بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

(گرایش محض)

حل معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی برگر با استفاده از روش خطی سازی

از:

محمد علی میرزازاده

استاد راهنما:

دکتر نصیر تقی زاده

شهریور ماه ۱۳۸۷

"تقدیم به پدر بزرگوار، مادر فداکار و مهربانم

و

به استاد گرامیم جناب آقای دکتر تقی زاده"

یا رب مپسند چون غریبی باشم

مایل به فراز و هر نشیبی باشم

بیمار توام نخواهم هرگز جز تو

محتاج دوا و هر طبیبی باشم

" محمد رضا خیرخواه"

تقدیر:

به نام یزدان پاک و آفریننده ی جهان هستی که هیچ باغ اندیشه ای بدون باران عنایتش سرسبز نخواهد شد و هیچ نها ل آرزویی بدون خواست و مشیت او به بار نخواهد نشست.

با تشکر فراوان از:

- خانواده عزیزم به خاطر همه محبتها و حمایتهای بی دریغشان.
- استاد بزرگوار و مهربانم جناب آقای دکتر تقی زاده به پاس زحمتها و محبتهایشان.
- جناب آقای دکتر جعفر بی آزار و جناب آقای دکتر بهروز فتحی داوران محترم پایان نامه.
- جناب آقای دکتر اسماعیل عزیزپور نماینده محترم تحصیلات تکمیلی.

دوستان و همکاران عزیزم، آقایان: مهدی غلامی، مهدی احمدی نژاد.

فهرست مطالب

عنوان	صفحه

حل معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی برگربا استفاده از روش خطی سازی

محمد علی میرزازاده

چکیده:

دراین پایان نامه یک روش موثر برای پیدا کردن جوابهای ویژه بعضی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی غیر خطی بیان شده است. این روش را می توان برای معادلات غیر انتگرال پذیر، مانند معادلات انتگرال پذیر به کار برد.

ما با استفاده ازروش خطی سازی که در فصل دوم این پایان نامه مطرح شده جوابهای ویژه سولیتونی معادله برگر:

$$u_t + uu_x = u_{xx}$$

وجواب های ویژه معادله kdv:

$$u_t + u_{xxx} + 6uu_x = 0$$

و جوابهای ویژه معادله برگر تعمیم یافته :

$$u_t + u_{xx} + uu_x + 2uu_{xxx} + 3u^2u_x = 0$$

را به دست می آوریم.

واژه ها ی کلید ی: روش خطی سازی، معادله برگر، معادله Kdv، معادله غیر انتگرال پذیر، سولیتون.

Solving the Burger's partial differential equation by linearization method

Mohamad ali mirzazadeh

Abstract:

An efficient method for constructing of particular solutions of some nonlinear partial differential equation is introduced.

The method can be applied to nonintegrable equations as well as to integrable ones.

In this thesis we have found, by linearization method in chapter 2, particular soliton solutions Burger's equation:

$$u_t + uu_x = u_{xx},$$

and particular solutions of kdv equation:

$$u_t + u_{xxx} + 6uu_x = 0,$$

and particular solutions of generalization Burger's equation:

$$u_t + u_{xx} + uu_x + 2uu_{xxx} + 3u^2u_x = 0.$$

Keywords: linearization method, Burger's equation, Kdv equation, nonlinear partial Differential equation, soliton.

پیشگفتار

درسالهای اخیر علاقه زیادی در پیدا کردن جوابهایی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی غیر خطی به صورت سری نامتناهی به وجود آمده است.

خطی سازی مستقیم از معادله دیفرانسیل غیر خطی انتگرال پذیر مشهور در [۹] صورت گرفته است. جوابهایی از معادله Kdv به جوابهای معادله هوپف(۱) به وسیله سریها در[۱] ارتباط داده شده اند. (معادله هوپف (۱) می تواند با استفاده از Hodograph به صورت خطی درآید)

سریهای توانی همگرا برای پیدا کردن جوابهای معادلات بولتزمن(۲) در[۲]و [۱۲] و[۷] به کار گرفته شده است. امکان استفاده از سریهایی مانند این برای معادلات دیگر در[۳] توضیح داده شده است.

از سریهای فوریه برای پیدا کردن جوابهای معادله Kdv در [۸] استفاده شده است. .همچنین از سریهای توانی برای بررسی معادلات بیضی گون در [۵] استفاده شده است.

در این پایان نامه ما کلاسی از معادلات و سیستم هایی شامل عملگرهای دیفرانسیل گیری خطی دلخواه با ضرایب ثابت وتوابع تحلیلی غیر خطی دلخواه وابسته به متغیرها و مشتقاتی با مرتبه متناهی در نظر می گیریم به شرط آنکه این معادلات دارای جواب ثابت باشند.

در حقیقت در مقالات [۴] و[۱۰] و[۱۱] تبدیلی را که جوابهایی از یک معادله داده شده را با جوابهایی از معادله دیگر ارتباط دهد جستجو نشده است .

شیوه ما بر پایه خطی سازی رسمی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی غیر خطی به وسیله سیستمی از معادلات دیفرانسیل معمولی خطی که زیرفضایی با بعد متناهی از فضای جوابهای معادلات خطی است می باشد.

در این پایان نامه ما روش خطی سازی را توسعه داده ایم وآن را برای معادلات غیر انتگرال پذیر مانند معادلات انتگرال پذیر به کار برده ایم. در این صورت جوابها به صورت سری توانی یا سری فوریه می باشند.

همچنین همگرایی سری توانی که به این روش ساخته می شود در [۱۲] بررسی شده است.

۱) Hopf

۲) Boltzman

فصل اول

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱-۱تعریف: یک معادله بر حسب یک یا چند متغیر مستقل و یک متغیر وابسته و مشتقات متغیر وابسته نسبت به متغیر یا متغیرهای مستقل را یک معادله دیفرانسیل می گویند. اگر متغیر مستقل یکی باشد معادله دیفرانسیل را **معمولی** گویندو اگر متغیر مستقل بیش از یکی باشد معادله دیفرانسیل را **معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی** گویند.

۱-۲ تعریف مرتبه یک معادله دیفرانسیل: بالاترین مرتبه مشتقی می باشد که در معادله ظاهر می شود.

۱-۳ تعریف: اگر $u=u(x_1,\ldots,x_n)$ به طوری که x_k، $k=1,\ldots,n$، n - متغیرمستقل فرض شود. یک **معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی** در حالت کلی به صورت زیر می باشد

$$F(x_1,\ldots,x_n,u,u_{x_1},\ldots,u_{x_n},u_{x_1x_1},\ldots,u_{x_nx_n},\ldots)=0.$$

اگر Fبرحسب u و مشتقات آن به صورت خطی در معادله ظاهر شود معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی را **خطی** گویند.

اگر Fبرحسب u و مشتقات آن به صورت غیر خطی در معادله ظاهر شود معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی را **غیر خطی** گویند.

۱-۴ مثال: معادله

$$\frac{\partial u}{\partial t}-(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})^2+u^2=0$$

یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی مرتبه دوم غیر خطی می باشد.

۱-۵ تعریف: تابع $F(x,y)$را همگن از درجه $n\in N$ گوییم هرگاه

$$F(tx,ty)=t^nF(x,y)\ .$$

۱-۶ تعریف: به ازای دنباله $\{x_n\}$از اعداد حقیقی عبارت

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_n=x_1+\cdots+x_n+\cdots \qquad (۱-۶-۱)$$

را یک **سری نامتناهی** گویند و $s_n=x_1+\cdots+x_n$را **مجموع جزیی** nام سری(۱-۶-۱) می گویند. اگر $\lim_{n\to\infty}s_n=s$ باشد، سری (۱-۶-۱) را **همگرا** گویند. $\sum_{n=1}^{\infty}ra^{n-1}$را **سری هندسی** گویند وقتی که $|a|<1$ سری هندسی همگرا می باشد ومجموع آن برابراست با $s=\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{r(1-a^n)}{1-a}=\frac{r}{1-a}$.

۱-۷ تعریف: $(V,+,\times)$ را یک **فضای برداری** روی میدان F می گویند هرگاه به ازای هر c_1 و c_2 از F و هر x و y و z از V داشته باشیم

۱- $x+y=y+x$

۲- $(x+y)+z=x+(y+z)$

۳- $x+P_0=x \qquad \exists p_0 \in V$

۴- $x+q=P_0 \qquad \exists q \in V$

۵- $(c_1c_2)\times x=c_1\times(c_2x)$

۶- $c_1\times(x+y)=c_1\times x+c_1\times y$

۷- $(x+y)\times z=(x\times z)+(y\times z)$

۱- ۸ **تعریف:** فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان Fباشد. W **زیر فضای** V است اگر و تنها اگر

$$\forall \alpha,\beta \in W ,c \in F : c\alpha+\beta \in W$$

۱- ۹ **تعریف:** فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان Fباشد بردارهای α_1و...و α_nعضو V را **وابسته خطی** می نامند هرگاه اسکالرهای c_1 و...و c_n که همگی صفر نیستند وجود داشته باشند به طوری که $c_1\alpha_1+\cdots+c_n\alpha_n=0$ ، و مجموعه ای که وابسته خطی نباشد **مستقل خطی** است.

۱- ۱۰ **تعریف پایه و بعد:** فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان Fباشد زیر مجموعه B از Vرا یک **پایه** V می نامند هرگاه B مستقل خطی باشد و فضای V را تولید کند. فضای Vبا بعد متناهی است هرگاه یک پایه متناهی داشته باشد وبعد Vرا با $\dim(V)$ نشان می دهیم.

۱-۱۱**تعریف:** فرض کنید V و U دو فضای برداری روی میدان Fباشند. تابع $L:U\to V$ یک **عملگر خطی** می باشد هرگاه

۱- $L(x+y)=L(x)+L(y) \qquad \forall x,y \in U$

۲- $\forall c\in F \quad L(cx)=cL(x) \qquad \forall x \in U$

۱-۱۲**تعریف:** تابع $f(x)$ را در نقطه $x=x_0$ **تحلیلی** می گوییم هرگاه سری توان به صورت زیرموجود باشد

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

به عبارت دیگر مشتق nام تابع $f(x)$ درنقطه x_0 موجود باشد.

۱-۱۳ **تعریف:** اگر A یک ماتریس ثابت $n\times n$ و I ماتریس ثابت همانی $n\times n$ با شند آنگاه چند جمله ای $\det(A-\lambda I)=0$را **معادله مشخصه** متناظربا ماتریس A گویند وریشه های این چند جمله ای را **مقادیر ویژه** ماتریس A گویند. بردار غیر صفر x که در رابطه $Ax=\lambda x$ صدق کند **بردار ویژه** متناظربا مقدار ویژه λ ماتریس A گویند.

۱-۱۴ جواب عمومی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی مرتبه اول همگن با ضرایب ثابت

معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی

$$\sum_{k=1}^{n} a_k u_{x_k} + bu = 0. \qquad (۱-۱۴-۱)$$

را اختیار می کنیم که درآن $a_k , b \in R$ $(k = 1,2,...,n)$ و $u = u(x_1,...,x_n)$ می باشند. برای به دست آوردن جواب عمومی معادله (۱-۱۴-۱) وقتی $a_j \neq 0$ $(1 \leq j \leq n)$ به صورت زیر عمل می کنیم

$$\begin{cases} \xi_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + ... + c_{1n}x_n, \\ \xi_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + ... + c_{2n}x_n, \\ \vdots \\ \xi_n = c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + ... + c_{nn}x_n. \end{cases} \qquad (۲-۱۴-۱)$$

در این صورت می توان نوشت

$$\begin{cases} u_{x_1} = u_{\xi_1}(\xi_1)_{x_1} + u_{\xi_2}(\xi_2)_{x_1} + ... + u_{\xi_n}(\xi_n)_{x_1}, \\ u_{x_2} = u_{\xi_1}(\xi_1)_{x_2} + u_{\xi_2}(\xi_2)_{x_2} + ... + u_{\xi_n}(\xi_n)_{x_2}, \\ \vdots \\ u_{x_n} = u_{\xi_1}(\xi_1)_{x_n} + u_{\xi_2}(\xi_2)_{x_n} + ... + u_{\xi_n}(\xi_n)_{x_n}. \end{cases}$$

با توجه به رابطه (۱-۱۴-۲) داریم

$$\begin{cases} u_{x_1} = c_{11}u_{\xi_1} + c_{21}u_{\xi_2} + ... + c_{n1}u_{\xi_n}, \\ u_{x_2} = c_{12}u_{\xi_1} + c_{22}u_{\xi_2} + ... + c_{n2}u_{\xi_n}, \\ \vdots \\ u_{x_n} = c_{1n}u_{\xi_1} + c_{2n}u_{\xi_2} + ... + c_{nn}u_{\xi_n}. \end{cases} \qquad (۳-۱۴-۱)$$

و با توجه به رابطه (۱-۱۴-۳) داریم

$$u_{x_k} = c_{1k}u_{\xi_1} + c_{2k}u_{\xi_2} + ... + c_{nk}u_{\xi_n} = \sum_{i=1}^{n} c_{ik}u_{\xi_i}. \qquad (۴-۱۴-۱)$$

حال رابطه (۱-۱۴-۴) را در معادله (۱-۱۴-۱) قرار می دهیم

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \left(\sum_{i=1}^{n} c_{ik}u_{\xi_i}\right) + bu = 0. \qquad (۵-۱۴-۱)$$

حال اگر رابطه (۱-۱۴-۵) را باز کنیم خواهیم داشت

$$(\sum_{k=1}^{n} a_k c_{1k}) u_{\xi_1} + (\sum_{k=1}^{n} a_k c_{2k}) u_{\xi_2} + \dots + (\sum_{k=1}^{n} a_k c_{jk}) u_{\xi_j} + (\sum_{k=1}^{n} a_k c_{nk}) u_{\xi_n} + bu = 0. \tag{۶-۱۴-۱}$$

وقتی که $a_j \neq 0$ $(1 \le j \le n)$ باشد، اختیار می کنیم $c_{jj} = 1$ ، $\begin{cases} c_{jk} = 0 \\ j \neq k \end{cases}$ در این صورت

c_{ij} $(1 \le i \le n, 1 \le j \le n)$ ها را طوری اختیار می کنیم که شرط $\sum_{k=1}^{n} a_k c_{ik} = 0$ $(i \neq j)$ برقرارباشد.

درنتیجه رابطه (۱-۱۴-۶) به صورت زیر تبدیل می شود:

$$a_j u_{\xi_j} + bu = 0 \quad \Rightarrow u_{\xi_j} + \frac{b}{a_j} u = 0. \tag{۷-۱۴-۱}$$

(۱-۱۴-۷) یک معادله معمولی خطی مرتبه اول می باشد. دراین صورت خواهیم داشت

$$u = e^{\frac{-b}{a_j}\xi_j} f(\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n). \tag{۸-۱۴-۱}$$

در رابطه (۱-۱۴-۸) $\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n$ را با توجه به شرط $\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} a_k c_{ik} = 0. \\ i \neq j \end{cases}$ به دست می آوریم

$$\begin{cases}
\sum_{k=1}^{n} a_k c_{1k} = 0 \Rightarrow a_1 c_{11} + a_2 c_{12} + \dots + a_{n-1} c_{1(n-1)} + a_n c_{1n} = 0, \\
\sum_{k=1}^{n} a_k c_{2k} = 0 \Rightarrow a_1 c_{21} + a_2 c_{22} + a_3 c_{23} + \dots + a_n c_{2n} = 0, \\
\vdots \\
\sum_{k=1}^{n} a_k c_{(j-1)k} = 0 \Rightarrow a_1 c_{(j-1)1} + \dots + a_{j-1} c_{(j-1)(j-1)} + \dots + a_n c_{(j-1)n} = 0, \\
\sum_{k=1}^{n} a_k c_{(j+1)k} = 0 \Rightarrow a_1 c_{(j+1)1} + \dots + a_{j+1} c_{(j+1)(j+1)} + \dots + a_n c_{(j+1)n} = 0, \\
\vdots \\
\sum_{k=1}^{n} a_k c_{(n-1)k} = 0 \Rightarrow a_1 c_{(n-1)1} + \dots + a_{n-1} c_{(n-1)(n-1)} + a_n c_{(n-1)n} = 0, \\
\sum_{k=1}^{n} a_k c_{nk} = 0 \Rightarrow a_1 c_{n1} + \dots + a_{n-1} c_{n(n-1)} + a_n c_{nn} = 0.
\end{cases}$$

اختیار می کنیم

$$\begin{cases} c_{1j}=0 \\ j\neq 1,2 \end{cases} \Rightarrow a_1c_{11}+a_2c_{12}=0 \Rightarrow \begin{cases} c_{11}=-a_2, \\ c_{12}=a_1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_{2j}=0 \\ j\neq 1,3 \end{cases} \Rightarrow a_1c_{21}+a_3c_{23}=0 \Rightarrow \begin{cases} c_{21}=-a_3, \\ c_{23}=a_1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_{(j-1)j}=0 \\ j\neq 1,j-1 \end{cases} \Rightarrow a_1c_{(j-1)1}+a_{j-1}c_{(j-1)(j-1)}=0 \Rightarrow \begin{cases} c_{(j-1)1}=-a_{j-1}, \\ c_{(j-1)(j-1)}=a_1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_{(j+1)j}=0 \\ j\neq 1,j+1 \end{cases} \Rightarrow a_1c_{(j+1)1}+a_{j+1}c_{(j+1)(j+1)}=0 \Rightarrow \begin{cases} c_{(j+1)1}=-a_{j+1}, \\ c_{(j+1)(j+1)}=a_1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_{(n-1)j}=0 \\ j\neq 1,n \end{cases} \Rightarrow a_1c_{(n-1)1}+a_nc_{(n-1)n}=0 \Rightarrow \begin{cases} c_{(n-1)1}=-a_n, \\ c_{(n-1)n}=a_1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_{nj}=0 \\ j\neq n-1,n \end{cases} \Rightarrow a_{n-1}c_{n(n-1)}+a_nc_{nn}=0 \Rightarrow \begin{cases} c_{n(n-1)}=-a_n, \\ c_{nn}=a_{n-1}. \end{cases}$$

با توجه به روابط بالا و رابطه (۱-۱۴-۲)خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -a_2x_1+a_1x_2, \\ \xi_2 &= -a_3x_1+a_1x_3, \\ &\vdots \\ \xi_{j-1} &= -a_{j-1}x_1+a_1x_{j-1}, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \xi_j &= x_j, \\ \xi_{j+1} &= -a_{j+1}x_1+a_1x_{j+1}, \\ &\vdots \\ \xi_{n-1} &= -a_nx_1+a_1x_n, \\ \xi_n &= -a_nx_{n-1}+a_{n-1}x_n. \end{aligned}$$

در این صورت با توجه به روابط بالا و رابطه (۱-۱۴-۸) جواب عمومی معادله (۱-۱۴-۱) وقتی که $a_j\neq 0$ $(1\leq j\leq n)$به صورت زیر می باشد

$$u=e^{-\frac{b}{a_j}x_j}f(-a_2x_1+a_1x_2,-a_3x_1+a_1x_3,\dots,-a_{j-1}x_1+a_1x_{j-1}$$
$$-a_{j+1}x_1+a_1x_{j+1},\dots,-a_nx_1+a_1x_n,-a_nx_{n-1}+a_{n-1}x_n).$$

۱-۱۵ تذکر: الف- جواب عمومی معادله $\begin{cases} Au_x+Bu_y+Cu=0, \\ A,B,C\in R. \end{cases}$ وقتی که $A\neq 0$، به صورت زیر می باشد

$$u_g=e^{-\frac{C}{A}x}f(Bx-Ay).$$

ب- جواب عمومی معادله $\begin{cases} Au_x + Bu_y + Cu_z + Du = 0, \\ A, B, C, D \in R. \end{cases}$ وقتی که $A \neq 0$، به صورت زیر می باشد

$$u_g = e^{-\frac{D}{A}x} f(Bx - Ay, Bz - Cy).$$

ج- جواب عمومی معادله $\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} a_k u_{x_k} + bu = 0, \\ a_k, b \in R, \\ 1 \leq k \leq n. \end{cases}$ وقتی که $a_1 \neq 0$، به صورت زیر می باشد

$$u_g = e^{-\frac{b}{a_1}x_1} f(-a_3 x_2 + a_2 x_3, \ldots, -a_n x_2 + a_2 x_n, -a_n x_{n-1} + a_{n-1} x_n).$$

۱-۱۶ قضیه : اگر u_g جواب عمومی معادله (۱-۱۴-۱) و u_p جواب خصوصی معادله $\sum_{k=1}^{n} a_k u_{x_k} + bu = H(x_1, \ldots, x_n)$ باشد، آنگاه $u_g + u_p$ جواب عمومی معادله (۱-۱۶-۱) $\sum_{k=1}^{n} a_k u_{x_k} + bu = H(x_1, \ldots, x_n)$ خواهد شد ($a_k, b \in R$ و $1 \leq k \leq n$).

اثبات: فرض کنید U جواب عمومی معادله (۱-۱۶-۱) باشد و چون u_p جواب خصوصی معادله(۱-۱۶-۱) می باشد در این صورت $U - u_p$ جواب عمومی معادله (۱-۱۴-۱) می باشد زیرا

$$\sum_{k=1}^{n} a_k (U - u_p)_{x_k} + b(U - u_p) = (\sum_{k=1}^{n} a_k U_{x_k} + bU)$$
$$-(\sum_{k=1}^{n} a_k (u_p)_{x_k} + bu_p) = H(x_1, \ldots, x_n) - H(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

و چون u_g جواب عمومی معادله (۱-۱۴-۱) می باشد در این صورت توابع اختیاری موجود در u_g را چنان می توان اختیار نمود که داشته باشیم $U - u_p = u_g$ در این صورت داریم $U = u_g + u_p$.

۱-۱۷ تذکر: جواب خصوصی معادله $\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} a_k u_{x_k} + bu = ce^{\alpha x_j} \\ a_k, b, c \in R \end{cases}$ ($1 \leq j \leq n$) به یکی از حالت های زیرخواهد بود

$$\begin{cases} u_p = \dfrac{c}{a_j \alpha + b} e^{\alpha x_j}, a_j \alpha + b \neq 0. \\ u_p = \dfrac{c}{a_j} x_j e^{\alpha x_j}, a_j \alpha + b = 0. \end{cases}$$

۱-۱۸مثال: جواب عمومی معادله $3u_x - u_y + u_z + 2u = 4e^{2z}$ به صورت زیر است.

$$u = u_g + u_p = e^{-\frac{2}{3}x} f(-x-3y, -z-y) + e^{2z}.$$

۱-۱۹ معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی مرتبه دوم خطی

درحالت کلی شکل چنین معادلاتی به صورت زیر می باشد

$$a(x,y)u_{xx} + b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} = F(x,y,u,u_x,u_y).$$

که در آن F یک تابع خطی بر حسب u_y, u_x, u می باشد.

$$a(x,y)u_{xx} + b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy}$$

را **جزء اصلی** معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی فوق می نامیم که در آن $\Delta = b^2 - 4ac$ را **مبین جزء اصلی**معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی فوق می نامیم. در این صورت سه حالت رخ می دهد

الف- اگر $\Delta = b^2 - 4ac > 0$، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی فوق را از نوع **هذلولوی(Hyperbolic**)می نامند.

ب- اگر $\Delta = b^2 - 4ac = 0$، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی فوق را از نوع **سهموی(Parabolic)**می نامند.

ج- اگر $\Delta = b^2 - 4ac < 0$، در این صورت معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی فوق را از نوع **بیضوی(Elliptic)** می نامند.

۱-۲۰ معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی مرتبه دوم خطی n متغیره با ضرایب ثابت:

درحالت کلی شکل چنین معادلاتی به صورت زیر می باشد

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f(x_1,\dots,x_n). \qquad (۱-۲۰-۱)$$

اگر در معادله (۱-۲۰-۱)، $f(x_1,\dots,x_n) = 0$ آنگاه

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = 0. \qquad (۱-۲۰-۲)$$

را **همگن** معادله (۱-۲۰-۱) می نامند. با تعریف

$$D_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}, L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} D_{x_i} D_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i D_{x_i} + c$$

معادله (۱-۲۰-۲) به صورت $Lu = 0$ نوشته می شود. اگر Lرا به توان به صورت $L = L_1 L_2$ نوشت یعنی

$$L = L_1 L_2 = (a_1 D_{x_1} + a_2 D_{x_2} + \dots + a_n D_{x_n} + a_{n+1})$$
$$(b_1 D_{x_1} + b_2 D_{x_2} + \dots + b_n D_{x_n} + b_{n+1})$$

در این صورت جواب عمومی معادله(۱-۲۰-۲) به صورت زیر خواهد بود

$$u = e^{-\frac{a_{n+1}}{a_1}x_1} f(-a_3x_2 + a_2x_3, \ldots, -a_nx_2 + a_2x_n, -a_nx_{n-1} + a_{n-1}x_n)$$
$$+ e^{-\frac{b_{n+1}}{b_1}x_1} f(-b_3x_2 + b_2x_3, \ldots, -b_nx_2 + b_2x_n, -b_nx_{n-1} + b_{n-1}x_n).$$

۱-۲۱ مثال: جواب عمومی معادله $2u_{xx} + u_{xy} + 2u_{xz} - u_{yy} - u_{yz} = 0$ به صورت زیربدست می آید

$$(2D_x^2 + D_xD_y + 2D_xD_z - D_y^2 - D_yD_z)u = 0.$$

در این صورت می توان نوشت

$$(D_x + D_y + D_z)(2D_x - D_y)u = 0.$$

جواب عمومی معادله فوق به صورت زیر می باشد

$$u = f(x - y, z - y) + g(x + 2y, z).$$

۱-۲۲ قضیه : اگر u_g جواب عمومی معادله (۱-۲۰-۲) و u_p جواب خصوصی معادله(۱-۲۰-۱)، در ناحیه $D \subseteq R^n$ باشد، آنگاه $u_g + u_p$ جواب عمومی معادله(۱-۲۰-۱) می باشد.

۱-۲۳تذکر: اگر $\begin{cases} u_{p_k} \\ k = 1, \ldots, n \end{cases}$ جوابهای خصوصی معادلات

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f_k(x_1, \ldots, x_n)$$

باشد، آنگاه $\sum_{k=1}^{n} u_{p_k}$ جواب خصوصی معادله

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = \sum_{k=1}^{n} f_k(x_1, \ldots, x_n)$$

می باشد.

۱-۲۴روش های کوتاه برای تعیین جواب خصوصی

الف- در معادله $p(D_{x_1}, \ldots, D_{x_n})u = G(x_1, \ldots, x_n)$ که در آن

$$p(D_{x_1}, \ldots, D_{x_n}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} D_{x_i}^p D_{x_j}^q + \sum_{i=1}^{n} b_i D_{x_i}^s + c$$

اگر $G(x_1, \ldots, x_n) = ke^{(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n)}$، در این صورت برای تعیین جواب خصوصی به صورت زیر عمل می کنیم

با اثرعملگر $\dfrac{1}{p(D_{x_1},...,D_{x_n})}$ به طرفین معادله فوق خواهیم داشت .

$$u_p=\frac{1}{p(\alpha_1,...,\alpha_n)}[ke^{(\alpha_1x_1+...+\alpha_nx_n)}].$$

که در آن $p(\alpha_1,...,\alpha_n)\neq 0$ می باشد. زیرا

$$\begin{aligned}
&p(D_{x_1},...,D_{x_n})[ke^{(\alpha_1x_1+...+\alpha_nx_n)}]\\
&=(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}D_{x_i}^{p}D_{x_j}^{q}+\sum_{i=1}^{n}b_iD_{x_i}^{s}+c)[ke^{(\alpha_1x_1+...+\alpha_nx_n)}]\\
&=(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\alpha_i^{p}\alpha_j^{q}+\sum_{i=1}^{n}b_i\alpha_i^{s}+c)[ke^{(\alpha_1x_1+...+\alpha_nx_n)}]\\
&=p(\alpha_1,...,\alpha_n)[ke^{(\alpha_1x_1+...+\alpha_nx_n)}].
\end{aligned}$$

اگر $p(\alpha_1,...,\alpha_n)\neq 0$ ، با اعمال عملگر $\dfrac{1}{p(D_{x_1},...,D_{x_n})}$ به طرفین تساوی فوق و تقسیم آن بر $p(\alpha_1,...,\alpha_n)$ ، خواهیم داشت

$$\frac{1}{p(D_{x_1},...,D_{x_n})}[ke^{(\alpha_1x_1+...+\alpha_nx_n)}]=\frac{1}{p(\alpha_1,...,\alpha_n)}[ke^{(\alpha_1x_1+...+\alpha_nx_n)}].$$

ب- در معادله $p(D_{x_1}^2,...,D_{x_n}^2)u=G(x_1,...,x_n)$ که در آن

$$p(D_{x_1}^2,...,D_{x_n}^2)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}D_{x_i}^{2p}D_{x_j}^{2q}+\sum_{i=1}^{n}b_iD_{x_i}^{2s}+c$$

اگر $G(x_1,...,x_n)=k\sin(\alpha_1x_1+...+\alpha_nx_n)$ ، در این صورت برای تعیین جواب خصوصی به صورت زیر عمل می کنیم

با اثرعملگر $\dfrac{1}{p(D_{x_1}^2,...,D_{x_n}^2)}$ به طرفین معادله فوق خواهیم داشت

$$u_p=\frac{1}{p(-\alpha_1^2,...,-\alpha_n^2)}[k\sin(\alpha_1x_1+...+\alpha_nx_n)].$$

که در آن $p(-\alpha_1^2,...,-\alpha_n^2)\neq 0$ ، می باشد. زیرا

$$\begin{aligned}
&p(D_{x_1}^2,...,D_{x_n}^2)[k\sin(\alpha_1x_1+...+\alpha_nx_n)]\\
&=(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}D_{x_i}^{2p}D_{x_j}^{2q}+\sum_{i=1}^{n}b_iD_{x_i}^{2s}+c)[k\sin(\alpha_1x_1+...+\alpha_nx_n)]\\
&=(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(-\alpha_i^2)^p(-\alpha_j^2)^q+\sum_{i=1}^{n}b_i(-\alpha_i^2)^s+c)[k\sin(\alpha_1x_1+...+\alpha_nx_n)]\\
&=p(-\alpha_1^2,...,-\alpha_n^2)[k\sin(\alpha_1x_1+...+\alpha_nx_n)].
\end{aligned}$$

اگر $p(-\alpha_1^2,...,-\alpha_n^2)\neq 0$ ، با اثرعملگر $\frac{1}{p(D_{x_1}^2,...,D_{x_n}^2)}$ به طرفین تساوی فوق و تقسیم آن بر $p(-\alpha_1^2,...,-\alpha_n^2)$، خواهیم داشت

$$\frac{1}{p(D_{x_1}^2,...,D_{x_n}^2)}[k\sin(\alpha_1x_1+...+\alpha_nx_n)]=$$
$$\frac{1}{p(-\alpha_1^2,...,-\alpha_n^2)}[k\sin(\alpha_1x_1+...+\alpha_nx_n)].$$

۱-۲۵ مثال: جواب خصوصی معادله $2u_{xx}+u_{xy}+2u_{xz}-u_{yy}-u_{yz}=2e^{x+y}$ به صورت زیربه دست می آید

$$(2D_x^2+D_xD_y+2D_xD_z-D_y^2-D_yD_z)u=2e^{x+y}.$$

در این حالت می توان نوشت

$$u=\frac{1}{(2D_x^2+D_xD_y+2D_xD_z-D_y^2-D_yD_z)}[2e^{x+y}].$$

در این صورت جواب خصوصی معادله فوق به شکل زیر می باشد

$$u_p=\frac{1}{(2(1)^2+1.1+2.1.0-(1)^2-1.0)}[2e^{x+y}]=\frac{2}{2+1-1}e^{x+y}=e^{x+y}.$$

۱-۲۶تذکر: معادله موج یک بعدی به صورت $u_{tt}=c^2u_{xx}$ می باشد، که درآن c یک ثابت اختیاری است. هرجواب معادله موج یک بعدی به صورت $u(x,t)=f(x-ct)+g(x+ct)$ است. (درایجا توابع f و g دارای مشتقات مرتبه دوم پیوسته می باشند) زیرا

$$\begin{aligned}
&(D_t^2-c^2D_x^2)u=0\Rightarrow(D_t-cD_x)(D_t+cD_x)u=0\\
&\Rightarrow\begin{cases}u_t-cu_x=0\\ u_t+cu_x=0\end{cases}\Rightarrow u=u(x,t)=f(x-ct)+g(x+ct).
\end{aligned}$$

۱-۲۷تعریف: سولیتون موجی می باشد که وقتی با سرعت ثابت حرکت می کند شکل خودش را حفظ می کند.