إنه من سليمان وإنه بسم الله الرحمن الرحيم

مجتمع علوم

دانشکده ریاضی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی محض— جبر

نمایش جبرهای لی فازی

استاد راهنما: دکتر بیژن دواز

استاد مشاور: دکتر محمدعلی ایرانمنش

پژوهش و نگارش: زهرا مظفر

دی ۱۳۸٦

تقدیم به :

پیشگاه حضرت ولیعصر، روحی و ارواح اللعالمین لتوابه مقدمه الغداه،

تقدیم به :

دو زهره مشترک زندگیم،

دو ستاره طلوع کرده‌ام،

دو محراب دلم،

دو عبادتگاه جانم،

خورشید و ماهی که در آسمان عمرم می‌درخشند و همواره دلم بخاطرشان چون آتشکده‌ای فروزان است،

دو شمعی که روشن هستند و شبستان جانم را روشنی بخشند،

پدرم که سخاوت صد هزاران «حاتم طایی» قطره‌ای از اقیانوس ایثار و سخاوت اوست،

و

مادرم که مصداق بزرگ و تجسم اکمل و اعلای مادری است.

قدردانی

سپاس بیکران به درگاه ایزد منان که اولین معلم انسان است و برگزیده خود را به سوی انسانیت گسیل و علم و حکمت خود را به او آموخت تا انسان را تزکیه کند، درودی بی‌پایان بر انبیا الهی که معلمان راستین بشری بودند و حمدی بی‌منتها به درگاه خداوند متعال که توفیق قدم گذاشتن در راه علم و کسب دانش را به ما عنایت فرمود.

این مختصر نقد کم عیاری است نثار همه آنانی که سوختند و مرا حرفی آموختند و بنده خود ساختند.

نظر به مقام و جایگاه بلند استادی و راهنمایی‌های استادانه که منطبق بر حکمت و دانایی است و در تمام مراحل کار مانند چراغی فرارویم قرار گرفته به مصداق کلام؛

« من لم یشکر المخلوق و لم یشکر الخالق »

بدین وسیله از شما استاد ارجمند جناب آقای دکتر بیژن دواز استواریتان را تحسین و پایداریتان را صادقانه می‌ستایم.

از استاد گرامی جناب آقای دکتر ایرانمنش که در سمت استاد مشاور بر بنده منت گذارده کمال تشکر را دارم.

از جناب آقای دکتر هوشمند اصل که با قبول داوری این پایان نامه از سوی ایشان، توفیقی بزرگ نصیب اینجانب شد، قدردانی می‌کنم.

از جناب آقای دکتر عامری که باوجود مشغله کاری داوری این پایان نامه را بر عهده داشتند تشکر می‌کنم.

همچنین از کلیه اساتید دلسوز و بزرگوار گروه ریاضی به خصوص جناب آقای دکترمدرس مصدق و دکتر مظاهری و دکتر مشتاقیون به خاطر زحماتی که در طول دوره تحصیل متقبل شدند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

هم چنین همراهی‌های دلسوزانه و مادرانه سرکارخانم عابدینی را ارج می‌نهم. از دوستان عزیزم مرضیه عموشاهی و سمیه شاکری سپاسگذارم و نمی‌دانم که با چه زبانی و با کدام کلام محبتشان را ارج نهم و از آقای حیدری نیز کمال تشکر را دارم و به چه سان بازگردانم لحظه‌ای از بسیار لحظاتی را که مزاحم ایشان بوده‌ام.

به پایان می‌آورم این کلام را با طلب توجه خوانندگان به این ابیات:

الا ای خردمند پاکیزه خوی　　　خردمند نشیده‌ام عیبجوی

قبا گر حریرست و گر پرنیان　　　به ناچار حشوش بود در میان

تو گر پرنیانی نیابی مجوش　　　کرم کارفرما و حشوش بپوش

بسمه تعالی

دانشگاه یزد مدیریت تحصیلات تکمیلی	صورتجلسه دفاعیه پایان نامه دانشجوی دوره کارشناسی ارشد	شناسه: ب/ک/۳

جلسه دفاعیه پایان نامـــه تحصیلی خانم زهرا مظفر دانشجوی کارشناسی ارشد رشتـــه/گرایش: ریاضی محض

تحت عنوان: نمایش جبرهای لی فازی

و تعداد واحد: ۶ درتاریخ ۸۶/۱۰/۱۰ باحضور اعضای هیأت داوران (به شرح ذیل) تشکیل گردید.

پس از ارزیابی توسط هیأت داوران، پایان‌نامه با نمره: به عدد ۱۹/۲۵ به حروف نوزده و بیست و پنج صدم و

درجه عالی مورد تصویب قرارگرفت.

عنوان	نام و نام خانوادگی	امضاء
استاد/ استادان راهنما:	بیژن دواز	
استاد/ استادان مشاور:	محمدعلی ایرانمنش	
متخصص وصاحبنظرداخلی:	محمدرضا هوشمند اصل	
متخصص و صاحبنظر خارجی:	رضا عامری	

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه (ناظر)

نام ونام خانوادگی: بی بی فاطمه میرجلیلی

امضاء:

چکیده

در این پایان‌نامه، ابتدا مفاهیمی از مجموعه‌های فازی و جبرهای لی و ارتباط بین آن‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. پس از آن به تعریف سری‌های مرکزی کاهشی یک ایده‌آل فازی و پوچ‌توانی ایده‌آل‌های فازی پرداخته و نمایش الحاقی یک جبر لی را معرفی می‌کنیم و برخی روابط بین نمایش الحاقی و پوچ‌توانی ایده‌آل‌های فازی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. سپس فرم کیلینگ را در مورد مجموعه‌های فازی معرفی کرده به خواص آن می‌پردازیم. پس از آن جبر لی خارج‌قسمتی را همراه با چندین قضیه مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در آخر، یک نوع جدید از زیرجبر (ایده‌آل) لی فازی را معرفی کرده و آن را $(\in, \in \vee q)$—زیرجبر (ایده‌آل) فازی می‌نامیم. این زیرجبر (ایده‌آل) لی فازی با ایده‌آل‌های ترازش مشخص می‌شود و پس از آن تعمیمی از $(\in, \in \vee q)$—زیرجبر (ایده‌آل) لی فازی را ارائه می‌دهیم.

فهرست مندرجات

مقدمه

مجموعه‌های فازی برای اولین بار در سال ۱۹٦۵ توسط پروفسور لطفی‌زاده[1] [۲٦] مطرح شد. این نظریه از زمان ارائه آن تاکنون گسترش و تعمیق بسیاری در هر دو جنبه نظری و کاربردی یافته است. نظریه مجموعه فازی ابزارهایی فراهم می‌آورد که می‌توان به وسیله آن‌ها نحوه استدلال و تصمیم‌گیری انسانی را صورت‌بندی ریاضی نمود و از الگوهای ریاضی بدست آمده، در زمینه‌های گوناگون علوم و تکنولوژی استفاده کرد.

پس از ارائه تعریف مجموعه فازی، سؤال این است که آیا تعاریف و قضایای موجود در عرف ریاضیات تا چه اندازه قابل پیاده شدن با این نظریه جدید است، در این زمینه کارهای زیادی از جمله در جبر، توپولوژی، آمار و غیره صورت گرفته است.

مفهوم زیرگروه فازی، توسط رزنفیلد [2] [۲۰] در سال ۱۹۷۲ مطرح شد و پس از آن لیو[3] [۱۷] در سال ۱۹۸۲ مفهوم ایده‌آل فازی از یک حلقه را معرفی کرد. زیرمدول‌های فازی نیز برای اولین بار توسط نگویتا [4] [۱۸] و رالسکو [5] [۱۸] در سال ۱۹۷۵ معرفی

Zadeh[1]

Rosenfeld[2]

Liu[3]

Negoita[4]

Ralescu[5]

شدند. اخیراً دواز [۸]، ایده‌آل‌های فازی یک جبرلی را مورد بررسی قرار داده و قضایا و نتایجی در این رابطه به دست آورده است. به ویژه رابطه بین ایده‌آل های فازی و زیرمجموعه‌های تراز را بیان کرده است. یهیا [۶] [۲۴] نیز در زمینه ایده‌آل‌های لی فازی و جبرلی خارج قسمتی نتایجی بدست آورده است.

اما آنچه در این پایان‌نامه ارائه کرده‌ایم:

در فصل اول با مفاهیم اولیهٔ مجموعه فازی و جبر لی که در فصل‌های بعدی مورد مطالعه قرار خواهند گرفت، آشنا می‌شویم.

در فصل دوم مفاهیمی هم‌چون سری‌های مرکزی کاهشی و پوچ‌توانی ایده‌آل های فازی را مطرح و نمایش الحاقی یک جبر لی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در فصل سوم با رابطه فازی و ارتباط آن با جبر لی خارج‌قسمتی آشنا خواهیم شد.

در فصل چهارم نوع جدید از زیرجبرهای لی فازی را معرفی کرده و آن‌ها را $(\in, \in \vee q)$—زیرجبر لی فازی می‌نامیم. هم چنین تعمیمی از آن‌ها را ارائه می‌دهیم.

---

[۶] Yehia

فصل ۱

جبر لی فازی و زیرجبرهای لی فازی

در این فصل ابتدا با مجموعه‌های فازی و جبر لی به طور مختصر آشنا می‌شویم. سپس تعاریفی در مورد ایده‌آل‌ها و زیرجبرهای فازی ارائه و چند قضیه در این موارد مطرح می‌کنیم. در این فصل از مراجع [۸]، [۱۲] و [۳۰] استفاده شده است.

۱.۱ تعاریف اولیه در مورد مجموعه‌های فازی و جبر لی

فرض کنید X مجموعه مرجع باشد، یک مجموعه فازی A در X به وسیله یک تابع عضویت $\mu_A : X \longrightarrow [0, 1]$ مشخص می‌شود، که در آن μ_A به هر عنصر x در X یک عدد حقیقی $\mu_A(x)$ را در فاصله $[0, 1]$ نسبت می‌دهد، که این عدد بیانگر میزان عضویت x در A یا ارزش عضویت x در A است. بنابراین هر قدر $\mu_A(x)$ به یک نزدیکتر باشد میزان عضویت x در A بیشتر است. یک مجموعه فازی A به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \ : \ x \in X\}$$

برای مجموعه معمولی A، تابع عضویت همان تابع مشخصه $\chi_A : X \longrightarrow \{0, 1\}$ است.

۱.۱.۱ تعریف. فرض کنید X یک مجموعه مرجع و A یک زیرمجموعه فازی از آن باشد. مجموعه نقاطی از X که برای آن نقاط $\mu_A(x) > 0$، تکیه‌گاه A نامیده و با $supp\, A$

نشان می‌دهیم.

مقدار $M = \sup_x \mu_A(x)$ ارتفاع مجموعه A نامیده و آن را با hgt نشان می‌دهیم. اگر ارتفاع مجموعه فازی A برابر یک باشد، آن‌گاه A نرمال نامیده می‌شود، در غیر این صورت A را زیرنرمال گوییم. بدیهی است که هر مجموعه فازی زیرنرمال A را می‌توان با تقسیم $\mu_A(x)$ ها بر ارتفاع A، نرمال کرد.

اگر x عنصری باشد که برای آن $\mu_A(x) = \frac{۱}{۲}$، x را یک نقطه گذر (معبر) A گوییم. اگر برای هر x، $\mu_A(x) = \frac{۱}{۲}$ آن‌گاه اصطلاحاً A را منافق می‌نامیم.

۲.۱.۱ مثال. فرض کنید $X = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$. یک زیرمجموعه فازی از X مانند B که کوچک بودن را نشان دهد می‌تواند به وسیله‌ی تابع عضویت زیر تعریف شود

$$\mu_B(x) = \begin{cases} ۱, & x = ۱ \\ ۰/۶, & x = ۲ \\ ۰/۳, & x = ۳ \\ ۰/۱, & x = ۴ \\ ۰, & x = ۵ \end{cases}$$

در اینجا مثلاً $\mu_B(۲) = ۰/۶$، یعنی عدد ۲ با درجه ۰/۶ عضو مجموعه فازی B است و $\mu_B(۵) = ۰$، یعنی عدد ۵ اصلاً عضو مجموعه فازی B نیست و $\mu_B(۱) = ۱$، یعنی عدد ۱ کاملاً عضو مجموعه فازی B است. به عبارت دیگر عدد ۲ ویژگی کوچک بودن را با درجه ۰/۶ داراست و عدد ۵ اصلاً دارا نیست و عدد یک کاملاً داراست.

برای مجموعه فازی B، $suppB = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ و $M = \sup_x \mu_B(x) = ۱$، یعنی ارتفاع B برابر یک است و بنابراین B یک مجموعه فازی نرمال است. به علاوه B، هیچ معبری ندارد.

هنگامی که X یک مجموعه‌ی متناهی (و یا نامتناهی شمارا) به صورت $\{x_۱, ..., x_n\}$

باشد، یک زیرمجموعه فازی A از X به صورت‌های زیر نشان داده می‌شود:

$$A = \{\frac{\mu_A(x_1)}{x_1}, ..., \frac{\mu_A(x_n)}{x_n}\},$$

$$A = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)/x_i,$$

که در عبارت دوم، منظور از علامت $\sum$، اجتماع است نه جمع حسابی.

هنگامی که X یک مجموعه پیوسته باشد، نماد زیر به کار برده می‌شود.

$$A = \int_X \mu_A(x)/x,$$

که در آن منظور از علامت $\int$، اجتماع است.

۳.۱.۱ تعریف. فرض کنید A و B مجموعه‌های فازی از مجموعه مرجع X و به ترتیب با توابع عضویت μ_A و μ_B باشند، آن‌گاه

شمولیت: A زیرمجموعه فازی B است اگر و فقط اگر برای هر $x \in X$، $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ و با $A \subseteq B$ نشان می‌دهیم.

متمم: مجموعه فازی E، متمم A است هرگاه برای هر $x \in X$، $\mu_E(x) = 1 - \mu_A(x)$ و با $E = A'$ نشان می‌دهیم.

اجتماع: مجموعه فازی C را اجتماع دو مجموعه فازی A و B گویند اگر و فقط اگر برای هر $x \in X$، $\mu_C(x) = max(\mu_A(x), \mu_B(x))$ و با $A \cup B$ یا $A \vee B$ نشان می‌دهیم.

اشتراک: مجموعه فازی D را اشتراک دو مجموعه فازی A و B گویند اگر و فقط اگر برای هر $x \in X$، $\mu_D(x) = min(\mu_A(x), \mu_B(x))$ و با $A \cap B$ یا $A \wedge B$ نشان می‌دهیم.

اجتماع و اشتراک را می‌توان برای خانواده‌ای از مجموعه‌های فازی A_α با توابع عضویت $\mu_{\cup_\alpha A_\alpha}$ در X به صورت زیر تعمیم داد،

اجتماع: $C = \cup_\alpha A_\alpha$، اگر و فقط اگر برای هر $x \in X$، $\mu_C(x) = \sup_\alpha \mu_{A_\alpha}(x)$،

اشتراک: $D = \cap_\alpha A_\alpha$ اگر و فقط اگر برای هر $x \in X$، $\mu_D(x) = \inf_\alpha \mu_{A_\alpha}(x)$.

هم‌چنین روابط زیر برای مجموعه‌های فازی برقرار است:

اعمال اجتماع و اشتراک بین دو مجموعه فازی، دارای ویژگی‌های خودتوانی، جابجایی و شرکت‌پذیری هستند، یعنی برای مجموعه‌های فازی دلخواه، C, B, A،

$$A \cap A = A \ \ , \ \ A \cup A = A,$$

$$A \cap B = B \cap A \ \ , \ \ A \cup B = B \cup A,$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \ \ , \ \ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

عمل اجتماع، نسبت به اشتراک و عمل اشتراک نسبت به اجتماع ویژگی توزیع‌پذیری دارند، یعنی

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

هم‌چنین قوانین دمورگان برای هر دو مجموعه فازی برقرار است، یعنی برای هر دو مجموعه فازی A و B روابط زیر برقرار است:

$$(A \cap B)' = A' \cup B',$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B'.$$

همان طور که می‌دانیم H یک زیرگروه، گروه G است مشروط به این‌که

۱) اگر $x, y \in H$، آن‌گاه $xy \in H$ و

۲) اگر $x \in H$، آن‌گاه $x^{-1} \in H$.

برای اولین بار رزنفلد در مقاله [۲۲] در سال ۱۹۷۱ مفهوم زیرگروه فازی را ارائه نمود و لذا وی را می‌توان بنیانگذار جبر فازی لقب داد.

۴.۱.۱ **تعریف.** فرض کنید G یک گروه و μ مجموعه‌ای فازی در G است، μ را زیرگروه فازی G گوییم اگر روابط زیر برقرار باشند:

۱) برای هر $x, y \in G$، $\mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$،

۲) برای هر $x \in G$، $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$.

بنابراین مشاهده می‌شود که شرط (۱) بسته بودن μ را تحت عمل گروه بیان می‌کند و شرط (۲) بسته بودن μ را تحت عمل معکوس می‌رساند.

۵.۱.۱ **تعریف.** فرض کنید μ یک زیرمجموعه فازی از X است برای هر $t \in [0, 1]$، مجموعه $U(\mu; t) = \mu_t = \{x \in X \mid \mu(x) \geq t\}$ را زیرمجموعه تراز μ می‌نامیم.

۶.۱.۱ قضیه. احکام زیر برقرار است:

۱) خانواده $\{A_\alpha \mid \alpha \in [0, 1]\}$ یکنواست، یعنی اگر $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ آن‌گاه $A_\beta \subseteq A_\alpha$.

۲) $A_\alpha \subseteq B_\alpha \iff A \subseteq B$.

۳) $(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$.

۴) $(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$.

اثبات : به [۳۰] مراجعه شود.

۷.۱.۱ **تعریف.** فرض کنید R حلقه‌ای دلخواه و μ یک زیرمجموعه فازی از R است، آن‌گاه μ را یک ایده‌آل چپ (راست) فازی R گویند هرگاه

۱) μ زیرگروه فازی گروه $(R,+)$ شود، یعنی برای هر $x, y \in R$،

$$\mu(x - y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$$

۲) برای هر $x, y \in R$ داشته باشیم:

$$\mu(xy) \geq \mu(y) \quad (\mu(xy) \geq \mu(x)).$$

اگر μ تواماً ایده‌آل چپ و راست باشد، آن را ایده‌آل فازی R گویند.

مفهوم یک زیرفضای فازی از یک فضای برداری را اولین بار کاتساراس و لیو در [۱۵] معرفی کردند. آن‌ها بسیاری از قضایا و نتایج فضاهای برداری را به زیرفضاهای فازی گسترش دادند.

۸.۱.۱ تعریف. فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F است. زیرمجموعه فازی μ از V، زیرفضای فازی V نامیده می‌شود، اگر برای هر $x, y \in V$ و $\alpha \in F$ شرایط زیر برقرار باشد:

۱) به ازای هر $x, y \in V$، $\mu(x+y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$،

۲) به ازای هر $x \in V$، $\mu(-x) \geq \mu(x)$،

۳) به ازای هر $x \in V$ و هر $\alpha \in F$، $\mu(\alpha x) \geq \mu(x)$.

۹.۱.۱ قضیه. برای زیرمجموعه فازی μ از فضای برداری V، عبارات زیر معادلند:

۱) μ یک زیرفضای فازی V است.

۲) μ_t برای $t \in Im\mu$، یک زیرفضای V است.

اثبات : ۲ $\Longrightarrow$ ۱) فرض μ یک زیرفضای فازی V است. اگر $x, y \in \mu_t$ آن‌گاه $\mu(x) \geq t$ و $\mu(y) \geq t$. چون

$$\mu(x+y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) \geq t$$

در نتیجه $x + y \in \mu_t$. هم چنین اگر $\alpha \in F$، آن‌گاه چون

$$\mu(\alpha x) \geq \mu(x) \geq t$$

در نتیجه $\alpha x \in \mu_t$. بنابراین μ_t، یک زیرفضای V است.

$1 \Longrightarrow 2$) فرض کنید $\mu(x) = t_1$ و $\mu(y) = t_2$. در نتیجه $x \in \mu_{t_1}$ و $y \in \mu_{t_2}$. فرض کنید $t_1 < t_2$ در این صورت $\mu_{t_2} \subseteq \mu_{t_1}$. بنابراین $y \in \mu_{t_1}$ و در نتیجه بنا به زیرفضا بودن μ_{t_1}، $x + y \in \mu_{t_1}$ و در نتیجه

$$\mu(x+y) = t_1 \geq \mu(x) \wedge \mu(y) = t_1.$$

حال فرض کنید $\mu(x) = t$، بنابراین $x \in \mu_t$. بنابه زیرفضا بودن μ_t، برای $\alpha \in F$، $\alpha x, -x \in \mu_t$. در نتیجه $\mu(\alpha x) = t, \mu(-x) = t$ و روابط برقرار است.

۱۰.۱.۱ تعریف. (اصل گسترش) فرض کنید X, X' دو مجموعه و $f : X \longrightarrow X'$ یک نگاشت است. برای هر زیرمجموعه فازی μ از X، مجموعه فازی σ از X' به صورت

$$\sigma(y) = \begin{cases} \sup\{\mu(x) \ : \ x \in f^{-1}(y)\} & f^{-1}(y) \neq, \\ \\ 0 & f^{-1}(y) = \end{cases}$$

تعریف می‌شود و $\sigma(y)$ را تصویر μ تحت f نامیده و با $f(\mu)$ نشان می‌دهیم. برای هر مجموعه فازی υ از X'، مجموعه فازی μ از X به صورت

$$\mu(x) = \upsilon(f(x))$$

تعریف می‌شود، که $\mu(x)$ را پیشنگاره υ تحت f می‌نامیم و با $f^{-1}(\upsilon)$ نشان می‌دهیم.

۱۱.۱.۱ تعریف. فرض کنید $*$ یک عمل دوتایی روی مجموعه X است. فرض کنید μ, σ دو مجموعه فازی X هستند. ضرب $\mu * \sigma$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(\mu * \sigma)(x) = \begin{cases} \sup_{x=y*z}\{\mu(y) \wedge \sigma(z)\}, & y, z \in X \\ \\ 0 & \text{.در غیر این صورت} \end{cases}$$

۱۲.۱.۱ تعریف. فرض کنید f یک نگاشت از مجموعه X به X' باشد. زیرمجموعه فازی μ از X، f–ناوردا نامیده می‌شود اگر برای هر $x, y \in X$،

$$f(x) = f(y) \Longrightarrow \mu(x) = \mu(y).$$

۱۳.۱.۱ لم. فرض کنید $f : X \longrightarrow X'$ یک نگاشت است. آن‌گاه

۱) برای هر زیرمجموعه فازی μ از X، $\mu \subseteq f^{-1}(f(\mu))$ و تساوی هنگامی رخ می‌دهد که μ f–ناوردا شود.

۲) برای هر دو زیرمجموعه فازی μ, μ' از X، اگر $\mu \subseteq \mu'$ آن‌گاه $f(\mu) \subseteq f(\mu')$.

۳) برای هر مجموعه فازی σ از X'، $\sigma = f(f^{-1}(\sigma))$.

۴) برای هر دو مجموعه فازی σ, σ' از X'، اگر $\sigma \subseteq \sigma'$ آن‌گاه $f^{-1}(\sigma) \subseteq f^{-1}(\sigma')$.

اثبات : به وضوح برقرار است.

۱۴.۱.۱ تعریف. یک جبر لی عبارت است ازیک فضای برداری L روی میدان F با عمل $L \times L \longrightarrow L$ و ضابطه $[x \ y] \longrightarrow (x, y)$ است که در سه اصل زیر صدق می‌کند:

۱) $[x \ y]$ برای هر $x, y \in L$ دو خطی است.

۲) برای هر $x \in L$، $[x \ x] = 0$.

۳) برای هر $x, y, z \in L$، $[[x \ y] \ z] + [[y \ z] \ x] + [[z \ x] \ y] = 0$.

اصل سوم، اتحاد ژاکوبی نامیده می‌شود.

یک نتیجه ساده از اصل (۱) و (۲) به صورت زیر است:

$$0 = [x + y \ \ x + y] = [x \ \ x] + [x \ \ y] + [y \ \ x] + [y \ \ y] = [x \ \ y] + [y \ \ x].$$

بنابراین $[y \ x] = -[x \ y]$ و بنابراین ضرب لی پاد جابجایی است.