_{ML} خیلی مناسب نمی‌باشد. برآورد فاصله‌ای I_{su} در این جا بهتر است زیرا نسبت نقاط انتهایی فاصله را مینیمم می‌کند. پس بنابراین به نظر می‌رسد که به منظور اصلاح، برآورد I_{su} را در نظر بگیریم. برآورد فاصله‌ای I_{ET} بیشتر بوسیلهٔ کاربران مورد استفاده قرار می‌گیرد.

اخیراً Ohtani (1993) تابع توزیع و تابع چگالی واقعی برآوردگر اشتاین $\hat{\sigma}_s$ را بدست آورده و با استفاده از محاسبات عددی نشان داده است که

$$Pr\left(\sigma^2 \in \left[\frac{n+1}{c_2}S^2, \frac{n+1}{c_1}S^2\right]\right) \leq Pr\left(\sigma^2 \in \left[\frac{n+1}{c_2}\hat{\sigma}_s^2, \frac{n+1}{c_1}\hat{\sigma}_s^2\right]\right) \qquad (3)$$

برای تمام μ و $\hat{\sigma}^2$ و در آن c_1 و $c_2$$(c_1 < c_2)$ ثابت‌هایی می‌باشند که در روابط زیر صدق می‌کنند

$$P(\nu \leq c_1) = Pr(\nu \geq c_2) = \frac{\alpha}{2}$$

که در آن ν دارای توزیع کای-اسکور با $n-1$ درجه آزادی می‌باشد. این نامساوی بیان می‌کند جانشین کردن برآوردگر $\hat{\sigma}_s^2$ بجای برآوردگر عادی S^2 در فاصله اطمینان I_{ET} باعث افزایش احتمال پوشش می‌شود. بعبارت دیگر اصلاح برآوردگر نقطه‌ای باعث اصلاح برآورد فاصله‌ای می‌شود.

در فصلهای آخر این پایان‌نامه مدل رگرسیونی خطی

$$\begin{aligned} E(y) &= X\beta, \\ Cov(y) &= \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2 v_i, v_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, k-1, v_k = I \end{aligned}$$

در نظر گرفته می‌شود. برای این مدل فرمولهای صریحی برای برآوردگرهای درجهٔ دوم پایای بیزی نااریب (Bayes invariant quadratic unbiased estimators) و برآوردگرهای درجهٔ دوم پایای بیزی (Bayes invariant quadratic estimators) بیان می‌شود.

در فصل اول تابع توزیع و تابع چگالی واقعی برآوردگر اشتاین $\hat{\sigma}_s^2$ را بدست می‌آوریم و برخی نتایج عددی در این زمینه مورد بررسی قرار گرفته می‌شود.

فصل اول

۱ـ تابع توزیع و تابع چگالی برآوردگر اشتاین $\hat{\sigma}_s^2$:

فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ و متغیرهای تصادفی با توزیع نرمال با میانگین و واریانس نامعلوم باشند و S^2 همان باشد که در مقدمه ذکر شد. S^2 یک برآوردگر اریب است زیرا $E(S^2) = \frac{n-1}{n+1}\sigma^2$ (ضمیمه شماره یک را ببینید). ولی میانگین توان دوم خطای آن کمتر از میانگین توان دوم خطای برآوردگر نااریب آن یعنی $S'^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ می‌باشد (ضمیمه شماره ۲). برآورد S'^2 را برآورد عادی می‌نامیم. برآوردگر $\hat{\sigma}_s^2$ را که موسوم به برآوردگر اشتاین می‌باشد به شکل زیر معرفی می‌کنیم:

$$\hat{\sigma}_s^2 = min\left[S^2, S^{*2}\right]$$

که در آن $S^{*2} = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2/a_2$ و $a_2 = n+2$ و μ_0 هر عدد ثابتی می‌باشد. حال متغیرهای زیر را معرفی می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\nu &= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{(m)} \\
\omega &= n(\bar{X} - \mu_0)^2/\sigma^2 \sim \chi^2_1(\lambda)
\end{aligned}$$

که در آن χ^2_m توزیع کای‌ـاسکور با $m = n-1$ درجه آزادی و $\chi^2_1(\lambda)$ توزیع کای‌ـاسکور غیر مرکزی با درجه آزادی یک و پارامتر غیر مرکزی $\lambda = \frac{n(\mu-\mu_0)^2}{\sigma^2}$ می‌باشد. می‌دانیم که ω و v متغیرهای تصادفی در بدو مستقل هستند. چون S^{*2} را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned}
S^{*2} &= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2/a_2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i - \bar{X} + \bar{X} - \mu_0)^2}{a_2} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i - \bar{X})^2}{a_2} + 2(\bar{X} - \mu_0)\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i - \bar{X})}{a_2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{(\bar{X} - \mu_0)^2}{a_2} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i - \bar{X})^2}{a_2} + 0 + \frac{n(\bar{X} - \mu_0)^2}{a_2} = \frac{\sigma^2(\nu + \omega)}{a_2},
\end{aligned}$$

و همچنین می‌توان S^2 را به صورت زیر نوشت:

$$S^2 = \frac{\sigma^2 \nu}{a_1}$$

که در آن $a_1 = n + 1$.

پس برآوردگر اشتاین را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_s^2 &= min(S^2, S^{*2}) = min(\tfrac{\sigma^2 \nu}{a_1}, \tfrac{\sigma^2(\nu+\omega)}{a_2}) \\ &= \begin{cases} \frac{\sigma^2 \nu}{a_1} & \text{if } \frac{\nu}{\nu+\omega} \leq a_0 \\ \frac{\sigma^2(\nu+\omega)}{a_2} & \text{if } \frac{\nu}{\nu+\omega} > a_0 \end{cases} \end{aligned} \tag{7}$$

که در آن $a_0 = (\frac{a_1}{a_2})(< 1)$ می‌باشد.

پس تابع توزیع $\hat{\sigma}_s^2$ به صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{aligned} F(c) &= Pr(\hat{\sigma}_s^2 \leq c) = Pr\left[(min(\tfrac{\sigma^2\nu}{a_1}, \tfrac{\sigma^2(\nu+\omega)}{a_2}) < c\right] \\ &= Pr\left[\left\{min(\tfrac{\sigma^2\nu}{a_1}, \tfrac{\sigma^2(\nu+\omega)}{a_2}) < c\right\} \cap \right\} \left(\tfrac{\nu}{\nu+\omega} \leq a_0) \cup (\tfrac{\nu}{\nu+\omega} > a_0)\right\}\Big] \\ &= Pr\left[\left\{(min(\tfrac{\sigma^2\nu}{a_1}, \tfrac{\sigma^2(\nu+\omega)}{a_1}) < c) \cap (\tfrac{\nu}{\nu+\omega} \leq a_0)\right\}\right. \\ &\cup \left.\left\{(min(\tfrac{\sigma^2\nu}{a_1}, \tfrac{\sigma^2(\nu+\omega)}{a_2}) < c) \cap (\tfrac{\nu}{\nu+\omega} > a_0)\right\}\right] \\ &= Pr(\tfrac{\sigma^2\nu}{a_1} < c \,\Big|\, \tfrac{\nu}{\nu+\omega} \leq a_0) P(\tfrac{\nu}{\nu+\omega} \leq a_0) \\ &+ Pr(\tfrac{\sigma^2(\nu+\omega)}{a_2} < c \,\Big|\, \tfrac{\nu}{\nu+\omega} > a_0) Pr(\tfrac{\nu}{\nu+\omega} > a_0) \end{aligned} \tag{8}$$

چون چگالی متغیرهای ω و ν به فرمهای زیر می‌باشند.

$$f_\omega(\nu) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{\nu}{2}} \nu^{\frac{m}{2}-1}}{2^{\frac{m}{2}} \Gamma(\frac{m}{2})} & \nu \geq 0 \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

$$f_\omega(\omega) = \begin{cases} \frac{exp\{-\frac{1}{2}(\lambda^2+\omega)\}\omega^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda^2)^j \, \omega^j & \omega \geq 0 \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

آنگاه جمله اول رابطه (۸) بصورت زیر در می‌آید.

$$Pr(\nu \le c_1^*, \frac{\nu}{\nu+\omega} > a_0)$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} \int\int_{\substack{v+w<c_1^* \\ \frac{v}{v+w} \le a_0}} k_i \nu^{\frac{m}{2}-1} \omega^{i-\frac{1}{2}} exp\left(-\frac{\omega+\nu}{2}\right) d\nu d\omega \qquad (9)$$

که در آن

$$c_1^* = \frac{a_1 c}{\sigma^2}, k_i = \frac{\omega_i}{2^{\frac{m+1}{2}+i}\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{1}{2}+i)},$$
$$\omega_i = exp(-\frac{\lambda}{2})(\frac{\lambda}{2})^i / c_i$$

با انجام تغییر متغیرهای $t_1 = \frac{v}{v+w}$ و $t_2 = v$ و انجام محاسبات ساده انتگرال‌گیری رابطهٔ (۹) به شکل زیر در می‌آید

$$= \sum_{i=0}^{\infty} k_i \int_0^{a_0} t_1^{-(i+\frac{3}{2})} (1-t_1)^{i-\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^{c_1^*} t_2^{\frac{m+1}{2}+i-1} exp(-\frac{t_2}{2t_1}) dt_2 \right\} dt_1 \qquad (10)$$

و با انجام تغییر متغیر دربارهٔ $Z = \frac{t_2}{2t_1}$، رابطهٔ ۱۰ به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\sum_{i=0}^{\infty} k_i 2^{\frac{(m+1)}{2}+i} \int_0^{a_1} t_1^{\frac{m}{2}-1} (1-t_1)^{i-\frac{1}{2}} P\left(\frac{(m+1)}{2} + i, c_1^*/2t_1\right) dt_1 \qquad (11)$$

با جایگذاری مقدار k_1 در رابطه ۱۱، جمله اول رابطه ۸ به فرم زیر در می‌آید.

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{\omega_i}{B(\frac{m}{2}, \frac{1}{2}+i)}\right] \int_0^{a_1} t_1^{\frac{m}{2}-1} (1-t_1)^{i-\frac{1}{2}} P(\frac{m+1}{2}, \frac{c_1^*}{2t_1}) dt_1$$

جملهٔ دوم رابطهٔ ۸ به صورت زیر می‌باشد.

$$Pr(\nu+\omega \le c_2^* | \frac{\nu}{\nu+\omega} > a_0) P(\frac{\nu}{\nu+\omega} > a_0)$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} \int\int_{\substack{v+w<c_2^* \\ \frac{v}{v+w} > a_0}} k_i \nu^{\frac{m}{2}-1} \omega^{i-\frac{1}{2}} exp\left(-\frac{v+w}{2}\right) d\nu d\omega$$

که در آن $c_2^* = \frac{ca_2}{\sigma^2}$.

با انجام تغییر متغیرهای $t_1 = \frac{v}{v+w}$ و $t_2 = v$ و انجام بعضی محاسبات ساده به رابطه ۱۲ به شکل زیر در می‌آید

$$\sum_{i=0}^{\infty} k_i \int_{a_0}^{\infty} t_1^{-(i+\frac{3}{2})} (1-t_1)^{i-\frac{1}{2}}$$
$$\times \left\{ \int_0^{c_2^* t_1} (t_2)^{(\frac{m+1}{2}+i-1)} exp(-\frac{t_2}{2t_1}) dt_2 \right\} dt_1 \qquad (13)$$

و دوباره با انجام تغییر متغیر $Z = \frac{t_2}{2t_1}$ رابطهٔ ۱۳ صورت زیر را خواهد داشت

$$\sum_{i=0}^{\infty} k_i 2^{\frac{(m+1)}{2}+i}\Gamma\left(\left(\frac{m+1}{2}\right)+i\right) B\left(\frac{m}{2},\frac{1}{2}+i\right)\left[1 - I_{a_0}\left(\frac{m}{2},\frac{1}{2}+i\right)\right] \times P\left(\frac{m+1}{2}+i, \frac{c_2^*}{2}\right) \tag{14}$$

با جایگذاری مقدار k_i در رابطهٔ ۱۴ جمله دوم رابطهٔ ۸ به صورت زیر در می‌آید

$$\sum_{i=0}^{\infty}\omega_i[-I_{a_0}(\frac{m}{2},\frac{1}{2}+i)]P(\frac{m+1}{2}+i,\frac{c_2^*}{2})$$

پس بطور کلی $F(c)$ به صورت زیر بیان می‌شود

$$\begin{aligned} F(c) &= \sum_{i=0}^{\infty}\left[\frac{\omega_i}{B(\frac{m}{2},\frac{1}{2}+i)}\right] \\ &\int_0^{a_0} t_1^{\frac{m}{2}-1}(1-t_1)^{i-\frac{1}{2}} \times P\left(\frac{(m+1)}{2}+i, \frac{c_1^*}{2t_1}\right) dt_1 \\ &+\sum_{i=0}^{\infty}\omega_i[1 = I_{a_0}(\frac{m}{2},\frac{1}{2}+i)]P(\frac{m+1}{2}+i,\frac{c_2^*}{2}) \end{aligned} \tag{15}$$

که در آن $\omega_i = exp\{-\frac{\lambda}{2}\}(\frac{\lambda}{2})^i/i!$ و $c_j^* = \frac{a_j c}{a_2}(j = 1,2)$ و $P(.,.)$ و $I(.,.)$ به ترتیب تابع گاما و بتای غیر کامل (in complete gamma and Beta function) می‌باشند و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} P(a,x) &= \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^x e^{-t}t^{a-1}dt & (a > 0) \\ I_x(a,b) &= \frac{1}{B(a,b)}\int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt & (0 \le x \le 1) \end{aligned}$$

تابع چگالی $\hat{\sigma}_e^2$ با مشتق‌گیری از $F(c)$ نسبت به c بدست می‌آید. برای انجام این کار از فرمول زیر استفاده میکنیم.

$$\frac{dP(\nu, c_j^*/2t_1^\delta)}{dc} = (\Gamma(\nu))^{-1}(\frac{a_i}{2\sigma^2})^\nu(t_1)^{-\nu}c^{\nu-1}exp\left(\frac{-a_j c}{2\sigma^2 t_1^\delta}\right) \tag{16}$$

اثبات فرمول فوق در ضمیمه شماره ۳ می‌باشد.

که در آن $\nu = \frac{m+1}{2} + i$ و $j = 1,2$ و $\delta = 0,1$

بنابراین تابع چگالی $\hat{\sigma}_s^2$ بصورت زیر در می‌آید

$$f(c) = \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i (\tfrac{a_1}{2\sigma^2})^{(\frac{m+1}{2})+i} \left(\Gamma(\tfrac{m}{2})\Gamma(\tfrac{1}{2}+i)\right)^{-1} c^{\frac{m+1}{2}+i-1}$$
$$\int_0^{a_0} t_1^{-(i+\frac{3}{2})}(1-t_1)^{i-\frac{1}{2}} exp(\tfrac{-a_2 c}{2\sigma^2 t_1})dt_1$$
$$+ \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i \left(\tfrac{a_2}{2\sigma^2}\right)^{\frac{m+1}{2}+i} \left(\Gamma(\tfrac{m+1}{2}+i)\right)^{-1} \tag{17}$$
$$\left[1 - I_{a_0}(\tfrac{m}{2}, \tfrac{1}{2}+i)\right] c^{(\frac{m+1}{2}+i-1)} exp\left(-\tfrac{a_2 c}{\sigma^2}\right).$$

تابع توزیع و تابع چگالی S^2 به شکل زیر هستند.

$$G(c) = Pr(S^2 < c) = P(\frac{\sigma^2 \nu}{a_1} < c) = P(\nu < c_1^*) \tag{18}$$
$$= P(\frac{m}{2}, \frac{C_1^*}{2})$$
$$= P(\frac{m}{2}, \frac{C_1^*}{2})$$

$$g(c) = 2^{(\frac{m}{2})}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)^{-1} (\frac{a_1}{\sigma^2})^{\frac{m}{2}} c^{\frac{m}{2}-1} exp\left(\frac{-a_1 c}{2\sigma^2}\right) \tag{19}$$

۲ـ محاسبات عددی

از آن جا که تابعهای توزیع و چگالی $\hat{\sigma}_s^2$ یک فرم پیچیده دارند، آنها را به صورت عددی محاسبه کرده‌ایم. مقدار پارامترهای استفاده شده در این محاسبات عددی عبارتند از $\sigma^2 = 1$ و $n = 4, 8, 12, 16, 20$ و $d = (\mu - \mu_0)^2 = 0, 0, 1, 0.3, 0.5, 1, 1.5$ و مقادیر مختلفی از c. چون روابط (۱۵) و (۱۷) شامل انتگرال می‌باشند از قاعده سیمپسون با تقسیمات جزئی ۲۰۰ و و با تقسیمات جزئی ۵۰۰ برای بعضی از پارامترها استفاده شده است و ثابت شده است که سریهای ۱۵ و ۱۷ همگرا می‌باشند (شرط همگرایی 10^{-4}).

چون نتایج در مقابل تغییرات n خیلی حساس می‌باشند ما تنها برای $n = 8$ نتایج زیر را بررسی می‌کنیم. شکل (۱) تابع‌های توزیع S^2 و $\hat{\sigma}^2$ را برای $d = 0$ و $d = 0/3$ نشان می‌دهد.

با توجه به شکل (۱) دیده می‌شود که تابع توزیع $\hat{\sigma}_s^2$ هر چه مقدار d بزرگتر شود ازبالا به توزیع S^2 نزدیکتر می‌شود. شکل (۲) تابعهای چگالی S^2 و $\hat{\sigma}_s^2$ را برای $d = 0, 0/3$ نشان می‌دهد. .