بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه ارومیه

خانواده ای از مترویدهای تولید شده به‌وسیله‌ی گراف ها

سپیده صادق زاده بجندی

مرکز آموزش های نیمه حضوری دانشگاه ارومیه

پایان نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد

استاد راهنما:

دکتر حبیب اذانچیلر

پاییز ۱۳۸۸

پایان نامه خانم سپیده صادق زاده به تاریخ ۸۸/۸/۲۰ به شماره ۲۰۰-۳

مورد پذیرش هیات محترم داوران با رتبه عالی و نمره ۱۸ (هیجده) قرار گرفت.

۱- استاد راهنما و رئیس هیات داوران : دکتر حبیب اذانچیلر

۲- استاد مشاور: ____________

۳- داور خارجی : دکتر قدرت اله آزادی

۴- داور داخلی : دکتر محمد علی اسدی

۵- نماینده تحصیلات تکمیلی : دکتر سعید استاد باشی

تقدیم به

پدر و مادر

عزیزم

تقدیر وتشکر:

"سرمایه های هر دلی حرف هایی است که برای نگفتن دارد."

(دکتر علی شریعتی)

خداوند مهربان را شکر می گویم که در چنین روزهایی که دست طبیعت تابلوی هزاررنگ پاییز را رنگ آمیزی می کند و زمین بسان فرشی ازرنگ ها زیر پایمان گسترانیده شده، مرحله ای دیگر از زندگی خویش را با موفقیت پشت سر می گذارم. بی تردید طی این مسیر بدون مساعدت **استاد گرامی جناب آقای دکتر اذانچیلر** امکان پذیر نبوده و لذا کمال تشکر و سپاس را از ایشان دارم و از خداوند توفیق و سلامت ایشان را خواستارم.

همچنین لازم می دانم از نویسنده ی مقاله جناب آقای *Dillon Mayhew* تشکر نمایم که با کمک های بی دریغشان بار دیگر نشان دادند که برای علم و آموختن حد و مرزی وجود ندارد.

در پایان از **خانواده ی عزیز و همسر مهربانم** که همواره مرا یاری و حمایت نمودند تشکر و قدردانی می نمایم و بهترین ها را برایشان آرزومندم.

سپیده صادق زاده بجندی

پاییز 1388

فهرست مندرجات

چکیده

در این تحقیق خانواده ای از ماترویدها که گراف پایه‌ی آن ها متعلق به کلاس خاصی از گراف هاست معرفی می شود. همچنین طی قضیه ای ثابت خواهیم کرد که، برای آن که ماترویدی متعلق به این کلاس باشد، کافی است نسبت به اضافه شدن طوقه و هم طوقه، دوگان تعمیم یافته و $r.p$ بسته باشد. در ادامه با به‌کارگیری این قضیه بررسی خواهیم نمود که چه کلاس هایی از ماترویدها متعلق به این خانواده می باشند.

پیشگفتار

عبارت گراف پایه که بارها در این تحقیق مورد استفاده قرار می گیرد، تعریفی بدین شرح دارد:

فرض کنید M یک ماترویید و $\mathcal{B}(\mathcal{M})$ مجموعه‌ی پایه های آن باشد، منظور از گراف پایه‌ی این ماترویید، گرافی است که مجموعه‌ی رئوس آن اعضای $\mathcal{B}(\mathcal{M})$ است و دو رأس در این گراف مجاورند اگر و تنها اگر اندازه‌ی تفاضل متقارن پایه های متناظر با آن ها دو باشد.

ما در این پایان نامه به معرفی خانواده ای از ماتروییدها که این خانواده را کلاس تولید شده می نامیم، خواهیم پرداخت. گراف پایه‌ی این ماتروییدها متعلق به $\mathcal{P}$ می باشند، که در آن $\mathcal{P}$ کلاسی از گراف هاست که نسبت به یکریختی و زیر گراف های تولید شده بسته‌است.

همچنین شرایطی را که یک کلاس از ماتروییدها با داشتن آن ها می تواند در این خانواده قرار گیرد را بررسی خواهیم نمود و نشان می دهیم که:

(۱)ماتروییدهای دودویی

(۲)ماتروییدهای منظم

(۳)ماتروییدهای دوری از گراف های مسطح

(۴)ماتروییدهایی که هر مولفه‌ی همبند آن ها گرافیک یا هم گرافیک باشد

وهمچنین

(۵)ماتروییدهایی که هر مولفه‌ی همبند آن ها یا دودویی است و یا به وسیله‌ی واهلش یک دور—ابرصفحه از یک ماترویید دودویی به دست می آیند، متلعق به این خانواده می باشند.

در ادامه مینورهای طرد شده‌ی پنج کلاس تولید شده‌ی فوق را بررسی می نماییم و نشان می دهیم که کلاس آخر بی نهایت مینور طردشده دارد. این تحقیق بر اساس مقاله‌ی زیر تنظیم شده است:

Dillon Mayhew. Families of matroids induced by classes of graphs

advanced in Applied Mathematics 34 (2005) (616-633)

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی از نظریه گراف و ماترويد

دراین فصل تعاریف و نتایج مقدماتی، که در فصل های بعدی این پایان نامه مورد استفاده قرار می‌گیرند، آورده شده‌اند.

۱.۱ مباحثی از نظریه گراف

تعریف ۱.۱.۱ گراف[۱] G سه‌تایی است متشکل از یک مجموعه‌ی متناهی و غیرخالی $V(G)$، که اعضای آن رأس های گراف و مجموعه‌ی $E(G)$، که‌اعضای آن یال های گراف نامیده می‌شوند، به همراه رابطه‌ای که به هر عضو $E(G)$ دو عضو از $V(G)$ را وابسته می کند. اگر $e = uv$ یک یال ازگراف G باشد، u و v را **نقاط انتهایی**[۲] آن یال گوییم. علاوه بر این u و v را دو رأس **مجاور**[۳] نیز می نامیم.

---

[۱] Graph
[۲] End points
[۳] Adjacent

تعریف ۲.۱.۱ یالی از گراف G که نقاط انتهایی آن یکسان می باشند، را یک **طوقه** [۱] گوییم، و یال هایی را که دارای نقاط انتهایی یکسان باشند، **موازی** [۲] می نامیم . گراف فاقد طوقه و یال موازی را ساده [۳]می‌نامیم.

تعریف ۳.۱.۱ درجه [۴] رأس v_i که با نماد$d(v_i)$ نمایش داده می شود، تعداد یالهایی می باشد که از آن رأس می گذرند.

تعریف ۴.۱.۱ گراف H رازیرگراف [۵] گراف G گوییم هرگاه $V(H)$ و $E(H)$ به ترتیب زیر مجموعه هایی از $V(G)$ و$E(G)$ باشند.

تعریف ۵.۱.۱ هرگاه G_1 و G_2 دو گراف باشند، **اجتماع**[۶] آنها که با نماد $G_1 \cup G_2$ نمایش داده می شود، گرافی است با مجموعه ی رئوس $V(G_1) \cup V(G_2)$ و مجموعه یالهای $E(G_1) \cup E(G_2)$.

تعریف ۶.۱.۱ دو گراف G و H را یکریخت [۷] گوییم هرگاه نگاشت های دو سویی $\psi : V(G) \to V(H)$ و $\theta : E(G) \to E(H)$ چنان موجود باشند که رأس v از گراف G روی یال e از گراف G باشد اگر و تنها اگر $\psi(v)$ روی یال $\theta(e)$ باشد. یکریختی دو گراف G و H را با نماد $G \cong H$ نمایش می دهیم.

تعریف ۷.۱.۱ اگر در گراف n رأسی G هر دو رأس دلخواه مجاور باشند، گراف G را **کامل** [۸]گوییم و با نماد K_n نمایش می دهیم.

---

[۱] Loop
[۲] Multiple edges
[۳] Simple
[۴] Degree
[۵] Subgraph
[۶] Union
[۷] Isomorphic
[۸] Complete

تعریف ۸.۱.۱ گراف همبند بدون دور را **درخت**[۱] می نامیم.

تعریف ۹.۱.۱ **مکمل**[۲] گراف G که آن را با نماد $\overline{G}$ نشان می دهیم، گراف ساده ای با مجموعه رئوس $V(G)$است که در آن $uv \in E(\overline{G})$ اگر و تنها اگر $uv \notin E(G)$.

تعریف ۱۰.۱.۱ یک **تجزیه**[۳] ازگراف G فهرستی از زیر گراف های G است به طوریکه هر یال از G فقط به یک زیرگراف تعلق داشته باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱ گرافی را که هر یال آن جهت دار باشد، **گراف جهت‌دار**[۴] گوییم.

تعریف ۱۲.۱.۱ **گراف زمینه‌ی**[۵] گراف جهت‌دار G گرافی است که در آن به جای هر یال جهت دار، یک یال ساده با همان نقاط انتهایی قرار می گیرد.

گراف ساده زمینه، گراف زمینه‌ای است که در آن، علاوه بر شرط فوق، یالهای موازی به غیر از یکی از آن ها و طوقه‌ها نیز حذف می شود.

تعریف ۱۳.۱.۱ بزرگترین مجموعه رئوس مجاور در G را **خوشه**[۶] G می نامیم.

تعریف ۱۴.۱.۱ گراف $G = (V, E)$ را **دوبخشی** [۷] گوییم، هرگاه بتوان مجموعه رئوس آن را به دو مجموعه مجزا چنان افراز کرد که رئوس انتهایی هر یال در افرازهای متمایزی قرار گیرند. گراف دوبخشی G را به صورت سه‌تایی (X, Y, E) نیز نمایش می‌دهند که در آن X و Y افرازهایی از V می‌باشند. هرگاه تعداد

[۱] Tree
[۲] Complement
[۳] Decomposition
[۴] Digraph
[۵] Underlying Graph
[۶] cliqe
[۷] Bipartite graph

عناصر مجموعه‌های X و Y به ترتیب برابر m و n باشند و آن گاه گراف دوبخشی حاصل از آنها را با نماد $K_{m,n}$ نمایش خواهیم داد.

لم ۱۵.۱.۱ گراف G دوبخشی است اگر و تنها اگر هیچ دور فردی نداشته باشد.

برهان : رجوع شود به قضیه ۱.۲.۱۸ از مرجع [۱۲]. ■

تعریف ۱۶.۱.۱ **تفاضل متقارن**[۱] دو گراف G و H را که دارای مجموعه رئوس آن ها V می باشد را با نماد $G\Delta H$ نمایش می دهیم و در واقع گرافی است با مجموعه رئوس V ومجموعه یال هایی که دقیقاً در یکی از $E(G)$ یا$E(H)$ قرار دارند.

تعریف ۱۷.۱.۱ گراف G را **مسطح**[۲]گوییم هر گاه بتوان آن را طوری در صفحه نمایش داد که هیچ برخورد یالی وجود نداشته باشد.

قضیه ۱۸.۱.۱ گراف G مسطح است اگر و تنها اگرشامل هیچ زیر تقسیمی‌از K_5 یا $K_{3,3}$ نباشد.

برهان : رجوع شود به فصل ۶ از مرجع [۱۲]. ■

۲.۱ مباحثی از نظریه متروید

تعریف ۱.۲.۱ **متروید** M[۳]، زوج مرتب $(E,\mathcal{I})$ می‌باشد که در آن، E مجموعه‌ای متناهی بوده و $\mathcal{I}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های E می‌باشد که در شرایط زیر صدق می‌کنند:

[۱] Symetric Deffrence
[۲] planer Graph
[۳] Matroid

$(I1)$ $\emptyset \in \mathcal{I}$.

$(I2)$ هرگاه $I \in \mathcal{I}$ و $I' \subseteq I$، آن گاه $I' \in \mathcal{I}$.

$(I3)$ هرگاه I_1 و I_2 متعلق به $\mathcal{I}$ باشند و $|I_1| < |I_2|$، آن گاه عضوی از $I_2 - I_1$ مانند e چنان موجود است که $I_1 \cup e \in \mathcal{I}$.

شرط سوم را اصل استقلال گوییم. اعضای $\mathcal{I}$ را **مجموعه‌های مستقل**[1] و اعضای E را مجموعه زمینه[2] M گوییم. مجموعه‌های مستقل ماکسیمال راپایه[3]های یک ماترویید گوییم. زیرمجموعه هایی از E را که در $\mathcal{I}$ نیستند، عناصروابسته [4] ماترویید گوییم . مجموعه‌های وابسته مینیمال را دور[5]های ماترویید گوییم.

مثال ۲.۲.۱ فرض کنید A ماتریس زیر باشد:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

که در آن ستون‌ها به ترتیب از چپ ۱،۲،۳،۴و۵ نامگذاری شده‌اند. در این صورت اگر $E = \{1,2,3,4,5\}$ و $\mathcal{I}$ گردایه ای از زیر مجموعه های E که ستون متناظر با آن ها در A مستقل خطی اند باشد، یعنی $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{5\}, \{1,2\}, \{1,5\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{4,5\}\}$، آن گاه $(E,\mathcal{I})$ یک ماترویید می‌باشد. ■

ماترویید تولید شده به روش فوق را یک **ماترویید برداری** [6] گوییم و با نماد $M[A]$ نمایش می‌دهیم .

---

[1] Independant Sets
[2] Ground Set
[3] Base
[4] Dependant
[5] Circuits
[6] Vector Matroid

قضیه ۳.۲.۱ فرض کنید $\mathcal{C}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های مجموعه E باشد. آن گاه $\mathcal{C}$ گردایه‌ای از دورهای یک ماترویید روی E است، اگروتنهااگر $\mathcal{C}$ در شرایط زیر صدق کند:

$(C1)$ $\emptyset \notin \mathcal{C}$.

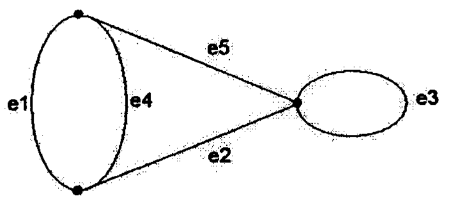
$(C2)$ هرگاه C_1 و C_2 عناصری از $\mathcal{C}$ باشند و $C_1 \subseteq C_2$، آن گاه $C_1 = C_2$.

$(C3)$ هرگاه C_1 و C_2 عناصر متمایزی از $\mathcal{C}$ باشند و $e \in C_1 \cap C_2$، آن گاه عضوی از $\mathcal{C}$ مانند C_3 چنان موجود است که $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - e$.

برهان : رجوع شود به نتیجه ۱.۱.۵ از مرجع [۸]. ■

تعریف ۴.۲.۱ ماترویید حاصل از گراف داده شده G راماترویید دوری [1] گراف G گوییم، هرگاه مجموعه‌ی زمینه ی M برابر با مجموعه یال های G و دورهای M برابربا دورهای گراف G باشند، این ماترویید را با $M(G)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۵.۲.۱ گراف زیر را در نظر بگیرید:



ماترویید دوری حاصل از این گراف ، ماتروییدی با مجموعه‌ی زمینه‌ی $E = \{e_1, \dots, e_5\}$ و

$\mathcal{C} = \{\{e_3\} \{e_1, e_4\}, \{e_1, e_2, e_5\}, \{e_2, e_4, e_5\}\}$

$\mathcal{I} = \{\emptyset, \{e_1\}\{e_2\}, \{e_4\}, \{e_5\}, \{e_1, e_2\}, \{e_1, e_5\}, \{e_2, e_5\}, \{e_2, e_4\}, \{e_4, e_5\}\}$ ، $M = (E, \mathcal{I}) = M(G)$

می باشد.

[1] Cycle Matroid

تعریف ۶.۲.۱ ماترویدی که فاقد طوقه ویال های موازی باشد را ماترویید ساده [۱] گوییم.

تعریف ۷.۲.۱ دو ماترویید M_1 و M_2 را **یکریخت** گوییم و با نماد $M_1 \cong M_2$ نمایش می‌دهیم، هرگاه نگاشتی دوسویی مانند $\psi : E(M_1) \to E(M_2)$ چنان موجود باشد که برای هر $X \subseteq E(M_1)$ ، $\psi(X)$ در M_2 مستقل باشد اگر و تنها اگر X در M_1 مستقل باشد.

تعریف ۸.۲.۱ هرگاه M یکریخت با ماترویید برداری حاصل از ماتریس A روی میدان F باشد، گوییم M **قابل نمایش**[۲] روی میدان F است(یا F–**قابل نمایش**[۳]است). ماتریس A را نیز یک **نمایش**[۴] از M روی میدان F گوییم. همان طور که می‌توان هر ماترویید را توسط دورهایش تبیین کرد، می‌توان آن را توسط پایه‌هایش نیز مطابق قضیه زیر بیان کرد:

قضیه ۹.۲.۱ فرض کنید $\mathcal{B}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های مجموعه E باشد. آن گاه $\mathcal{B}$ گردایه‌ای ازپایه‌های یک ماترویید روی E است، اگروتنها اگر $\mathcal{B}$ در شرایط زیر صدق کند:

$(B1)$ $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

$(B2)$ هرگاه B_1 و B_2 عناصری از $\mathcal{B}$ باشند و $x \in B_1 - B_2$، آن گاه عضوی مانند $y \in B_2 - B_1$ چنان موجود است که : $(B_1 - x) \cup y \in \mathcal{B}$.

برهان: رجوع شود به لم ۱.۲.۱ ، لم ۱.۲.۲ ، قضیه ۱.۲.۳ ، لم ۱.۲.۴ و نتیجه ۱.۲.۵ از مرجع [۸] ■

با توجه به قضیه فوق، $M = (E, \mathcal{B})$ نیز یک ماترویید روی E می‌باشد.

[۱] Simple Matroid
[۲] Representable
[۳] F-Representable
[۴] Representation

نتیجه ۱۰.۲.۱ هرگاه $B_۱$ و $B_۲$ دو عضو از $\mathcal{B}$ باشند، آن گاه $|B_۱| = |B_۲|$.

برهان: رجوع شود به لم ۱.۲.۴از[۸]. ■

تعریف ۱۱.۲.۱ مترویدِ n عضوی M رامترویدِ **یکنواخت**[۱] گوییم هرگاه $\mathcal{B}$ گردایه تمامی زیرمجموعه های m عضوی E باشدکه در آن $n \geq m \geq ۰$. مترویدِ یکنواخت M را با نماد $U_{m,n}$ نمایش می دهند.

قضیه ۱۲.۲.۱ فرض کنید M یک مترویدِ بوده و $\mathcal{B}^*(\mathcal{M})$ برابر مجموعه $\{E(M) - B \mid B \in \mathcal{B}(M)\}$ باشد. دراین صورت $\mathcal{B}^*(M)$ مجموعه پایه‌های یک مترویدِ روی $E(M)$ می‌باشد.

برهان: رجوع شود به قضیه ۲.۱.۱ از مرجع [۸]. ■

تعریف ۱۳.۲.۱ مترویدِ حاصل از قضیه فوق **رادوگان** [۲] مترویدِ M گوییم و با نماد M^* نمایش می‌دهیم. برای دوگان مترویدِ M روابط زیر برقرارند:

$$\mathcal{B}^*(M) = \mathcal{B}(M^*) \qquad , \qquad (M^*)^* = M$$

تعریف ۱۴.۲.۱ فرض کنید $M = (X, \mathcal{I})$ یک مترویدِ و $X \subseteq E(M)$ باشد. همچنین فرض کنید:

$$\mathcal{I}\mid_X = \{I \subseteq X \mid I \in \mathcal{I}\}$$

به راحتی می‌توان دید که $(X, \mathcal{I}\mid_X)$ یک مترویدِ است.

مترویدِ فوق را **تحدید** [۳] مترویدِ M به X و یا**حذف** [۴](E-X) از مترویدِ M گویند و با نماد $M\mid_X$ یا $M\backslash(E-X)$ نمایش می‌دهند. مجموعه زمینه این مترویدِ، X می‌باشد.

[۱] Uniform Matroid
[۲] Dual
[۳] Restriction
[۴] Deletion

تعریف ۱.۲.۱۵ فرض کنید $M = (E,\mathcal{I})$ یک متروید و $T \subseteq E(M)$ باشد. M/T را که به صورت زیر تعریف می‌شود، ادغام [۱] T در M گوییم.

$$M/T = (M^*\backslash T)^* \Rightarrow (M/T)^* = M^*\backslash T$$

بدیهی است که $E(M/T) = E(M) - T$. متروید حاصل را با نماد $M \cdot (E - T)$ نیز نمایش می‌دهند.

تعریف ۱.۲.۱۶ هرگاه X و Y دو زیرمجموعه جدا از هم $E(M)$ باشند، $M\backslash X/Y$ را یک مینور [۲] متروید M گوییم. به عبارت دیگر مینور متروید M، مترویدی است که با دنباله‌ای از حذف ها و انقباض ها از متروید M حاصل می‌شود.

گزاره ۱.۲.۱۷ N یک مینور از متروید M است اگر و تنها اگر N^* یک مینور از متروید M^* باشد. یعنی:

$$N^* = M^*/X\backslash Y \quad \Leftrightarrow \quad N = M\backslash X/Y$$

برهان: رجوع شود به‌گزاره‌ی ۳.۱.۲۷ از مرجع [۸] ■

تعریف ۱.۲.۱۸ از آن جایی که $M\mid_X$ یک متروید است، لذا پایه‌های این متروید به تعداد مساوی عضو دارند. تعداد اعضای پایه‌های متروید $M\mid_X$ را رتبه [۳] X در متروید M گوییم و با نماد $r(X)$ یا $r_M(X)$ نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر می‌توان نوشت:

تعداد اعضای پایه $M\mid_X$ = تعداد اعضای زیرمجموعه مستقل ماکسیمال در X = $r_M(X)$

[۱] Contraction
[۲] Minor
[۳] Rank

ویا: $r(X) = Max\{|Y| \mid Y \subseteq X, Y \in \mathcal{I}\}$

برای تابع رتبه فوق، قضیه و گزاره زیر را داریم:

قضیه ۱۹.۲.۱ فرض کنید E یک مجموعه و $r : 2^E \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ یک تابع باشد. شرط لازم و کافی برای این که r تابع رتبه یک متروید باشد این است که در شرایط زیر صدق کند:

($R1$) اگر $X \subseteq E$، آن گاه $0 \le r(X) \le |X|$.

($R2$) اگر $X \subseteq Y \subseteq E$، آن گاه $r(X) \le r(Y)$.

($R3$) اگر X و Y دو زیرمجموعه از E باشند، آن گاه داریم:

$$r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \le r(X) + r(Y).$$

برهان : رجوع شود به لم ۱.۳.۱ از مرجع [۸]. ■

گزاره ۲۰.۲.۱ فرض کنید M یک متروید با تابع رتبه r باشد و $X \subseteq E(M)$ آن گاه روابط زیر برقرارند:

(i) X مستقل است اگر و تنها اگر $r(X) = |X|$.

(ii) X یک پایه است اگر و تنها اگر $|X| = r(X) = r(M)$.

(iii) X یک دور است اگر و تنها اگر X غیرتهی بوده و برای هر $x \in X$ داشته باشیم: $r(X - x) = |X| - 1 = r(X)$.

برهان: رجوع شود به‌گزاره‌ی ۱.۳.۵ از مرجع [۸] ■