بِسْمِ اللّٰهِ الرّحمٰنِ الرّحيمِ

# تقدیم به:

آستان حقیقت،

پدر و مادرم

که از نگاهشان صلابت، از رفتارشان محبت، و از صبرشان ایستادگی را آموختم،

و

برادر و خواهر عزیزم.

# سپاسگزاری

سپاس خدایی که انسان را آفرید و او را به فضیلت تعلیم و تعلم بر دیگر مخلوقات برتری بخشید. خداوندا تو را شاکرم که همواره یاری‌رسانم بوده‌ای و دریچه‌های علم و معرفت را فرارویم گشوده‌ای و اکنون که این پایان نامه به اتمام رسید، بر خود لازم می دانم از الطاف و عنایت های بی دریغ همه عزیزانی که مرا در این راه راهنمایی کرده اند، سپاسگزاری نمایم.

تشکر و قدردانی بی‌دریغ از پدر و مادر عزیزم که در تمامی مراحل زندگی تا به امروز مشوق و پشتوانه‌ام بوده‌اند و برادر و خواهر نازنینم که همراه همیشگی‌ام بوده و هستند.

سپاس ویژه از سر کار خانم صدیقه جاهدی که در طول دوران انجام این پایان‌نامه با حسن اخلاق همیشگی‌شان در به سرانجام رساندن آن کمک شایانی کردند و ازجناب آقای دکتر اسماعیل حسام الدینی که مشاوره این پروژه را به عهده داشتند نیز تشکر می‌نمایم.

سپاس و درود بر دیگر اساتید محترم گروه ریاضی دانشگاه صنعتی شیراز، جناب آقای دکتر فخارزاده جهرمی، جناب آقای دکتر ملکی، جناب آقای دکتر هاشمی، جناب آقای دکتر مهدی پور و جناب آقای دکتر حاجی شعبانی که در طول این دوره افتخار شاگردی و کسب دانش و معرفت را از ایشان داشتم.

هم‌چنین از دوستان و هم‌کلاسیهای عزیز و مهربان که در این سه سال لحظات و خاطرات خوشی در کنارشان رقم خورد قدردانی می‌نمایم.

نیست بر دلم جز الف قامت دوست          چه کنم حرف دگر یاد نداد استادم.

# چکیده

## تقریب تکراری نقاط ثابت عملگرهاروی فضای خطی نرم دار

بوسیله‌ی:

**محمدحسین درخشان**

در این پایان نامه روش های تکراری مختلفی نظیر ایشیکاوا و مان که توسط محققین مختلفی مورد مطالعه قرار گرفته است را معرفی نموده و همگرایی این دنباله ها را به نقاط ثابت رده خاصی از عملگرهایی که در تعدادی شرایط انقباضی صدق می کنند، مورد بررسی قرار می دهیم . سرعت همگرایی دنباله های تکراری پیکارد، مان و ایشیکاوا از جمله موضوعاتی است که در این پایان نامه به آن خواهیم پرداخت . با اندکی تغییر، همگرایی دنباله های بازگشتی مان و ایشیکاوا را به نقطه ثابت مشترک خانواده ای متناهی از عملگرها روی فضای نرم دار و باناخ را بررسی نموده و فرآیند دنباله های تکراری همراه با خطا را مورد مطالعه قرار می دهیم.

# فهرست

# فهرست جدولها

# فهرست شکلها

# فصل ۱

# مقدمات

# فصل اول

# مقدمات

## ۱−۱ تاریخچه

هر گاه $E$ یک زیرمجموعه از فضای برداری $X$ و عملگر $T : E \longrightarrow E$ داده شده باشد جواب های معادله $x = Tx$ به نقاط ثابت عملگر $T$ یا نقاطی که در عملگر $T$ تغییری به وجود نمی آورند معروف می باشند. مهم ترین موضوع برای تحلیل نظریه ی حل پذیری چنین عملگرهایی، قضیه نقطه ثابت است. وجود جواب مساله نقطه ثابت و امکان تقریب $x$ توسط روش های تکراری از جمله مسائلی است که محققین زیادی به مطاله و بررسی آن پرداخته و می پردازند. یکی از کاربردهای قضیه نقطه ثابت و روش های تکراری استفاده در حل دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ است که در آن $A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ x \in \mathbb{R}^n$ و $b \in \mathbb{R}^n$ معلوم می باشد. یک روش عملی برای ساختن روش های تکراری به منظور حل دستگاه معادلات خطی، استفاده از تجزیه ماتریس $A$ به صورت $A = N - M$ است که در آن $N$ به گونه ای انتخاب می شود که $Nx = k$ به راحتی و به طور یکتا برای هر بردار $k$ قابل حل باشد. به این ترتیب با دوباره نویسی معادله اصلی به معادلات

$$x = N^{-1}Mx \ + \ N^{-1}b,$$

$$x_n = N^{-1}Mx_{n-1} \ + \ N^{-1}b.$$

می رسیم. با محاسبه خطا داریم $x - x_n = (N^{-۱}M)^n(x - x_۰)$ و این عبارت قابل حل خواهد بود. در این صورت ثابت می شود که شرط همگرایی روش تکراری، به $\| N^{-۱}M \|$ بر می گردد. در نهایت شرط لازم و کافی برای همگرایی روش تکرار به شعاع طیفی $N^{-۱}M$ مربوط می شود ( [۲۳] ، [۴۱]، [۲۵] ). از دیگر کاربرد های نقطه ثابت و روش های تکراری می توان به حل گسسته سازی معادله لاپلاس دسته ای از معادلات جزیی بیضوی، حل معادلات خطی و غیر خطی انتگرالی نیز اشاره نمود. در دهه‌های اخیر، عناوین بسیاری از تکرار تقریب نقاط ثابت نگاشت های انقباضی و عملگرهای معمولی، به فضای متریک و فضای هیلبرت یا رده‌های مختلفی از فضاهای باناخ تعمیم داده شده است ( [۲۳]، [۱۷]، [۲۷]، [۱۵]، [۲۴]، [۳۰] ). در حالت کلی در چنین فضاهایی برخی از دنباله ها وجود دارند که همواره به نقاط ثابت این عملگرهاهمگرا نیستند، به همین دلیل لزوم معرفی و بررسی دنباله های بازگشتی دیگر ضروری بنظر می رسد. از جمله دنباله هایی که در این پایان نامه مورد بررسی قرار می گیرند می توان به دنباله پیکارد [۱]، مان [۲]، ایشیکاوا [۳] و کراسنوسلسکیج [۴] اشاره نمود. این دنباله ها در زمینه های ریاضی فیزیک، پردازش سیگنال و کامپیوتر کاربرد فراوانی دارد.

## ۱ــ۲ تعاریف و پیش نیازها

در این بخش تعاریفی بیان می کنیم که در بخش ها و فصل های بعدی از آن ها استفاده می شود.

**تعریف ۱.۱**: فرض کنید $X$ یک مجموعه غیرتهی باشد. در این صورت تابع حقیقی مقدار $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک تابع فاصله یا یک متر بر $X$ می نامیم هرگاه $d$ در شرایط زیر صدق

[۱] Picard
[۲] Mann
[۳] Ishikawa
[۴] Krasnoselskij

کند:

(۱) $d(x,y) \geq 0$،

(۲) $d(x,y) = 0$ اگر و فقط اگر $x = y$ ،

(۳) $d(x,y) = d(y,x)$،

(۴) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$، ( نابرابری مثلثی ) .

جفت مرتب $(X,d)$ یک فضای متریک نامیده می شود.

**مثال ۲.۱**: فرض کنید $X$ یک مجموعه غیرتهی و $E$ مجموعه تمام توابع حقیقی مقدار و کراندار روی $X$ باشد. در این صورت تابع $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ تعریف شده با

$$d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \ : x \in X \ , f,g \in E\},$$

یک متر روی $E$ است. این متر $d$ به متر یکنواخت معروف است.

**تعریف ۳.۱**: فرض کنید $X$ یک فضای متریک و $T$ یک خودنگاشت روی $X$ باشد. در این صورت $T$ در شرایط لیپشیتس با ثابت $l \geq 0$ صدق می کند اگر نابرابری زیر برای هر $x,y \in X$ برقرار باشد

$$d(Tx,Ty) \leq ld(x,y).$$

**تعریف ۴.۱**: فرض کنید $X$ یک فضای متریک و $T$ یک خودنگاشت روی $X$ باشد. هر گاه نابرابری زیر برای هر $x,y \in X$ برقرار باشد

$$d(Tx,Ty) \leq ld(x,y),$$

که در آن $0 \leq l < 1$ در این صورت $T$ یک نگاشت انقباضی نامیده می شود.

**تعریف ۵.۱**: فرض کنید $X$ یک مجموعه غیر تهی و $T: X \longrightarrow X$ یک خودنگاشت باشد، $x \in X$ یک نقطه ثابت از $T$ نامیده می شود هر گاه $Tx = x$.

**تعریف ۶.۱**: فرض کنید $E$ زیر مجموعه غیرتهی از فضای باناخ $X$ باشد. یک عملگر $T: E \longrightarrow E$ یک عملگر شبه انقباضی نامیده می شود اگر و فقط اگر برای هر $x, y \in E$، $0 < h < 1$ وجود داشته باشد به طوری که رابطه زیر برقرار باشد:

$$\| Tx - Ty \| \leq \max h\{\| x - y \|, \| x - Tx \|, \| y - Ty \|, \| x - Ty \|, \| y - Tx \|\}.$$

**تعریف ۷.۱**: فرض کنید $E$ زیر مجموعه غیرتهی از فضای باناخ $X$ باشد. عملگر $T: E \longrightarrow E$ یک عملگر غیر بسطی نامیده می شود اگر و فقط اگر برای هر $x, y \in E$ نابرابری زیر برقرار باشد:

$$\| Tx - Ty \| \leq \| x - y \| .$$

در تعریف ۳.۱، اگر $l = 1$ باشد در این صورت عملگر $T$ تبدیل به عملگر غیر بسطی می شود.

**تعریف ۸.۱**: فضای نرم دار $E$ و عملگر دلخواه $T: E \longrightarrow E$ در نظر بگیرید . به ازای یک $x_0$ دلخواه در $E$ دنباله تعریف شده با:

$$x_{n+1} = Tx_n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \cdots.$$

دنباله بازگشتی پیکارد نامیده می شود.

**قضیه ۹.۱**: ( [۱۳]) (قضیه نگاشت انقباضی ). فرض کنید $T$ یک نگاشت انقباضی از فضای متریک کامل $X$ به توی خودش باشد. در این صورت

(۱) $T$ یک نقطه ثابت یکتا مانند $p$ در $X$ دارد،

(۲) اگر $x_\circ$ یک نقطه دلخواه در $X$ باشد، آنگاه دنباله $\{x_n\}$ تعریف شده با

$$x_{n+1} = Tx_n,\ n = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

همگرا به نقطه $p$ است و

$$d(x_n, p) \leq \frac{l^n}{1-l} d(x_1, x_\circ),$$

که در آن $l$ ثابت لیپشیتس نگاشت $T$ است.

**اثبات:** برای اثبات به [۱۳] مراجعه کنید.

قضیه ۹.۱ کاربردهای بسیاری در حل معادلات غیرخطی دارد، ولی نگاشتی که در قضیه ۹.۱ صدق می کند باید پیوسته باشد در غیر این صورت قضیه ۹.۱ برقرار نمی باشد. یکی از کاربردهای نگاشت های انقباضی را می توان در قضیه پیکارد روی وجود جواب معادلات دیفرانسیل با شرایط مرزی در نظر گرفت.

مثال زیر نشان می دهد که در یک فضای متریک کامل اگر یک نگاشت دارای شرایط انقباضی نباشد لزوماً دارای نقطه ثابت نیست.

**مثال ۱۰.۱**: فرض کنید $E = \{x \in \mathbb{R} :\ x \geq 1\}$ یک فضای متریک کامل با نرم معمولی باشد . نگاشت $T$ با ضابطه

$$Tx = x + \frac{1}{x}\ ,$$

در نظر بگیرید. از آنجا که

$$\begin{aligned} \| Tx - Ty \| &\leq \| x - y \| \left(1 + \frac{1}{\| xy \|}\right) \\ &\leq l \| x - y \| . \end{aligned}$$

که $l > ۱$ ، پس $T$ انقباضی نیست. هم چنین $T$ نقطه ثابتی در $E$ ندارد.

**مثال ۱۱.۱**: فضای $E = \mathbb{R}$ با نرم معمولی را در نظر بگیرید. فرض کنید $k = [\frac{۱}{۲}, ۲]$ و $T : k \longrightarrow k$ با ضابطه

$$Tx = \frac{۱}{x} \ ,$$

داده شده باشد. به وضوح $T$ یک عملگر لیپشیتس با ثابت $l = ۴$ است. اما دنباله بازگشتی پیکارد $x_{n+۱} = Tx_n$ به ازای هر نقطه اولیه $x_\circ$ همگرا نیست. در حقیقت در این مثال دنباله پیکارد، یک دنباله تناوبی به صورت

$$\frac{۱}{x_\circ} \ , x_\circ \ , \frac{۱}{x_\circ} \ , \cdots ,$$

می باشد.

**تعریف ۱۲.۱**: نگاشت $T$ از فضای برداری $X$ به $\mathbb{R}$ یک نگاشت خطی نامیده می شود اگر در شرایط زیر صدق کند:

**(۱)** $T(x+y) = T(x) + T(y)$ برای هر $x, y \in X$ ،

**(۲)** $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ برای هر $x \in X \ , \ \alpha \in \mathbb{R}$.

از طرفی نگاشت $T : X \longrightarrow \mathbb{R}$ یک نگاشت زیر خطی نامیده می شود هر گاه نگاشت $T$ در شرایط زیر صدق کند:

**(۱)** $T(x+y) \leq T(x) + T(y)$ برای هر $x, y \in X$ ،

**(۲)** $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ برای هر $x \in X \ , \ \alpha \geq \circ$.

در زیر قضیهٔ کلاسیک هان باناخ که کاربردهای بسیار گسترده و عمیقی دارد را بیان می کنیم .

**قضیه ۱۳.۱**: فرض کنید $p$ نگاشتی زیر خطی روی فضای برداری مانند $X$ و $Y$ یک زیرفضای برداری از $X$ باشد. اگر $T$ یک نگاشت خطی روی $Y$ باشد به طوری که به ازای هر $x \in Y$، $T(x) \leq p\ (x)$، آن گاه می توان $T$ را به یک نگاشت خطی مانند $g$ روی $X$ چنان توسیع داد که به ازای هر $x \in X$، $g(x) \leq p(x)$.

**اثبات:** برای اثبات به [۱۳] مراجعه کنید.

**تعریف ۱۴.۱**: فرض کنید $X$ یک فضای خطی روی میدان $F$ ( اعداد حقیقی یا اعداد مختلط ) باشد. تابع $\|\ .\ \| : X \longrightarrow [\ ۰\ ,\ \infty\ )$ روی $X$ یک نرم نامیده می شود هر گاه:

**(۱)** $\| x \| \geq ۰$ برای هر $x \in X$،

**(۲)** $\| x \| = ۰$ اگر و تنها اگر $x = ۰$،

**(۳)** $\| kx \| = |k| \| x \|$ برای هر $x \in X\ ,\ k \in F$،

**(۴)** $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ برای تمام $x, y \in X$.

زوج مرتب $(X, \|\ .\ \|)$ یک فضای خطی نرم دار نامیده می شود.

**تعریف ۱۵.۱**: زیر مجموعه $E$ از فضای برداری حقیقی $X$ محدب نامیده می شود اگر برای هر $x, y \in E$ و $\alpha \in [۰, ۱]$ داشته باشیم :

$$\alpha x + (۱ - \alpha) y \in E.$$

## ۱−۳ دنباله های بازگشتی

در این بخش به معرفی چندین دنباله بازگشتی که در بخشهای بعدی مورد بحث قرار می گیرند خواهیم پرداخت.

**تعریف ۱.۱۶**:([۲۱]) فرض کنید $E$ یک فضای نرم دار، $x_\circ \in E$ و $T : E \longrightarrow E$ یک عملگردلخواه باشد. عدد حقیقی $\lambda \in [\circ, ۱]$ در نظر بگیرید. دنباله $\{x_n\}$ تعریف شده با

$$\begin{cases} x_\circ \in E \\ x_{n+۱} = (۱-\lambda)x_n + \lambda\, Tx_n, \qquad n = \circ, ۱, ۲, \cdots \end{cases}$$

دنباله بازگشتی کراسنوسلسکیج نامیده می شود.

**تعریف ۱.۱۷**:([۲۳]) فرض کنید $E$ یک فضای نرم دار، $x_\circ \in E$ و $T : E \longrightarrow E$ یک عملگردلخواه باشد. دنباله $\{\alpha_n\}$ از اعداد حقیقی واقع در $[\circ, ۱]$ را در نظر بگیرید. دنباله $\{x_n\}$ تعریف شده به صورت

$$x_{n+۱} = (۱-\alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n, \quad n = \circ, ۱, ۲, \cdots \qquad (۱−۱)$$

به دنباله بازگشتی مان معروف است .

**تعریف ۱.۱۸**: ([۱۷]) فرض کنید $E$ یک فضای نرم دار، $x_\circ \in E$ و $T : E \longrightarrow E$ یک عملگردلخواه باشد. دنباله های $\{\alpha_n\}$ و$\{\beta_n\}$، از اعداد حقیقی واقع در $[\circ, ۱]$ را در نظر بگیرید. دنباله $\{x_n\}$ که به صورت

$$x_\circ \in E$$

$$x_{n+۱} = (۱-\alpha_n)x_n + \alpha_n\, Ty_n, \qquad n = \circ, ۱, ۲, \cdots \qquad (۱−۲)$$

$$y_n = (۱-\beta_n)x_n + \beta_n\, Tx_n.$$

تعریف می شود به دنباله بازگشتی ایشیکاوا شهرت دارد.

در رابطه (۱−۱) هر گاه به ازای هر $n$، $\alpha_n = \lambda$ در نظر گرفته شود آنگاه دنباله مان به دنباله کراسنوسلسکیج تبدیل می شود. از طرفی اگر در رابطه (۱−۱) به ازای هر $n$، $\alpha_n = ۱$ اختیار شود دنباله بازگشتی مان به دنباله بازگشتی پیکارد تبدیل می شود.

# فصل ۲

# همگرایی دنباله‌های مان و ایشیکاوا توسط عملگرهای زامفیرسکو

# فصل دوم

# همگرایی دنباله‌های مان و ایشیکاوا توسط عملگرهای زامفیرسکو

## ۲—۱ عملگر زامفیرسکو

در قضیه نگاشت انقباضی باناخ دیدیم که اگر عملگر $T$ شرط انقباضی قضیه را داشته باشد به ناچار پیوسته خواهد بود. سؤالی که به طور طبیعی به ذهن می رسد این است که آیا شرایط انقباضی دیگری وجود دارد به طوری که پیوستگی عملگر $T$ را نتیجه ندهد؟ در سال ۱۹۶۸، کن نان [۱۹] به این سؤالی پاسخ مثبت داد. او قضیه نقطه ثابتی را ارائه کرد که در آن با جایگزینی شرط انقباضی دیگری وجود نقطه ثابت را نشان می دهد بدون آنکه لزوماً عملگر $T$ پیوسته باشد. در شرط انقباضی معرفی شده توسط کن نان به ازای هر $y, x$ در $X$، عدد $b \in (\circ, \frac{1}{2})$ چنان وجود دارد که

$$d(x,y) \leq b[d(x,Tx) + d(y,Ty)]. \qquad (۱—۲)$$

بعد از کن نان ، افراد زیادی با ارائه شرایط مختلف انقباضی به اثبات قضیه نقطه ثابت پرداخته اند بدون آنکه عملگر $T$ پیوسته باشد. برای مثال مقاله [۳۵] و مراجع واقع در آن را ملاحظه کنید. یکی از این نویسندگان شخصی به نام چاترجا [۸] می باشد که با شرطی مشابه (۲—۱) قضیه نقطه ثابت را مجدداً با این شرط اثبات نمود که عدد $c \in (\circ, \frac{1}{2})$ موجود است به طوری