بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه بوعلی سینا
دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان‌نامه:

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض
گرایش جبر

عنوان:

مقاطع معکوس نیم‌گروه‌ها و ترتیبهای میانگین‌پذیر روی آنها

استاد راهنما:
دکتر محمد موسایی

پژوهشگر:
پژمان ساعتیان

بهمن ۱۳۸۶

مهربان خدایا
آرامشی عطا فرما تا بپذیرم آنچه را تغییر نایافتنی است
شهامتی ده
تا تغییر دهم آنچه را می‌توانم
بینشی ده
تا بدانم تفاوت آن دو را

پیشکشی اندک به ساحت مقدس سایه‌گستر وجودم
حضرت ولی عصر (عج)
و

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم

به پاس سالها مهر و صبوری

و

برادران پرمهرم

که وجودشان گرمی بخش لحظات زندگی‌ام است

دانشگاه بوعلی سینا

دانشکده علوم

گروه ریاضی

جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد

آقای پژمان ساعتیان

تحت عنوان:

مقاطع معکوس نیم گروه ها و ترتیبهای میانگین پذیر روی آنها

Inverse Transversals of Semigroups and their Amenable Orders

به ارزش ۴ واحد در روز **چهارشنبه** مورخ **۸۶/۱۱/۲٤** ساعت **١٤** در محل **آمفی تئاتر ۱** و با حضور اعضای هیأت داوران زیر برگزار گردید و با نمره .....۱۹/۳..... درجه.....عالی........ ارزیابی شد.

ترکیب اعضای هیأت داوران:

ردیف	سمت در هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی ـ گروه/ دانشکده/ دانشگاه	محل امضاء
۱.	استاد راهنما	محمد موسایی	استادیار- ریاضی/ علوم/ بوعلی سینا	
۲.	داور خارجی	عزیزاله عزیزی	استادیار- ریاضی/ علوم/ بین المللی امام خمینی(ره)	
۳.	داور داخلی	کریم سامعی	دانشیار- ریاضی/ علوم/ بوعلی سینا	

قدردانی

خدای خوبم را سپاسگزارم که بر من منت نهاد تا اندکی خوشه‌چین راه علم و معرفت باشم و سعادت حضور در مکتب علم ریاضیات را نصیب من نمود، هر چند دراز است ره مقصود و من نوسفرم.

در پرتو لطف الهی افتخار شاگردی در محضر استاد ارجمند **دکتر محمد موسایی** را داشته و از راهنمایی‌های بی‌شائبه و ارزشمند ایشان بهره بردم. در سپاس و تقدیر از این بزرگوار که کلامش همواره روشنگر راهم بوده است، ناتوانم.

از اساتید ارجمند آقای دکتر سامعی و آقای دکتر عزیزی که با لطف فراوان رهاورد تلاشم را مطالعه و داوری نموده‌اند، متشکرم. امیدوارم که در سایه‌ی الطاف ایزد منان بیش از پیش موفق باشند.

از استاد گرانقدر خانم دکتر دانشخواه که افتخار شاگردی ایشان را داشته‌ام، تشکر می‌کنم.

با تواضع تام و از صمیم قلب سپاسگزارم از دو یار همیشگی، **پدر و مادرم**، کسانی که شعر زندگی‌ام ترنم آهنگ مهربانی آنان است. عزیزانی که راستی قامتم در شکستگی قامتشان تجلی یافت. آنانی که امروزم را مدیون سالها مهر و عشق بی‌دریغشان هستم و آنچه امروز به‌دستشان می‌سپارم تحفه‌ایست ناچیز.

از برادران عزیزم پیمان و پویان و نیز دوستان گرامی که کمکهای صمیمانه‌ی آنان در به انجام رسیدن این پایان‌نامه بسیار مؤثر بوده، صمیمانه سپاسگزارم.

پژمان ساعتیان

زمستان ۸۶

نام خانوادگی دانشجو: **ساعتیان** نام: **پژمان**

عنوان پایان‌نامه: **مقاطع معکوس نیم‌گروه‌ها و ترتیبهای میانگین‌پذیر روی آنها**

استاد راهنما: **دکتر محمد موسایی**

مقطع تحصیلی: **کارشناسی ارشد** رشته: **ریاضی محض** گرایش: **جبر** دانشگاه: **بوعلی‌سینا**

دانشکده: **علوم** تاریخ فارغ‌التحصیلی: **۸۶/۱۱/۲۴** تعداد صفحه: **۹۶**

کلید واژه‌ها: **ترتیب میانگین‌پذیر، ترتیب طبیعی، مقطع معکوس، نیم‌گروه موضعاً معکوس، نیم‌گروه منظم**

چکیده:

در این پایان‌نامه، فرض می‌کنیم S یک نیم‌گروه منظم باشد، در این‌صورت یک مقطع معکوس از S، یک زیر نیم‌گروه معکوس، مانند T است، به‌طوری‌که برای هر $x \in S$، $|T \cap V(x)| = ۱$، که در آن $V(x)$ نشان دهنده‌ی مجموعه‌ی عناصر معکوس x است. بنابراین عنصر منحصربه‌فرد مجموعه‌ی $T \cap V(x)$ را با x° و T را با $S^\circ = \{x^\circ : x \in S\}$ نشان می‌دهیم.

یک ترتیب $\leq$ روی S، نسبت به S° میانگین‌پذیر نامیده می‌شود هرگاه

(۱) $\leq$ نسبت به ضرب S سازگار باشد؛

(۲) روی عناصر خودتوان، ترتیب $\leq$ با ترتیب طبیعی $\leq_n$، برابر باشد؛

(۳) اگر $x \leq y$، آنگاه $x^\circ x \leq_n y^\circ y$ و $xx^\circ \leq_n yy^\circ$.

اکنون S را یک نیم‌گروه موضعاً معکوس در نظر می‌گیریم (معادلاً، $S^\circ S S^\circ \subseteq S^\circ$). ما یک توصیف کامل از ترتیب‌های میانگین‌پذیر روی S ارایه می‌دهیم و سپس مشخص می‌کنیم که ترتیب طبیعی، کوچکترین ترتیب میانگین‌پذیر روی S است. همچنین یک تناظر دوسویی بین مجموعه‌ی ترتیبهای میانگین‌پذیر روی S با مجموعه‌ی مخروطهای مکالیستر از S°، برقرار می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم، هر ترتیب میانگین‌پذیر روی S°، دارای گسترش منحصربه‌فرد به یک ترتیب میانگین‌پذیر، روی S است.

فهرست مندرجات

مقدمه

ابتدا به بیان تاریخچه‌ای در مورد نیم‌گروه‌ها، نیم‌گروه‌های منظم و نیم‌گروه‌های معکوس می‌پردازیم و سپس خلاصه‌ای از روند شکل‌گیری موضوع این پایان‌نامه تحت عنوان «مقاطع معکوس نیم‌گروه‌ها و ترتیبهای میانگین‌پذیر روی آنها» ارایه می‌کنیم. در پایان، به شرح مطالب تنظیم شده در فصلهای این نگارش، به طور مختصر پرداخته می‌شود.

عبارت «نیم‌گروه» برای اولین بار در سال ۱۹۰۴ توسط سجر[۱] مطرح گردید (به [۲۲] رجوع شود). در سال ۱۹۰۵ اولین مقاله در مورد نیم‌گروه‌ها توسط دیکسون[۲] به چاپ رسید که این مقاله بسیار مختصر بود (به [۱۰] رجوع شود). از سال ۱۹۰۵ تا سال ۱۹۲۷ مطالعه‌ی قابل توجهی در مورد نظریه‌ی نیم‌گروه‌ها انجام نپذیرفت ولی از سال ۱۹۲۸ این نظریه مورد مطالعه‌ی جدی قرار گرفت که در سال ۱۹۲۸ ساسکویچ[۳] اولین کسی بود که نظریه‌ی نیم گروه‌ها را به‌طور جدی مورد مطالعه قرار داد (به [۲۳] رجوع شود) که نتایج به‌دست آمده خیلی قابل استفاده نبود و نیز دارای کاستی‌هایی بود، تا اینکه در سال ۱۹۴۰ ریس[۴] با ارایه‌ی مقاله‌ی [۲۱]، توانست این کاستی‌ها را برطرف کند. همچنین مطالب ارایه شده توسط کلیفورد[۵] و دابریل[۶] در سال ۱۹۴۱ (به [۷] و [۱۱] رجوع شود) نقش قابل توجهی در شکل‌گیری نیم‌گروه‌ها داشته است. از سال ۱۹۴۱ تاکنون، نظریه‌ی نیم‌گروه‌ها مورد توجه تعدادی از دانشمندان قرار گرفته که این امر موجب گسترش این نظریه گردیده است.

---

[۱] Seguier

[۲] Dickson

[۳] Suschkewitsch

[۴] Rees

[۵] Clifford

[۶] Dubreil

عبارت «منظم» زمانی مطرح شد که برای اولین بار، حلقه‌های منظم، توسط وُن نیومن[۷] در سال ۱۹۳۶ مورد مطالعه قرار گرفت (به [۲۶] رجوع شود). این تحقیق در شکل‌گیری نیم‌گروه‌های منظم، مؤثر واقع گردید، که در سال ۱۹۵۶ مطالبی در مورد عناصر منظم و D–کلاسهای منظم توسط میلر[۸] و کلیفورد به چاپ رسید (به [۱۶] رجوع شود) و از آن به بعد مقالات فراوانی درباره‌ی نیم‌گروه‌های منظم چاپ و ارایه گردیده است.

نیم‌گروه‌های معکوس برای اولین بار توسط وَگنر[۹] در سالهای ۱۹۵۲ و ۱۹۵۳ (به [۲۴] و [۲۵] رجوع شود) و نیز مستقل از او پرستون[۱۰] سه مقاله در سال ۱۹۵۴ در این مورد ارایه کرد (به [۱۸]، [۱۹] و [۲۰] رجوع شود). همچنین در سال ۱۹۶۱ کلیفورد و پرستون مقاله‌ای به‌طور مشترک در مورد نیم‌گروه‌های معکوس ارایه کردند (به [۸] رجوع شود) که این مقاله پایه و اساس مطالعات بعدی قرار گرفت. قابل ذکر است که نیم‌گروه‌های معکوس و گروه‌ها، با وجود خاصیتهای مشابه بسیار، در بعضی موارد، متفاوت هستند.

در مورد مطالب مذکور مقالات و کتابهای فراوانی چاپ گردیده است که از جمله می توان به مراجع [۹]، [۱۲] و [۱۳] اشاره نمود.

در اینجا به روند شکل‌گیری موضوع این پایان‌نامه که برگرفته از مقاله‌ی

Blyth. T. S. **2001**. Amenable Orders Associated with Inverse Transversals. Journal of Algebra 240, pp. 143-164.

می‌باشد می‌پردازیم. ترتیبهای میانگین‌پذیر روی نیم‌گروه‌های معکوس توسط بلیتس[۱۱] و مَکفادن[۱۲] به‌ترتیب در سالهای ۱۹۷۳ و ۱۹۷۵ توصیف گردیدند (به [۱] و [۱۵] رجوع شود). مکالیستر[۱۳] در سال ۱۹۸۰ در مرجع [۱۴]، S را یک نیم‌گروه معکوس فرض کرد و سپس زیر نیم‌گروه‌هایی را از آن به نام، R–مخروطها ساخت. او نشان داد که بین مجموعه‌ی ترتیبهای میانگین‌پذیر چپ و مجموعه‌ی R–مخروطها یک تناظر دوسویی برقرار است. بلیتس در سال ۲۰۰۱ در مرجع [۳] (مرجع اصلی این پایان‌نامه)، S را یک نیم‌گروه موضعاً معکوس فرض نمود و یک زیرنیم‌گروه معکوس S° از S را، به‌نام مقطع معکوس ساخت. او نشان داد، بین مجموعه‌ی مخروطهای S° و مجموعه‌ی ترتیبهای میانگین‌پذیر، یک تناظر دوسویی برقرار است. در حقیقت بلیتس با شرایط ضعیفتری توانست نتایج بیشتری را نسبت به مکالیستر به‌دست آورد. زیرا اگر S یک نیم‌گروه معکوس باشد، در این‌صورت $S = S^\circ$.

این پایان‌نامه در سه فصل تنظیم گردیده که به شرح زیر می‌باشد:

---

[۷] Von Neumann

[۸] Miller

[۹] Vagner

[۱۰] Preston

[۱۱] Blyth

[۱۲] McFadden

[۱۳] McAlister

فصل اول برگرفته از مراجع [۱۲]، [۱۳] و [۱۷] می باشد. این فصل مشتمل بر دو بخش و شامل مفاهیم مقدماتی بوده که این مفاهیم در فصلهای بعدی مورد استفاده قرار گرفته است.

فصل دوم برگرفته از مراجع [۲]، [۴]، [۵] و [۶] می باشد. این فصل مشتمل بر سه بخش است. در سراسر این فصل S یک نیم‌گروه منظم فرض شده، سپس یک زیرنیم‌گروه معکوس، به‌نام مقطع معکوس از S را معرفی کرده و آن را با S° نشان می‌دهیم. همچنین زیرنوارهای منظم چپ I (راست Λ) و زیر نیم‌گروه‌های معکوس چپ L (راست R) از S، معرفی می‌شوند. در ادامه با ارایه‌ی چندین قضیه و لم، ویژگیها و ارتباط آنها با یکدیگر مشخص می‌شوند. در پایان، با ارایه‌ی قضیه‌های ۲.۲۳، ۲.۲۴ و ۲.۲۵ شرایط معادلی به ترتیب برای موضعاً معکوس راست، موضعاً معکوس چپ و موضعاً معکوس بودن نیم‌گروه S، بیان می گردد.

فصل سوم برگرفته از مرجع [۳] می‌باشد. این فصل مشتمل بر چهار بخش است. ابتدا فرض می‌کنیم S یک نیم‌گروه منظم با مقطع معکوس S° باشد، ترتیب میانگین‌پذیر نسبت به S° را روی S، تعریف می‌کنیم. همچنین با توجه به خاصیتهای R و L، R و L-مخروطها (به‌ترتیب با Q و P نشان داده می‌شوند)، معرفی می‌شوند. سپس قضیه‌هایی درباره‌ی آنها بیان و اثبات می‌گردند. در ادامه ترتیبهای نرمال روی S معرفی می‌شوند و با استفاده از مخروطهای Q و P، ترتیب نرمال $\leq_{Q,\,P}$ ساخته می‌شود و با ارایه‌ی یک مثال، مشخص می‌گردد که ترتیب $\leq_{Q,\,P}$ در حالت کلی نرمال نیست. سپس با ارایه یکی از قضیه‌های اصلی، ثابت می‌شود که، موضعاً معکوس بودن S با سازگاری ترتیب $\leq_{Q,\,P}$ و با میانگین‌پذیری ترتیب $\leq_{Q,\,P}$، معادل است. همچنین مشخص می‌شود که اگر S موضعاً معکوس باشد، آنگاه برای هر ترتیب میانگین‌پذیر $\leq$ روی S، می‌توان R-مخروط C و L-مخروط D را ساخت به‌طوری‌که $\leq_{C,\,D}=\leq$. بویژه با ارایه یکی دیگر از قضیه‌های اصلی، ثابت می‌شود که ترتیب طبیعی $\leq_n$، کوچکترین ترتیب میانگین‌پذیر، روی S است. در پایان، مخروطهای مکالیستر از S° معرفی می‌شوند و نشان داده می‌شود که اگر S موضعاً معکوس باشد، آنگاه بین ترتیبهای میانگین‌پذیر و مخروطهای مکالیستر از S°، یک تناظر دوسویی وجود دارد، که این قضیه یکی از قضیه‌های اصلی این فصل می‌باشد.

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

۱.۱ مفاهیمی از نیم‌گروه‌ها

۱.۱ تعریف. فرض کنیم S یک مجموعه‌ی غیرتهی باشد. در این‌صورت، $(S,\ \mu)$ را یک گروهواره گوییم هرگاه، μ یک عمل دوتایی روی S باشد.

۲.۱ تعریف و نمادگذاری. گروهواره‌ی $(S,\ \mu)$ را یک نیم‌گروه گوییم هرگاه، μ دارای خاصیت شرکت‌پذیری باشد. یعنی، برای هر $x,\ y,\ z \in S$ داشته باشیم

$$\mu(\mu(x,\ y),\ z) = \mu(x,\ \mu(y,\ z)).$$

از این پس، به‌جای $(S,\ \mu)$ و $\mu(\mu(x,\ y),\ z) = \mu(x,\ \mu(y,\ z))$، به‌ترتیب از نمادهای $(S,\ .)$ و $(xy)z = x(yz)$ استفاده می‌کنیم.

۳.۱ مثال. گروهواره‌های $(\mathbb{N},\ +)$، $(\mathbb{Z},\ +)$ و $(Mat_{n\times n}(\mathbb{Q}),\ +)$ نیم‌گروه هستند ولی گروهواره‌ی $(\mathbb{Z},\ -)$، نیم‌گروه نیست.

۴.۱ تعریف. نیم‌گروه S را یک نیم‌گروه جابه‌جایی گوییم هرگاه، برای هر $x,\ y \in S$ داشته باشیم

$$xy = yx.$$

۵.۱ مثال. نیم‌گروه‌های $(\mathbb{N},\ +)$، $(\mathbb{Z},\ +)$ و $(Mat_{n\times n}(\mathbb{Q}),\ +)$ جابه‌جایی هستند ولی نیم‌گروه $(Mat_{n\times n}(\mathbb{Q}),\ \times)$ برای $n \geq ۲$، جابه‌جایی نیست.

۶.۱ تعریف. فرض کنیم S یک نیم‌گروه و T زیرمجموعه‌ی غیرتهی از آن باشد. در این‌صورت، T را یک زیرنیم‌گروه S گوییم هرگاه، T نسبت به عمل S یک نیم‌گروه باشد. یعنی، برای هر $x,\ y \in T$ داشته باشیم

$$xy \in T.$$

۷.۱ مثال. ماتریسهای زیر را در نظر بگیرید:

$$o = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix},\quad a = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix},\quad b = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix},\quad c = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix},\quad d = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}.$$

فرض کنیم $S = \{o,\ a,\ b,\ c,\ d\}$ و ضرب روی S را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$\cdot$	o	a	b	c	d
o	o	o	o	o	o
a	o	a	b	o	o
b	o	o	o	a	b
c	o	c	d	o	o
d	o	o	o	c	d

در این‌صورت، $(S,\ .)$ یک نیم‌گروه است که زیرمجموعه‌های $\{o,\ a,\ b,\ d\}$ و $\{o,\ a,\ c,\ d\}$ زیرنیم‌گروه آن هستند. همچنین زیرمجموعه‌ی $\{o,\ a,\ b,\ c\}$، زیرنیم‌گروه S نیست.

۸.۱ تعریف و نمادگذاری. فرض کنیم S یک نیم‌گروه باشد و نیز $x \in S$. در این‌صورت، x را یک عنصر خودتوان گوییم هرگاه، $x^۲ = x$. مجموعه‌ی عناصر خودتوان S را با $E(S)$ نشان می‌دهیم.

۹.۱ مثال:

(۱) در نیم‌گروه $(\mathbb{N},\ +)$، داریم $E(\mathbb{N}) = \phi$.

(۲) در نیم‌گروه $(\mathbb{Z},\ +)$، داریم $E(\mathbb{Z}) = \{۰\}$.

(۳) در نیم‌گروه $(\mathbb{Z},\ \times)$، داریم $E(\mathbb{Z}) = \{۰,\ ۱\}$.

۱۰.۱ تذکر. فرض کنیم S یک نیم‌گروه باشد و نیز $A,\ B \subseteq S$. در این‌صورت اگر $A \subseteq B$، آنگاه $E(A) \subseteq E(B)$.

۱۱.۱ تعریف. نیم‌گروه S را یک **نوار** گوییم هرگاه، هر عنصر آن، خودتوان باشد و زیرنیم‌گروه T از S را یک زیرنوار نامیم هرگاه، $T \subseteq E(S)$.

۱۲.۱ مثال. ماتریسهای زیر را در نظر بگیرید:

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

فرض کنیم $S = \{a,\ b,\ c\}$ و ضرب روی S را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

.	a	b	c
a	a	a	c
b	b	b	c
c	c	c	c

در این‌صورت، $(S,\ .)$ یک نیم‌گروه است که همه‌ی عناصر آن، خودتوان می‌باشند. بنابراین، S یک نوار است.

۱۳.۱ تعریف. نوار S را **نرمال** گوییم هرگاه، برای هر $x,\ y,\ z,\ t \in S$ داشته باشیم

$$xyzt = xzyt.$$

۱۴.۱ مثال. نوار S در مثال ۱۲.۱، یک نوار نرمال است.

۱۵.۱ تعریف. نوار S را، **نرمال چپ (راست)** گوییم هرگاه، برای هر $x,\ y,\ z \in S$ داشته باشیم

$$xyz = xzy \quad (xyz = yxz).$$

۱۶.۱ تعریف. فرض کنیم S یک نیم‌گروه باشد. در این‌صورت، عنصر ۱ را **همانی** S گوییم هرگاه، برای هر $x \in S$، داشته باشیم

$$x1 = 1x = x.$$

۱۷.۱ مثال. عنصر همانی نیم‌گروه‌های $(\mathbb{N}, \times)$، $(\mathbb{Z}, +)$ و $(Mat_{n\times n}(\mathbb{Q}), \times)$ به‌ترتیب یک، صفر و ماتریس همانی می‌باشد ولی نیم‌گروه $(\mathbb{N}, +)$، عنصر همانی ندارد.

۱۸.۱ تعریف. اگر S یک نیم‌گروه باشد، S^1 را $S \cup \{1\}$ تعریف می‌کنیم و به آن، **یک تکواره** گوییم.

۱۹.۱ قضیه. عنصر همانی یک تکواره، منحصر به‌فرد است.

اثبات. [۱۳، صفحه‌ی ۲] ■

۲۰.۱ تعریف. فرض کنیم S یک نیم‌گروه باشد و نیز $a \in S$. در این‌صورت، a را **یک عنصر منظم** گوییم هرگاه، عنصری از S، مانند x وجود داشته باشد به‌طوری‌که، $axa = a$.

۲۱.۱ تعریف. نیم‌گروه S را، **یک نیم‌گروه منظم** گوییم هرگاه، هر عنصر آن، منظم باشد.

۲۲.۱ مثال. نیم‌گروه S در مثال ۷.۱، یک نیم‌گروه منظم است.

۲۳.۱ تعریف. نیم‌گروه S را، **منظم چپ (راست)** گوییم هرگاه، برای هر $x, y \in S$ داشته باشیم

$$xyx = xy \quad (xyx = yx).$$

۲۴.۱ تعریف. نیم‌گروه منظم S را، **ارتدکس**[1] گوییم هرگاه، $E(S)$ زیرنیم‌گروهی از S باشد.

۲۵.۱ مثال. نیم‌گروه منظم S در مثال ۷.۱، ارتدکس است.

۲۶.۱ تعریف و نمادگذاری. فرض کنیم S یک نیم‌گروه باشد و نیز $x \in S$. در این‌صورت، عنصر x^{-1} از S را **معکوس** x گوییم هرگاه

$$xx^{-1}x = x, \quad x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}.$$

مجموعه‌ی عناصر معکوس x را با $V(x)$ نشان می‌دهیم.

۲۷.۱ مثال. در نیم‌گروه S از مثال ۱۲.۱ داریم

---

[1] Orthodox

$$V(a) = V(b) = \{a,\ b\},$$

$$V(c) = \{c\}.$$

۲۸.۱ **تعریف.** نیم‌گروه S را، یک نیم‌گروه **معکوس** گوییم هرگاه، هر عنصر آن، دارای معکوس منحصربه‌فردی در S باشد.

۲۹.۱ **مثال.** نیم‌گروه S در مثال ۷.۱، یک نیم‌گروه معکوس است.

۳۰.۱ قضیه. نیم‌گروه S، یک نیم‌گروه معکوس است اگر و تنها اگر منظم و همه‌ی عناصر خودتوان آن، جابه‌جایی باشند.

اثبات. [۱۳، قضیه‌ی ۵.۱.۱] ■

۳۱.۱ قضیه. فرض کنیم S یک نیم‌گروه معکوس باشد. در این‌صورت، برای هر $x,\ y \in S$ داریم

$$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}.$$

اثبات. [۱۳، گزاره‌ی ۵.۱.۲] ■

۳۲.۱ **تعریف.** نیم‌گروه S را، **موضعاً معکوس** گوییم هرگاه، برای هر عنصر خودتوان از آن، مانند e، eSe یک نیم‌گروه معکوس باشد.

۳۳.۱ تذکر. هر نیم‌گروه معکوس، موضعاً معکوس است ولی عکس این مطلب، همیشه درست نیست.

۳۴.۱ **مثال.** نیم‌گروه S در مثال ۱۲.۱، موضعاً معکوس است ولی نیم‌گروه معکوس نیست.

۳۵.۱ **تعریف.** نیم‌گروه منظم S را، **معکوس چپ (راست)** گوییم هرگاه، $E(S)$ یک نیم‌گروه منظم چپ (راست) باشد.

۳۶.۱ **تعریف.** مرکزساز $E(S)$ را با $E(S)\zeta$ نشان داده و آن‌را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$E(S)\zeta = \{x \in S :\ \forall e \in E(S),\ xe = ex\}.$$

۳۷.۱ تعریف. نیم‌گروه منظم S را، **کلیفورد** گوییم هرگاه، هر عنصر خودتوان آن، مرکزی باشد. یعنی، برای هر $e \in E(S)$ و $x \in S$، داشته باشیم

$$ex = xe.$$

۳۸.۱ تعریف. فرض کنیم S یک نیم‌گروه باشد و نیز $A,\ B \subseteq S$. در این‌صورت، زیرمجموعه‌ی AB از S را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$AB = \{ab:\ a \in A,\ b \in B\}.$$

۳۹.۱ تعریف. فرض کنیم S یک نیم‌گروه باشد و نیز $A_۱,\ A_۲,\ ...,\ A_n \subseteq S$. در این‌صورت، $A_۱A_۲...A_n$ را به‌صورت استقرایی تعریف می‌کنیم

$$A_۱A_۲...A_n = (A_۱A_۲...A_{n-۱})A_n$$

و اگر برای هر $۱ \leq i \leq n$، داشته باشیم $A_i = A$، آنگاه می‌نویسیم

$$A^n = AA...A \ (n \text{ بار}).$$

۴۰.۱ تعریف. زیرمجموعه‌ی غیرتهی A از S را، یک **ایده‌آل چپ (راست)** گوییم هرگاه

$$SA \subseteq A \quad (AS \subseteq A).$$

۴۱.۱ تعریف. زیرمجموعه‌ی غیرتهی A از S را، یک **ایده‌آل دو طرفه** گوییم هرگاه، یک ایده‌آل چپ و یک ایده‌آل راست باشد.

۴۲.۱ تذکر. هر ایده‌آل چپ (یا راست و یا دو طرفه)، یک زیرنیم‌گروه است ولی عکس این مطلب، همیشه درست نیست.

۴۳.۱ مثال. مجموعه‌ی $\{۱,\ ۳,\ ۵,\ ...\}$ یک زیرنیم‌گروه $(\mathbb{N},\ \times)$ است ولی نه ایده‌آل چپ و نه ایده‌آل راست آن است.

۴۴.۱ تعریف. فرض کنیم $(S,\ .)$ و $(T,\ *)$ دو نیم‌گروه و نیز $\varphi : S \longrightarrow T$ یک نگاشت باشد. در این‌صورت

(۱) اگر برای هر $x,\ y \in S$ داشته باشیم $\varphi(x.y) = \varphi(x) * \varphi(y)$، آنگاه φ را، یک **همریختی** گوییم؛

(۲) اگر همریختی φ، یک‌به‌یک باشد آنگاه φ را، یک **تکریختی** گوییم؛

(۳) اگر همریختی φ، پوشا باشد آنگاه φ را، یک **بروریختی** گوییم؛

(۴) اگر همریختی φ، یک‌به‌یک و پوشا باشد آنگاه φ را، یک **یکریختی** گوییم.

۴۵.۱ تعریف. فرض کنیم یکریختی‌ای بین دو نیم‌گروه S و T موجود باشد. در این‌صورت، S و T را **یکریخت** گوییم و آن‌را با نماد $S \simeq T$، نشان می‌دهیم.

۲.۱ رابطه‌های ترتیب در یک نیم‌گروه

۴۶.۱ تعریف. حاصل‌ضرب دکارتی دو مجموعه‌ی A و B را با $A \times B$ نشان داده و آن‌را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A \times B = \{(a,\ b):\ a \in A,\ b \in B\}.$$

۴۷.۱ تعریف. فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند. در این‌صورت R را، یک **رابطه** از A در B گوییم هرگاه، R زیرمجموعه‌ای از $A \times B$ باشد. یعنی، $R \subseteq A \times B$.

۴۸.۱ تعریف. فرض کنیم R یک رابطه روی مجموعه‌ی X باشد. در این‌صورت

(۱) R را، **انعکاسی** گوییم هرگاه، برای هر $x \in X$، $(x,\ x) \in R$؛

(۲) R را، **متقارن** گوییم هرگاه، برای هر $x,\ y \in X$، اگر $(x,\ y) \in R$، آنگاه $(y,\ x) \in R$؛

(۳) R را، **پادمتقارن** گوییم هرگاه، برای هر $x,\ y \in X$، اگر $(x,\ y) \in R$ و $(y,\ x) \in R$، آنگاه $x = y$؛

(۴) R را، **متعدی** گوییم هرگاه، برای هر $x,\ y,\ z \in X$، اگر $(x,\ y) \in R$ و $(y,\ z) \in R$، آنگاه $(x,\ z) \in R$.

۴۹.۱ تعریف. رابطه‌ی R را، یک **رابطه‌ی هم‌ارزی** روی مجموعه‌ی X گوییم هرگاه، انعکاسی، متقارن و متعدی باشد.

۵۰.۱ تعریف. روابط گرین[۱] را، روی نیم‌گروه S به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{L} = \{(x,\ y):\ x,\ y \in S,\ S^1x = S^1y\}, \quad \mathcal{R} = \{(x,\ y):\ x,\ y \in S,\ xS^1 = yS^1\},$$

که در آن $S^1x = Sx \cup \{x\}$ و $xS^1 = xS \cup \{x\}$.

۵۱.۱ قضیه. هر رابطه‌ی گرین، یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

---

[۱] Green