دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی‌تکنیک تهران)
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد
ریاضی محض - گرایش منطق

عنوان

ساختارهای ژنریک و همجوشی تئوری‌های مرتبه اول

توسط
زانیار قادرنژاد

استاد راهنما
دکتر مسعود پورمهدیان

استاد مشاور
دکتر سید محمد باقری

شهریور ۱۳۸۷
تهران

بسمه تعالی

تاریخ: ۱۳۸۷/۷/۱۴
شماره: -

فرم اطلاعات پایان‌نامه
کارشناسی- ارشد و دکترا

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی‌تکنیک تهران)

معاونت پژوهشی
فرم پروژه تحصیلات تکمیلی ۷

مشخصات دانشجو:

نام و نام خانوادگی: زانیار قادرنژاد   دانشجوی آزاد ✓   بورسیه ○   معادل ○

شماره دانشجوئی: ۸۵۱۱۳۰۷۱   دانشکده: ریاضی و علوم کامپیوتر   رشته تحصیلی: ریاضی محض   گروه: -

مشخصات استاد راهنما:

نام و نام خانوادگی: دکتر مسعود پورمهدیان   درجه و رتبه: استادیار

مشخصات استاد مشاور:

نام و نام خانوادگی: دکتر سید محمد باقری   درجه و رتبه: استادیار

عنوان پایان‌نامه به فارسی : ساختارهای ژنریک و همجوشی تئوریهای مرتبه اول

عنوان پایان‌نامه به انگلیسی: "Generic structures and fusion of first order logic"

نوع پروژه: کارشناسی ○   ارشد ✓   دکترا ○   سال تحصیلی: ۸۵-۸۷

کاربردی ○   بنیادی ✓   توسعه‌ای ○   نظری ○

تاریخ شروع :آبان ۸۶   تاریخ خاتمه : شهریور ۸۷   تعداد واحد : ۶   سازمان تأمین کننده اعتبار : دانشگاه امیر کبیر

واژه‌های کلیدی به فارسی: ساختارهای ژنریک – تئوری های بطور قوی مینیمال-ساختمان فراسه-همجوشی-ساختارهای هورشوفسکی

واژه‌های کلیدی به انگلیسی :-Generic structures-Hrushovski amalgamation- Fraisse construction-Fusion-
Strongly minimal theories

مشخصات ظاهری	تعداد صفحات ۶۵	تصویر ○ جدول ○ نمودار ○ نقشه ○ واژه‌نامه ○	تعداد مراجع ۴۷	تعداد صفحات ضمائم -
زبان متن	فارسی ✓ انگلیسی ○	چکیده	فارسی ✓ انگلیسی ✓	
یادداشت :-				

نظرها و پیشنهادها به منظور بهبود فعالیت‌های پژوهشی دانشگاه

استاد: -

دانشجو: -

امضاء استاد راهنما: **تاریخ:**

۱ : ارائه به معاونت پژوهشی به همراه یک نسخه الکترونیکی از پایان‌نامه و فرم اطلاعات پایان‌نامه بصورت PDF همراه چاپ چکیده (فارسی انگلیسی) و فرم اطلاعات پایان‌نامه
۲ : ارائه به کتابخانه دانشکده (شامل دو جلد پایان نامه به همراه نسخه الکترونیکی فرم در لوح فشرده طبق نمونه اعلام شده در صفحه خانگی کتابخانه مرکزی) مرکزی

پیشکەش بە دایک و باوکی خۆشەویستم

سپاسگزاری

وظیفه خود می‌دانم که از زحمات اساتید و دوستانی که در نگارش این پایان‌نامه مرا یاری رساندند قدردانی و سپاسگزاری نمایم هر چند کلمات را توان احترام و قدر ایشان نیست.

در ابتدا از استاد راهنمای عزیزم جناب دکتر مسعود پورمهدیان که موضوع پایان‌نامه را پیشنهاد نمودند و در انجام آن بدون هیچ مضایقه‌ای مرا یاری رساندند صمیمانه سپاسگزاری می‌کنم و البته هم ایشان بودند که مرا با گروه منطق پژوهشگاه دانش‌های بنیادی آشنا ساختند و در دوران تحصیل پدرانه مرا راهنمای بودند. از استاد مشاور عزیزم جناب دکتر سید محمد باقری که لطف و توجه ایشان همواره شامل حال من بوده و در کمال فروتنی و بزرگورای همواره مرا یاری رسانده‌اند سپاسگزاری می‌کنم و همچنین از لغات پارسی پیشنهادی ایشان در پایانامه‌بسیار سپاسگزارم. از اساتید گروه منطق پژوهشگاه دانش‌های بنیادی که با ارائه سمینارها و کارسوق‌ها مرا با دنیای متنوع و زیبای منطق ریاضی بیشتر آشنا نمودند بسیار سپاسگزارم بزرگوارانی چون جناب دکتر شهرام محسنی‌پور، جناب دکتر مجید علیزاده.

از اساتید دوران کارشناسی در دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر جناب دکتر بیژن هنری که مرا راهنما در دنیای زیبای ریاضی بودند صمیمانه سپاسگزاری می‌کنم. همچنین از دکتر مجید علیزاده، دکتر فرهاد رحمتی و دکتر بهروز خسروی در دوران کارشناسی ارشد قدردانی می‌کنم.

از آموزگار ریاضی و هندسه‌ی دوران راهنمایی خود جناب غلامرضا شادی در مدرسه راهنمایی شهید فهمیده تبریز که مرا با دنیای زیبای ریاضی و تفکر منطقی آشنا کردند از صمیم قلب سپاسگزارم. بسا دانش‌آموزانی که اخلاق و رفتار انسانی این بزرگوار تاثیری مهم در زندگی‌شان داشته است.

سپاسگزاری از همه دوستان کاری ناشدنی و غیر ممکن می‌نماید و بسا مهر و لطف‌شان که مرا همیار بوده و دوران تحصیل را برای من خوشایندتر نمودنده‌اند. تنها از دو عزیز که در دو سال اخیر تحصیل و در این پایان‌نامه مرا بیشتر مورد لطف قرار دادند دوستان گرامیم جناب آقای مسعود قائمی و جناب آقای امین ساکزاد سپاسگزاری می‌نمایم. امید که دوستی‌هامان پایدار باشد.

از خانواده عزیزم که مرا همواره مشوق و یاری‌گر بوده‌اند سپاسگزارم و یاد و خاطره‌ی پدر بزرگ عزیزم را که دوست و مشوقی بزرگ برای من بود را گرامی می‌دارم.

خود را بختیار می‌دانم که با چنین بزرگوارانی در ارتباط بوده و از وجودشان استفاده نموده‌ام. آرزومند پیروزی و سرافرازیشان هستم.

چکیــده

در این پایان‌نامه به بررسی ساختارهای ژنریک و همجوشی تئوری‌های مرتبه‌اول پرداخته‌ایم. ساختارهای ژنریک اولین بار توسط هورشوفسکی برای ساختن مثال نقضی برای حدس زیلبر در مورد سه‌گانگی هندسه تئوری‌های به‌طورقوی‌مینیمال ارائه گردید که در واقع رویکردی جدید به روندی بود که پیشتر توسط فراسه و جانسون ارائه گردیده بود. این ساختار با توجه به ابزارهای مناسبی که در کنترل رفتار ساختار ژنریک دارد (تئورهای خاص با ویژگی‌های مناسب) از زمان ابداع تا کنون کاربردهای فراوانی برای ساختن مثال‌های گوناگون داشته است. کاربردهای گوناگون این ساختار در شاخه‌های مختلف مدل تئوری اهمیت این ساختار را برای بررسی رفتارهای آنها همچنان حفظ کرده است. در این پایان‌نامه به ارائه روند کلی و اصل موضوعی به زوایای مختلف آن پرداخته‌ایم. همچنین در این پایان‌نامه به بررسی همجوشی تئوری‌های مرتبه اول (تئوری‌های به‌طورقوی‌مینیمال با ویژگی DMP) نیز پرداخته شده که خود، ارتباط کاملی با ساختارهای ژنریک دارد. دریافت ویژگی‌های مناسب از تئوری ارائه شده، نیاز به رویکردی هوشمندانه دارد که ساختارهای ژنریک و همجوشی تئوری‌ها به عنوان یکی از بهترین آنها تا به حال، عمل کرده است.

کلمات کلیدی: ساختارهای ژنریک، تئوری‌های به‌طورقوی‌مینیمال، ساختمان فراسه، همجوشی تئوری‌های مرتبه‌اول، ساختارهای هورشوفسکی، حدس زیلبر.

فهرست مندرجات

فصل ۱

پیش‌نیازها

۱.۱ درآمد

تئوری مدل‌ها و یا به عبارتی دیگر مدل تئوری شاخه‌ای از منطق ریاضی است که به بررسی ساختارهای ریاضی (ساختارهای عام) در منطق مرتبه اول می‌پردازد. این تعریف را در عین غیرگویا بودن می‌توان به عنوان تعریفی قابل قبول برای مدل تئوری، پذیرفت. پیش‌گامان مدل تئوری را می‌توان لوفن‌هایم [۱] (۱۹۱۵) ، اسکولم [۲] (۱۹۲۰)، گودل [۳] (۱۹۳۰) ، تارسکی [۴] (۱۹۳۱) و مالتسف [۵] (۱۹۳۶) معرفی نمود. مدل تئوری در اواخر دهه‌ی ۴۰ و اوایل دهه‌ی ۵۰ میلادی با کارهای هنکین [۶] ، رابینسون [۷] و تارسکی به عنوان شاخه‌ای مستقل در منطق ریاضی مطرح گردید. در ابتدا بیشتر دیدگاه‌ها و مفاهیم تعریف شده و همچنین کاربردهای آن به دیدگاه‌های جبری نزدیک بودند و از این روست که تارسکی مدل تئوری را فراریاضیات دستگاه‌های جبری می‌دانست و همین‌طور چنگ و کیسلر [۸] در کتاب ارزشمند خود [۱۲] مدل تئوری را « جبر جهانی + منطق » معرفی می‌کنند. البته معناشناسی منطق مرتبه اول در این میان، ارتباط نزدیک مدل تئوری و جبر را بیشتر روشن می‌کند. روند پیشرفت و مسائل مدل تئوری را تا اواخر دهه‌ی ۶۰ میلادی می‌توان روند بنیادی مدل تئوری نام نهاد که در واقع از هر دو دیدگاه درونی و بیرونی [۹] نیز برخوردار بود.[۱۱] ابزارها، مفاهیم و قضایای مورد بررسی مفاهیم و قضایایی چون حذف سور، مدل کامل بودن، مدل‌های شمارای تئوری‌های کامل، فراضرب، حذف تایپ، قضیه فشردگی،

[۱] Leopold Löwenheim
[۲] Thoralf Skolem
[۳] Kurt Gödel
[۴] Alfred Tarski
[۵] Anatoly Maltcev
[۶] Leon Henkin
[۷] Abraham Robinson
[۸] C.Chang and J.Keisler
[۹] منظور از دیدگاه درونی بررسی مدل تئوری با ابزارهای تعریف شده در مدل تئوری است که آنرا دیدگاه محض (Absrtact Model Theory) نیز می‌نامند و منظور از دیدگاه بیرونی دیدگاهی است با نظرگاهی در ساختارهای ریاضی مانند تئوری گروه‌ها.

قضیه‌های لوفن‌هایم—اسکولم بودند. البته خواص منطق مرتبه اول و ابزارهای نظریه مجموعه‌ها نیز در میان دارای نقش مهمی بودند.

پس از مطرح شدن مفهوم تئوری‌های κ—جازم در اواسط دهه‌ی ۵۰ میلادی، واش و وات [۱۰] پیشرفت‌هایی در شناختن تئوری‌های ناشمارا جازم انجام دادند. از آن جمله ثابت کردند اگر تئوری مرتبه اولی در زبان شمارا که مدل متناهی ندارد، برای یک کاردینال نامتناهی جازم باشد در این صورت تئوری کامل خواهد بود. واش در سال ۱۹۵۴ این حدس را که اگر تئوری مزبور برای یک کاردینال ناشمارا جازم باشد، در این صورت برای تمام کاردینال‌های ناشمارا جازم است را مطرح نمود. البته پیشتر مشابه این حدس توسط اشتانیتز[۱۱]، در مورد میدان‌های بسته جبری مطرح گردیده بود. (رجوع شود به [۱])

در سال ۱۹٦۵ برای نخستین بار مورلی[۱۲]، برهانی برای این قضیه ارائه داد که سرآغاز فصل جدیدی در مدل تئوری گردید. علاوه بر نتایج خود قضیه، طرح برهان و مفاهیم جدید تعریف شده برای اثبات، در روند کارهای بعدی تاثیرگذار بود. در ادامه این دیدگاه جدید شلاه[۱۳] با طرح مسئله رده‌بندی تئوری‌های مرتبه اول [۳٦] افق‌های جدیدی را در مدل تئوری باز نمود. در سال ۱۹۷۸ شلاه با تعمیم قضیه‌ی مورلی برای زبان‌های ناشمارا، شاخه‌ی تئوری پایداری[۱۴] را بنیاد نهاد. تئوری پایداری و رده‌بندی تئوری‌های مرتبه اول نقش بنیادی و بسیار مهمی در پیشرفت‌های ۳۵ سال اخیر ایفا نموده است. دیدگاه مورلی و شلاه را می توان تا حد زیادی بررسی درونی مدل تئوری در نظر گرفت که به طور عمیقی با نظریه مجموعه‌های ترکیبیاتی درآمیخته است. که در راستای کارهای انجام شده در مقایسه با و مفاهیم قبلی مفاهیم و ابزارهایی چون ناوابستگی، شاخه‌شدن، رتبه و تایپ نیز به مفاهیم و ابزارهای کلیدی مدل تئوری اضافه گردیده است.

دیدگاه دیگری که بعد از اثبات قضیه‌ی مورلی در دهه‌های ۷۰ و ۸۰ میلادی شکل گرفت و دیدگاهی با خاستگاه بیشتر بیرونی بود، توسط افرادی چون زیلبر[۱۵]، چرلین[۱٦] ، لاخلان[۱۷] و مکینتایر[۱۸] مطرح گردید. این دیدگاه جدید که مفاهیم جدید را در ساختارهای ریاضی بررسی می‌کرد سئوالات و حدس‌های متعددی را مطرح ساخت که خاستگاه آن‌ها بیشتر ساختارهای ریاضی بودند و این سئوالات کلیدی سنگ‌بنای کارهای بعدی در این دیدگاه جدید گردید.[۱۱]

---

[۱۰] Robert L.Vaught and Jerzy Łoś
[۱۱] Ernst Steinitz
[۱۲] Michael D. Morley
[۱۳] Saharon Shelah
[۱۴] Stability Theory
[۱۵] Boris Zilber
[۱٦] Cherlin
[۱۷] Lachlan
[۱۸] Macintyre

یکی از مهمترین این حدس‌ها، حدس زیلبر در مورد هندسه‌ی[19] تئوری‌های به‌طور قوی مینیمال بود که در ادامه‌ی وجود هندسه جدیدی بود که در این ساختارها بدست آورده بود. او در رساله‌ی دوم دکترای خود [۴۵] به ارائه برهانی برای وجود هندسه‌ای جدید، غیر یک‌ریخت با دو هندسه‌ی بدیهی و هندسه‌ی فضای برداری مانند می‌پردازد. در این رساله او این حدس را که به حدس سه‌گانگی[20] معروف است مطرح می‌کند که هندسه تئوری‌های به‌طور قوی مینیمال، به یکی از سه صورت هندسه‌ی بدیهی و هندسه‌ی فضای‌برداری—مانند و هندسه‌ی میدان—مانند است. این حدس زیلبر کاملا از دیدگاه برونی و هندسی او سرچشمه می‌گیرد.

در سال ۱۹۸۹ هورشوفسکی[21] در مقاله‌ی [۲۳] تحت عنوان « یک مجموعه به‌طور قوی مینیمال جدید » مثال نقضی برای حدس زیلبر ارائه نمود. در این مقاله او موفق به ارائه رده‌ای از تئوری‌های به‌طور قوی مینیمال گردید که در قالب هیچکدام از هندسه‌های ارائه شده قرار نمی‌گرفت. در ادامه در مقاله‌ای [۲۲] به سئوال چرلین در مورد وجود تئوری‌های به‌طور قوی مینیمال ماکزیمال نیز جواب داد. رد حدس زیلبر و ارائه مثال‌های جدید در درک بهتر هندسه تئوری‌های به‌طور قوی مینیمال کمک فراوانی نمود که در نهایت همکاری زیلبر و هورشوفسکی منجر به ابداع شاخه‌هایی چون هندسه‌زاریسکی[22] [۴۷] و پایه‌های تئوری‌پایداری‌هندسی[23] [۳۲] گردید. این شاخه‌های جدید و بررسی‌های هندسی ساختارها، مدل تئوری را تا حدود بسیاری به هندسه جبری نزدیک کرد. از آن روست که هاجز[24][۲۵] مدل تئوری جدید را « هندسه جبری بدون میدان‌ها » تعریف می‌کند .

روند هوشمندانه هورشوفسکی، ارائه شده برای ساختن مثال نقض و همین طور پاسخ به سئوال چرلین، خود به‌تنهایی دارای ارزش فراوانی است زیرا که در ادامه و با استفاده از همین روند، موفق به ساخت مثال‌های برای جواب به سئوالات متعددی گردیدند. آنچه در این پایان‌نامه ارائه گردیده بررسی هر دو روش است که اولی را ساختار ژنریک و دومی را همجوشی نامند. در ادامه ابتدا برخی مفاهیم بنیادی قضایای کلیدی در تئوری پایداری ارائه گردیده است.

درفصل دوم به معرفی ساختار ژنریک خواهیم پرداخت که در انتهای فصل ساختار ژنریک پایدار را ارائه خواهیم داد و در فصل سوم همجوشی تئوری‌های به‌طور قوی مینیمال ارائه می‌گردد. مراجع اصلی خود مقالات پایه‌ای هورشوفسکی [۲۳، ۲۲] است اما در فصل دوم و سوم از مقالات جدیدتری که در روشن‌تر شدن آنها مفید بوده‌اند استفاده شده است.([۲، ۵، ۳، ۴، ۸، ۹، ۱۴، ۱۵، ۱۹، ۲۰، ۳۸، ۳۹، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴، ۴۶])

[19] منظور از هندسه، هندسه‌ی عملگر بستار جبری است که‌تعریف آن در ۳.۴.۲ ارائه گردیده است.
[20] Trichotomy Conjecture
[21] Ehud Hrushovski
[22] Zariski Geometry
[23] Geometric Stability Theory
[24] Hodges

۲.۱ مروری بر مفاهیم و قضایای مدل تئوری

تعاریف و مفاهیم بنیادی منطق مرتبه اول و مدل تئوری فرض گرفته شده اند(رجوع شود به[۲۹، ۲۵، ۱۲]). همچنین تعاریف و مفاهیم بنیادیی چون کاردینال‌های منظم کاردینال‌های تکین، هم‌پایان‌بودن در نظریه مجموعه‌ها فرض گرفته شده اند(رجوع شود به[۲۶]). در این بخش تنها به برخی از تعاریف و قضایا مربوط به مدل تئوری ساختارهای ژنریک و تئوری پایداری [۳۲، ۳۱، ۱۰، ۱] که به وفور در فصول بعد استفاده می‌شود می‌پردازیم. در تمام مباحثی که در این پایان‌نامه ارائه می‌شود در نمادگذاری موارد زیر رعایت شده است. مجموعه اعداد حقیقی با ω ، کاردینال‌های بزرگ با α, β, κ و نماد κ^+ برای نمایش اولین کاردینال بعد از κ است. برای نمایش فرمول‌ها از حروف $\varphi, \psi, \vartheta, ..$ در الفبای یونانی استفاده می‌کنیم. منظور از φ^M مجموعه‌ی $\{\overline{m} \in M : M \models \varphi(\overline{x})\}$ است و همچنین منظور از L_A ، زبان L به همراه ثوابت c_a است که $a \in A$.

مفهوم تعریف‌پذیری از مفاهیم کلیدی مدل تئوری است به‌طوری‌که برخی مدل تئوری را مدل تئوری ساختارهای تعریف‌پذیر[۲۹] نیز می‌نامند. در واقع مفاهیم غیر تعریف پذیر در مدل تئوری قابل بررسی نیستند.

تعریف ۱.۲.۱ [مجموعه تعریف‌پذیر [۲۵]] فرض کنید M ، L—ساخت باشد. زیرمجموعه X از M^k را مجموعه A—تعریف‌پذیر گوییم در صورتی که L_A—فرمول ϕ یافت شود که $X = \phi^M$. مجموعه‌ی X را مجموعه تعریف‌پذیر گوییم در M—تعریف‌پذیر باشد.

قضیه زیر از ابزارهای مفید برای بررسی تعریف‌پذیری در تئوری پایداری است.

قضیه ۲.۲.۱ فرض کنید M مدل باشد و $A, X \subset M$.در این صورت شرایط زیر معادلند:

۱) مجموعه X ، A—تعریف‌پذیر است.

۲) به‌ازای هر خودریختی M مانند f که به ازای هر $a \in A$ ، $f(a) = a$ است، $f(X) = X$ خواهد بود.

برهان. رجوع شود به [۳۲]. $\triangle$

نماد گذاری از نماد $Aut_A(M)$ برای نمایش گروه خودریختی‌های روی M که زیرمجموعه A را ثابت نگه می‌دارد استفاده خواهیم کرد

[۲۵] Definable Set

تعریف ۳.۲.۱ [مدل همگن [۲۶]] مدل M را برای کاردینال κ ، $\kappa-$همگن گوییم در صورتی‌که به ازای هر یک‌ریختی جزئی بین زیر مجموعه‌های M با کاردینال کمتر از κ را بتوان خودریختی روی M گسترش داد. گوییم M ، مدلی همگن است در صورتی‌که $\mid M \mid-$همگن باشد.

تعریف ۴.۲.۱ [تئوری به‌طور قوی مینیمال [۲۷]] فرض کنید M ، $L-$ساخت باشد و $D \subseteq M^n$ مجموعه‌ای تعریف‌پذیر نامتناهی باشد. گوییم مجموعه D مینیمال است در صورتی‌که به ازای هر $Y \subseteq D$ تعریف‌پذیر، مجموعه Y و یا $D \backslash Y$ متناهی باشد. به فرمول $\phi(\overline{x},\overline{a})$ که مجموعه D را تعریف می کند نیز فرمول مینیمال گوییم. D و ϕ را به‌طور قوی مینیمال گوییم در صورتی‌که ϕ در هر گسترش مقدماتی M مینیمال باشد.
تئوری T را به‌طور قوی مینیمال گوییم در صورتی‌که فرمول $v=v$ به‌طور قوی مینیمال باشد. (اگر $M \models T$ در این‌صورت M به‌طور قوی مینیمال است)

تعریف ۵.۲.۱ [تایپ [۲۸]] فرض کنید p مجموعه‌ای از L_A-فرمول‌هایی با متغیرهای آزاد $v_1,...,v_n$ باشد. مجموعه‌ی p را در صورتی‌که $p \cup Th_A(M)$ سازگار باشد، $n-$تایپ روی A گوییم. در صورتی‌که به ازای هر $\phi \in L_A$ با $n-$متغیر آزاد، $\phi \in p$ و یا $\neg\phi \in p$ برقرار باشد، تایپ p را تایپ کامل گوییم.

تایپ $tp(\overline{a}/A)$ که به صورت $\{\phi(v_1,...,v_n) \in L_A : M \models \phi(\overline{a})\}$ تعریف می‌شود یک تایپ کامل است که به $\overline{a}$ جواب تایپ و یا حقیقی سازی برای تایپ گفته می‌شود. در مواردی که تعداد درایه‌ها مشخص باشد $\overline{a}$ را به همان صورت ساده‌ی a نمایش می‌دهیم.

نماد گذاری از نماد $S_n^M(A)$ برای نمایش تمام $n-$تایپ‌های کامل روی A در مدل M استفاده خواهیم کرد و از نماد $S^M(A)$ برای نمایش مجموعه‌ی $n-$تایپ‌ها به ازای $n < \omega$ ، روی A استفاده خواهیم کرد.

تعریف ۶.۲.۱ [مدل آکنده [۲۹]] مدل M را برای کاردینال κ ، $\kappa-$آکنده گوییم در صورتی‌که به ازای هر $A \subset M$ که $\mid A \mid < \kappa$ باشد، هر $p \in S(A)$ در M ارضا گردد. گوییم M ، مدلی آکنده است در صورتی‌که $\mid M \mid-$آکنده باشد.

[۲۶] Homogeneous Model
[۲۷] Strongly Minimal Theory
[۲۸] Type
[۲۹] Saturated Model

تعریف ۷.۲.۱ [تئوری پایدار [۳۰]] فرض کنید T تئوری کامل در زبان شمارای L باشد. به ازای کاردینال نامتناهی κ گوییم تئوری T ، κ—پایدار است در صورتی که به ازای هر $M \models T$ و $|A| = \kappa$ ، $|S_n^M(A)| = \kappa$ باشد. گوییم تئوری T ، پایدار است در صورتی که کاردینال نامتناهی κ وجود داشته باشد که تئوری T ، κ—پایدار شود.

تعریف ۸.۲.۱ [رتبه مورلی [۳۱]] فرض کنید T تئوری کاملی در زبان L باشد. رتبه مورلی برای فرمول φ که با نماد $MR(\varphi)$ نمایش دهیم، به صورت استقرایی تعریف می‌شود که برد آن $\{-1\} \cup Ord \cup \{\infty\}$ است.

۱) $MR(\varphi) = -1$ در صورتی که فرمول φ ناسازگار باشد.

۲) $MR(\varphi) = \alpha$ در صورتی که مجموعه

$$\{p \in S_n(C) : MR(\psi) < \alpha ,\neg\psi \in p \text{ که } \psi \text{ و به ازای هر فرمول } \varphi \in p\}$$

ناتهی و متناهی باشد.

۳) $MR(\varphi) = \infty$ در صورتی که به ازای هر $\alpha \in Ord$ ، $MR(\varphi) \geq \alpha$ برقرار باشد.

به ازای n—تایپ p ، $MR(p)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$MR(p) = inf\ \{MR(\varphi) : \varphi \in p\}$$

و در صورتی که به ازای هیچ $\alpha \in Ord$ ، $MR(p) = \alpha$ نباشد در این‌صورت $MR(p) = \infty$ قرار می‌دهیم.

تایپ p را تایپ جبری [۳۲] گوییم در صورتی‌که $MR(p) = 0$.

لم ۹.۲.۱ فرض کنید T تئوری کاملی در زبان L و p یک n—تایپ و α اوردینال باشد. آنگاه $MR(p) = \alpha$ اگر و تنها اگر فرمول φ موجود باشد بطوری که مجموعه

$$\{q \in S_n(C) : \varphi \in q \text{ و } MR(q) = a\}$$

ناتهی و متناهی است و این مجموعه با مجموعه

$$\{q \in S_n(C) : p \subset q \text{ و } MR(q) = a\}$$

یکسان است.

[۳۰] Stable Theory
[۳۱] Morley Rank
[۳۲] Algebraic Type

برهان. رجوع شود به [۳۰، ۱۰] $\triangle$

تعریف ۱۰.۲.۱ [درجه مورلی [۳۳]] فرض کنید p، n—تایپی در یک تئوری کامل باشد و همچنین فرض کنید $MR(p) = \alpha < \infty$. بنابر لم ۹.۲.۱ مجموعه $\{q \in S_n(C) : p \subset q$ و $MR(q) = \alpha\}$ متناهی است. درجه مورلی تایپ p که آنرا با $MD(p)$ نمایش می‌دهیم برابر خواهد بود با $|\{q \in S_n(C) : p \subset q$ و $MR(q) = \alpha\}|$.

تایپ p را تایپ ایستا [۳۴] گوییم در صورتی‌که $MD(p) = ۱$.

تعاریف رتبه مورلی و درجه مورلی اولین بار برای تئوری‌های به‌طور کامل متعالی در اثبات قضیه مورلی استفاده گردید[۳۰]. تعریف ارائه شده در اینجا معادل با تعریف اصلی مورلی است که در [۱۰] ارائه گردیده است. مفاهیم رتبه و درجه از مفاهیم مهم مدل تئوری جدید است که با گسترش‌های بسیار مختلفی برای بررسی رفتار تایپ‌های مدل در تئوری، استفاده می‌شود.

تعریف ۱۱.۲.۱ [بستار جبری [۳۵]] فرض A زیرمجموعه‌ای از مدل M باشد. n—تایی $\overline{a}$ از مجموعه M را روی A جبری گوییم در صورتی‌که $tp_M(\overline{a}/A)$ جبری باشد. بستار جبری A (در M) را که با نماد $acl(A)$ نمایش می‌دهیم عبارتست از مجموعه $\{a \in M :$ روی A جبری است $a\}$ که با مجموعه

$$\{a \in M : \ \text{وجود دارد که } M \models \phi(a) \text{ و } |\phi(M)| < \omega \ \ \phi \in L_A\}$$

قضیه ۱۲.۲.۱ فرض کنید تئوری T به‌طور قوی مینیمال باشد. اگر $A \subset \overline{M}$ و $\overline{a} \in M$ ، در این‌صورت $RM(\overline{a}/A) = dim(\overline{a}/A)$ است.

برهان. رجوع شود به [۱۰، ۲۹]. $\triangle$

تعریف ۱۳.۲.۱ [بستار تعریف‌پذیر [۳۶]] فرض A زیرمجموعه‌ای از مدل M باشد. بستار تعریف‌پذیر A (در M) را که با نماد $dcl(A)$ نمایش می‌دهیم عبارتست از مجموعه

$$\{a \in M : \ \text{است } \phi \text{ تنها جواب } a \text{ وجود دارد که } \phi \in L_A\}$$

---

[۳۳] Morley Degree
[۳۴] Stationary Type
[۳۵] Algebraic Closure
[۳۶] Definable Closure

قضیه ۱۴.۲.۱ فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از مدل M باشد.

۱) $a \in dcl(A)$ است اگر و تنها اگر $|\{f(a) : f \in Aut_A(M)\}| = 1$.

۲) $a \in acl(A)$ است اگر و تنها اگر $|\{f(a) : f \in Aut_A(M)\}| < \omega$.

برهان. رجوع شود به [۳۲]. $\triangle$

قضیه ۱۵.۲.۱ فرمول ϕ به طور قوی مینیمال است اگر و تنها اگر $RM(\phi) = MD(\phi) = 1$ باشد.

برهان. رجوع شود به [۳۰]. $\triangle$

تعریف ۱۶.۲.۱ [ویژگی DMP[۳۷]] فرض کنید تئوری T به‌طورقوی مینیمال باشد در این صورت گوییم T دارای ویژگی DMP است در صورتی‌که به ازای هر عدد طبیعی k,m و به ازای هر فرمول $\varphi(\overline{x},\overline{b})$ که رتبه مورلی و درجه مورلی فرمول $\varphi(\overline{x},\overline{b})$، k و m باشد فرمول $\theta \in tp(\overline{b})$ وجود داشته باشد که به ازای تمام $\overline{b'} \models \theta$، $MR(\varphi(\overline{x},\overline{b'})) = k$ و $MD(\varphi(\overline{x},\overline{b'})) = m$ باشد.

ویژگی DMP اولین بار توسط هورشوفسکی برای تئوری T به‌طورقوی مینیمال در [۲۲] ارائه گردید و ویژگی DMP ویژگی مناسبی بود که به کمک آن خواص مناسب و تعاریف لازم برای بررسی همجوشی تئوری‌ها که در فصل ۳ بیشتر به این موضوع پرداخته‌ایم، ارائه گردید.

تعریف ۱۷.۲.۱ [مدل سترگ[۳۸]] فرض کنید T تئوری کاملی باشد. $\overline{M}$ را مدل آکنده با کاردینال به اندازه دلخواه بزرگ انتخاب می‌کنیم که به آن جهان تئوری T یا مدل سترگ T گوییم. وجود چنین مدلی در ادامه بحث خواهد شد.

مدل سترگ در واقع مدلی است با کاردینال به اندازه دلخواه بزرگ که تمام مدل‌های مورد بررسی ما یک‌ریخت با زیرمجموعه‌ای از این مدل خواهند شد که البته این زیرمجموعه زیرمدل مقدماتی مدل سترگ خواهد بود لذا تمام مدل‌های مورد بررسی را زیرمدل مقدماتی از مدل سترگ خواهد بود. امتیاز آکنده بودن مدل سترگ، این امکان را فراهم می‌کند که هر تایپ ایزوله روی مدل، دارای جوابی در مدل سترگ خواهد بود. وجود مدل آکنده با کاردینال به اندازه دلخواه بزرگ در واقع قضیه‌ای است به صورت زیر :

---
[۳۷] Definable Multiplicity Property
[۳۸] Monster Model

قضیه ۱.۲.۱۸ با فرض GCH تئوری T ، به ازای هر کاردینال منظم κ ، مدل آکنده با اندازه κ دارد.

برهان. با استفاده از دنباله‌ای از زیرمدل‌های مقدماتی با طول به اندازه‌ی κ . رجوع شود به [۳۹] $\triangle$

در واقع وجود مدل آکنده با کاردینال منظم به اندازه دلخواه بزرگ در بحث مدل سترگ کفایت می‌کند در عین حالی که در تئوری‌های ω—پایدار به کمک تکنیک‌های شاخه‌کردن قضیه بالا به ازای هر کاردینال برقرار است[۲۹، ۳۲]. در تئوری‌های مورد بحث ما در فصل سوم، کلیه‌ی تئوری‌ها به‌طور قوی مینیمال هستند که خود بخشی از تئوری‌های ω—پایدار را تشکیل می‌دهند.

تعریف ۱.۲.۱۹ [تئوری κ—جازم [۳۹]] تئوری T را κ—جازم نامند در صورتی‌که تمام مدل‌های T با کاردینال κ ، یک‌ریخت باشد.

قضیه ۱.۲.۲۰ [قضیه جازمیت مورلی [۴۰]] اگر تئوری T در زبان شمارای L به ازای κ ناشمارایی، κ—جازم باشد در این صورت به ازای تمام کاردینال‌های ناشمارا جازم خواهد بود.

برهان. رجوع شود به [۳۰]. $\triangle$

۱.۳ مروری بر مفاهیم و قضایای تئوری پایداری

تعریف ۱.۳.۱ [زبان چند گونه [۴۱]] فرض کنید I مجموعه‌ای ناتهی باشد که به اعضای آن گونه خواهیم گفت. نمادهای منطقی، منطق I—گونه‌ای مشابه منطق مرتبه اول است تنها با این تفاوت به ازای هر گونه $i \in I$ ، متغیرهای مربوط به آن گونه را برای تمییز با $v_1^i, v_2^i, \ldots$ نمایش خواهیم داد. زبان چند گونه و یا زبان I—گونه، عبارت خواهد بود از نمادهای محمولی و ثوابت و توابع که به ازای هر محمول n—تایی P ، n—تایی مرتب $(i_1, \ldots, i_n)$ از مجموعه گونه‌ها موجود است که در این حالت گوییم P محمولی از گونه‌ی $(i_1, \ldots, i_n)$ است. به همین صورت برای هر ثابت زبان و تابع گونه‌ای از مجموعه‌ی I نسبت می‌دهیم.

حال برای زبان چند گونه ساخت I—گونه‌ای عبارت خواهد بود از :

۱) به ازای هر $i \in I$ مجموعه‌ی ناتهی M_i به عنوان جهان گونه‌ی i ، قرار دارد.

[۳۹] κ-categorical theory
[۴۰] Morley Categoricity
[۴۱] Many Sorted Language

۲) به ازای هر محمول n−تایی P از گونه‌ی $(i_1, ..., i_n)$ ، رابطه‌ی $P^M \subset M_{i_1} \times ... \times M_{i_n}$ قرار دارد.

۳) به ازای هر ثابت c از گونه‌ی i ، c^M در M_i قرار دارد.

۴) به ازای هر تابع f از گونه‌ی $(i_1, ..., i_n, i_{n+1})$ ، تابع $f^M : M_{i_1} \times ... \times M_{i_n} \to M_{i+1}$ قرار دارد.

بقیه مفاهیم صدق و درستی همانند منطق مرتبه اول خواهد بود.

تعریف ۲.۳.۱ برای زبان L و تئوری T در زبان L ، L^{eq} و T^{eq} به صورت زیر تعریف می‌شود. مجموعه Σ را مجموعه تمام فرمول‌های $E(\overline{x}, \overline{y})$ در نظر می‌گیریم بطوریکه به ازای عدد طبیعی n و هر مدل M از تئوری T ، E رابطه‌ای هم‌ارزی روی M^n باشد. مجموعه‌ی I را به صورت $I = \{i_E : E \in \Sigma\}$ در نظر می‌گیریم. به ازای هر $E \in \Sigma$ ، نماد تابع f_E از n−تایی گونه $i_=$ به گونه i_E تعریف می‌کنیم. زبان چند گونه L^{eq} به عنوان زبان I−گونه‌ای که نمادهای تابعی $\{f_E : E \in \Sigma\}$ تعریف می‌کنیم. حال تئوری T^{eq} در زبان L^{eq} بدین‌گونه تعریف می‌کنیم که شامل تمام اصول تئوری T برای گونه‌ی $i_=$ است به همراه اینکه هر تابع f_E ، تابعی پوشا از n−تایی گونه‌ی $i_=$ ، به گونه‌ی i_E بطوریکه $\forall\ \overline{x}\ \overline{y}(E(\overline{x}, \overline{y}) \longleftrightarrow f_E(\overline{x}) = f_E(\overline{y}))$ برقرار باشد.

تعریف L^{eq} ، T^{eq} و M^{eq} برای اولین بر توسط شلاه ارائه گردید [۳۶] که عناصر هر کلاس هم‌ارزی را عنصر موهومی[۴۲] نامید. در ادامه عناصر موهومی را روی مدل سترگ، در نظر خواهیم گرفت.

تعریف ۳.۳.۱ [ناوابستگی مورلی[۴۳]] به ازای مجموعه‌های A, B, C که زیرمجموعه C هستند گوییم A از B روی C ناوابسته است و با نماد $A \downarrow_C B$ نمایش می‌دهیم در صورتی‌که به ازای هر $\overline{a} \in A$ ، $MR(tp(\overline{a}/B \cup C)) = MR(tp(\overline{a}/C))$ باشد.

تعریف ۴.۳.۱ [دنباله ناوابسته[۴۴]] دنباله $(a_i : i < \kappa)$ ناوابسته روی A گوییم در صورتی‌که $a_\alpha \downarrow_A A_\alpha$ برقرار باشد که در آن $A_\alpha = \bigcup_{i<\alpha}\{a_i\}$ است.

---

[۴۲] Imaginary Element

[۴۳] Morley Independence ناوابستگی که در اینجا تعریف می‌شود حالت خاصی از ناوابستگی است که در کلی‌ترین شکل خود تعریف می‌شود و مرتبط با مفهوم رتبه مورلی است.

[۴۴] Independent Sequence

تعریف ۵.۳.۱ [دنباله مورلی[۴۵]] فرض کنید تئوری T پایدار باشد، $M \models T$ و تایپ $p \in S_n^M(A)$ تایپی ایستا باشد. مجموعه I را دنباله مورلی روی A در p نامیم در صورتی‌که I مجموعه‌ای ناوابسته روی A از جواب‌های p در M باشد.

قضیه ۶.۳.۱ فرض کنید تئوری T پایدار باشد در این صورت تئوری T^{eq} نیز پایدار است.

برهان. رجوع شود به [۱۰، ۳۲]. $\triangle$

تعریف ۷.۳.۱ [پایه کانونیک[۴۶]] فرض کنید تئوری T پایدار باشد و $p(x)$ تایپ کاملی روی $\overline{M}$ باشد. فرض کنید $c \in \overline{M}^{eq}$ باشد. گوییم c پایه کانونیک برای p است در صورتی‌که به ازای هر خودریختی f از $\overline{M}$، $f(p) = p$ اگر و تنها اگر $f(c) = c$.

به راحتی می‌توان نشان داد که اگر c_1 و c_2 پایه کانونیک تایپ p باشند در این‌صورت $c_1 \in dcl(c_2)$ و $c_2 \in dcl(c_1)$. حال اگر c پایه کانونیک تایپ p باشد $Cb(p) = dcl(c)$ تعریف می‌کنیم.

قضیه ۸.۳.۱ فرض کنید تئوری $p(x) \in S(A)$ تایپی ایستا باشد در این صورت ویژگی‌های زیر برقرار خواهد بود.

۱) $Cb(p) \subseteq dcl(A)$.

۲) اگر دنباله $a_i : i < \omega$ ، دنباله مورلی p باشد در این‌صورت $Cb(p) \subseteq dcl(a_i : i < \omega)$ خواهد بود.

برهان. رجوع شود به [۱۰، ۳۲]. $\triangle$

تعریف ۹.۳.۱ [جواب ژنریک[۴۷]] فرض کنید $p \in S_n(A)$ تایپ باشد و $\overline{a}$ جوابی برای آن. $\overline{a}$ را جواب ژنریک گوییم در صورتی که $\overline{a} \notin acl(A)$ و $MR(\overline{a}/A) = MR(p)$ باشد.

---

[۴۵] Morley Sequence
[۴۶] Canonical Base
[۴۷] Generic Solution

فصل ۲

ساختارهای ژنریک

در این فصل به معرفی ساختارهای ژنریک می‌پردازیم. همان‌طور که پیشتر به آن پرداختیم ساختار ژنریک، برای رد حدس زیلبر[۲۳] توسط هورشوفسکی بکارگرفته شد. هورشوفسکی این روند را با تصحیح روندی قدیمی‌تر ابداع نمود روندی که به ساختمان *فراسه* [۱] معروف بود. در قسمت دوم به معرفی این ساختمان خواهیم پرداخت. در قسمت اول تعمیم این ساختمان را برای حالت شمارا ارائه خواهیم داد. در دو قسمت انتهای فصل مفاهیم و ابزارهای لازم برای ساختار ژنریک ارائه می گردد. در این فصل در ضمن مبنا قرار دادن مقالات اصلی هورشوفسکی از مقالات جدیدتری چون [۴٦، ۳۹، ۳۸، ۴، ۵] برای روشن‌تر شدن موضوع استفاده شده است. لازم به توضیح است هورشوفسکی ساختار ژنریک را به‌طور خاص برای ساختن تئوری به‌طور قوی مینیمال جدیدی بکار برد که هندسه‌ای متفاوت با حدس زیلبر داشت بنابراین خود روند ساختار ژنریک و مفاهیم مربوط به ساختار هدف اصلی مقاله نبوده‌اند. حال آنکه در مقالات [۳۸، ۴، ۵] به طور مشخص و به‌صورت اصل موضوعی به این ساختمان پرداخته شده است.

اهمیت این روند از آنجایی روشن‌تر می‌شود که هورشوفسکی با کمک همین روند به رد حدس لاخلان در مورد وجود شبه‌صفحه $\aleph_0$—جازم پایدار [۲]، نیز پرداخت (رجوع شود به [۳۹]) و کسانی دیگر چون بالدوین [۵، ۴، ۳، ۲]، باودیش [۹، ۸، ۷، ٦]، اوانس [۱۳] هاسون [۱۵، ۱۴]، هیلز[۱۵]، هالند[۲۰، ۱۹]، مارتین—پیسارو[۹، ۸، ۷]، پوازا [۳۳]، پورمهدیان [۳۵، ۳۴]، وگنر[۳۹، ۳۸] زیگلر [۴۴، ۴۳، ۴۲، ۴۱] و زیلبر[۴٦] این روند را بکار گرفتند و در زوایای مختلف به این ساختار پرداختند. در مقاله دوم هورشوفسکی[۲۲] در جواب به سئوال چرلین نیز همین ساختار نقش مهمی دارد که در فصل ۳ در مورد آن توضیح داده خواهد شد.

---

[۱] Fraïsse

[۲] $\aleph_0$-categorical stable psuedoplane