دانشکده علوم پایه

گروه ریاضیات و کاربردها

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

بررسی بعضی از تفاوت‌های BCI - جبرها و BCK - جبرها

نگارش: زهرا سمیری

استاد راهنما: دکتر محمد علی نصر آزادانی

دی ماه ۱۳۹۰

تقدیر و تشکر

سپاس خدایی را که بر من منت نهاد و خلعت تحصیل را بر من پوشاند و در قلب من چراغ معرفت برافروخت تا از آن به خیر و صلاح خویش الهام گیرم. پروردگارا، از تو می خواهم در قلبم ایمان و به راهم استواری بخشی و در تمام مراحل زندگی یاریم نمایی و لحظه ای مرا به حال خود وانگذاری.

در آغاز لازم می‌دانم کمال تشکر و قدردانی را از خانواده ی عزیزم، بالاخص همسر و فرزندان عزیزتر از جانم بنمایم که اگر همراهی های ایشان نبود، این مجموعه به ثمر نمی رسید، و هم چنین از پدر و مادرم، که راهنمایی هایشان همواره روشنی بخش راه زندگی ام بوده است و از کلیه کسانی که در دوران تحصیل مشوق و پشتیبان اینجانب بوده اند، متشکرم.

هم چنین از زحمات اساتید محترم و دانشجویان دانشگاه شاهد و بالاخص استاد ارجمند جناب آقای دکتر نصر آزادانی که همواره با راهنمایی‌های خود راهگشای اینجانب بوده اند، کمال تشکر و سپاسگزاری را دارم.

از خداوند متعال برای تمامی این عزیزان آرزوی سلامتی و موفقیت را خواستارم.

چکیده

در این پایان نامه بعضی از تفاوت‌های بین BCI-جبرها و BCK-جبرها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. بارزترین تفاوت آن‌ها، روی وجود و تعداد عناصر مینیمال است که این عناصر در BCI-جبرها، زیرجبرهای p-نیمساده را تشکیل می‌دهند. تفاوت دیگر آن‌ها، در زیرجبر بودن ایده‌آل‌هایشان است که در BCK-جبر تمام ایده‌آل‌ها زیرجبر هستند و در مقابل متناظر با آن در BCI-جبر مفهوم ایده‌آل بسته تعریف می‌گردد. وجود مفهوم عناصر پوچتوان در BCI-جبرها رادیکال پوچ و رادیکال k-پوچ را ایجاد می‌کند. سپس با توجه به این تفاوت‌ها، گروهوارهای الحاقی را معرفی و خواص آن را بررسی می‌کنیم.

کلمات کلیدی: عنصر مینیمال، ایده‌آل بسته، عنصر پوچتوان، BCI-جبرهای با شرط S

فهرست مطالب

مقدمه

BCK-جبر و BCI-جبر را که به طور مختصرB-جبر می‌گویند، در سال ۱۹۶۶ توسط ایزاکی [۱] و ایمایی [۲] دو ریاضی‌دان ژاپنی شکل گرفت.

ساختار B-جبرها از دو منشأ متفاوت سرچشمه گرفته است، اولین منشأ بر پایه نظریه مجموعه‌ها است. در نظریه مجموعه‌ها سه عمل بنیادی اجتماع، اشتراک و تفاضل وجود دارد به طوری که جبرهای بولی از این سه عمل منتج شده‌اند. عمل اجتماع و اشتراک، مشبکه‌های توزیع‌پذیر را ایجاد می‌کنند و با بررسی فقط یکی از عمل‌های اجتماع یا اشتراک به نیم‌مشبکه‌های بالایی یا نیم‌مشبکه‌های پایینی هدایت می‌شویم. تفاضل مجموعه‌ها نیز تا قبل از ایزاکی به طور جبری مورد بررسی مبسوط قرار نگرفته بود.

در نظریه مجموعه‌ها با در نظر گرفتن رابطه شمول، داریم:

$$(A-B)-(A-C)\subseteq(C-B)$$

$$A-(A-B)\subseteq B$$

و این رابطه‌ها منشأ تعریف BCK-جبرها شده است. دومین منشأ ایجاد BCI-جبرها، برگرفته از جبر گزاره‌ها در منطق کلاسیک است. به عنوان مثال در جبر گزاره‌ها، داریم:

$$(p\to q)\to((q\to r)\to(p\to r))$$

$$p\to((p\to q)\to q)$$

[۱] K.Iseki

[۲] Y.Imai

اگر رابطه‌های $A - B = A * B$ و $p \to q = q * p$ را تعریف کنیم و هم‌چنین مجموعه تهی و گزاره‌ی همیشه درست را با "$\circ$" نمایش دهیم، آن‌گاه رابطه‌های فوق در اصول زیر صدق می‌کند:

$$((x * y) * (x * z)) * (z * x) = \circ$$

$$(x * (x * y)) * y = \circ$$

دو نام BCI و BCK از ترکیب گزاره‌های منطقی B و C و I و K بدست می‌آید، که از قرار زیر هستند:

$B \qquad (z \to x) \to ((y \to z) \to (y \to x))$

$C \qquad (y \to (z \to x)) \to (z \to (y \to x))$

$K \qquad x \to (y \to x)$

$I \qquad x \to x$

با توجه به این رابطه‌ها، ایزاکی ساختار جدیدی را با عنوان BCK-جبر معرفی نمود. سپس BCI-جبرها به عنوان تعمیمی از آن‌ها ارائه شدند.

هدف از این پایان‌نامه، مطالعه بعضی تفاوت‌های بین BCI-جبر و BCK-جبر می‌باشد. در فصل اول به بیان مفاهیم مقدماتی از مشبکه و BCI-جبر و BCK-جبر می‌پردازیم. با توجه به تعریف‌ها، درمی‌یابیم که BCK-جبر دارای عنصر مینیمال منحصر به فرد صفر است ولی در BCI-جبر عنصرهای مینیمال غیرصفر دیگری نیز وجود دارد که تشکیل زیرجبر p-نیمساده می‌دهند. این زیرجبرها در تناظر یک به یک با گروه‌های آبلی هستند. در فصل دوم با تعریف‌ها و خواص عناصر مینیمال و BCI-جبرهای p-نیمساده آشنا می‌شویم.

در بررسی ایده‌آل‌ها، می‌بینیم که در BCI-جبر هر ایده‌آلی زیرجبر نیست و این تمایز، تعریف ایده‌آل بسته را روی BCI-جبرها ایجاد می‌کند. این تعریف در BCK-جبرها جای بحث ندارد. ایده‌آل‌های بسته، در بررسی خواص جمع‌ها و ضرب‌های مستقیم و جبرهای خارج‌قسمتی نقش بسزایی ایفا می‌کنند. ایده‌آل دیگری که روی BCI-جبر تعریف

می‌شود، ایده‌آل‌های مثبت هستند که تمام ایده‌آل‌ها در BCK-جبر مثبت‌اند. ایده‌آل اول روی نیم‌مشبکه‌های بالایی و پایینی تعریف می‌شود بنابراین ایده‌آل اول فقط روی BCK-جبر تعریف می‌شود. در فصل سوم این ایده‌آل‌ها را بررسی می‌کنیم.

نکته قابل توجه دیگر، عدم برقراری رابطه $0 * x = 0$ در بعضی از BCI-جبرهاست. این مطلب موجب تعریف عنصر پوچتوان می‌گردد. این عناصر زیرمجموعه‌ای از رادیکال‌های k-پوچ هستند. عناصر پوچتوان، زیرجبرهای نیم‌شرکت‌پذیر، شرکت‌پذیر و رادیکال پوچ را موجب می‌شوند. این زیرجبرها روی BCK-جبر حائز اهمیت نیستند، زیرا همه عناصر آن پوچتوان هستند. در فصل چهارم این مباحث را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

BCK-جبرهای با شرط S ساختار گروهواری دارند زیرا دارای عنصر وارون نمی‌باشند ولی BCI-جبرهای با شرط S تشکیل گروهوارهای جزئی مرتب می‌دهند. با تعریف نگاشتی روی گروهوارهای جزئی مرتب و با توجه به تفاوت‌های بررسی شده در فصل‌های قبل، گروهوار الحاقی به‌دست آمده را روی BCI-جبرهای p-نیمساده و نیم‌شرکت‌پذیر، مورد مطالعه قرار می‌دهیم و در آخر با استفاده از همریختی‌های نیم‌گروهی BCI-جبرها، دنباله دقیق معرفی می‌کنیم. در فصل پنجم به بررسی آن‌ها می‌پردازیم.

فصل ۱

تعاریف مقدماتی

در این فصل به معرفی مشبکه و BCI-جبر و BCK-جبر پرداخته و آن دسته از تعریف‌ها، لم‌ها و قضیه‌هایی را که در این پایان‌نامه نیاز داریم، مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در این فصل از مراجع [۱، ۲، ۴] استفاده شده است.

۱.۱ مشبکه

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید A زیرمجموعه ناتهی باشد، $\theta \subseteq A \times A$ را یک *رابطه دوتایی* می‌نامیم و می‌نویسیم

$$a \sim b\ (\theta) \Longleftrightarrow (a, b) \in \theta$$

مهم‌ترین رابطه‌های دوتایی که کاربردهای فراوانی در ریاضیات دارند، رابطه هم‌ارزی و رابطه جزئی مرتب هستند.

تعریف ۲.۱.۱. رابطه دوتایی θ روی مجموعه ناتهی A را یک *رابطه هم‌ارزی* می‌نامیم، اگر برای هر $a, b, c \in A$ رابطه‌های زیر برقرار باشد

(۱) بازتابی $a \sim a\,(\theta)$

(۲) تقارنی $a \sim b\,(\theta) \Rightarrow b \sim a\,(\theta)$

(۳) ترایایی $a \sim b\,(\theta)$ و $b \sim c\,(\theta) \Rightarrow a \sim c\,(\theta)$

تعریف ۳.۱.۱. مجموعه π را یک *افراز* برای مجموعه ناتهی A می‌نامیم، اگر شامل اجتماع تمام عناصر A باشد و اعضای π از هم مجزا باشند.

رابطه هم‌ارزی روی هر مجموعه‌ای، آن را به زیرمجموعه‌های ناتهی افراز می‌کند. در واقع اگر θ یک رابطه هم‌ارزی روی A باشد، مجموعه خارج‌قسمتی $A/\theta = \{\overline{a} \mid a \in A\}$ یک افراز روی A مشخص می‌کند، که مجموعه $\overline{a}$ شامل عناصر $\{x \in A \mid x \sim a\,(\theta)\}$ می‌باشد و آن را *کلاس هم‌ارزی عنصر* a می‌نامیم.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید π یک افراز روی مجموعه ناتهی A باشد، آن‌گاه θ رابطه هم‌ارزی روی A است اگر

$$a \sim b\,(\theta) \iff \exists C \in \pi \text{ و } a, b \in C$$

تعریف ۵.۱.۱. رابطه دوتایی $\leqslant$ روی مجوعه ناتهی A را یک *ترتیب جزئی* می‌نامیم، اگر برای هر $a, b, c \in A$ رابطه‌های زیر برقرار باشد

(۱) بازتابی $a \leqslant a$

(۲) پادتقارنی $a \leqslant b$ و $b \leqslant a \Rightarrow a = b$

(۳) ترایایی $a \leqslant b$ و $b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$

در این صورت به ساختار $(A; \leqslant)$ *مجموعه جزئی مرتب* می‌گوییم.

تعریف ۶.۱.۱. فرض می‌کنیم $(A; \leqslant)$ یک مجموعه جزئی مرتب باشد و $B \subseteq A$. مجموعه جزئی مرتب $(A; \leqslant)$ را *مجموعه کلی مرتب* می‌نامیم هر گاه برای هر $a, b \in A$، $a \leqslant b$ یا $b \leqslant a$ باشد. زیرمجموعه ناتهی B از A را یک *زنجیر* در A می‌نامیم هر گاه $(B; \leqslant)$ یک مجموعه کلی مرتب باشد.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنیم $(A;\leqslant)$ یک مجموعه جزئی مرتب باشد و $B \subseteq A$. عنصر $y \in B$ را عضو *مینیمال* B می‌نامیم هر گاه عضوی از B مانند b، به‌جز y وجود نداشته باشد به طوری که $b \leqslant y$. $f \in A$ را یک *کران پایین* B می‌نامیم هر گاه به ازای هر $b \in B$، $f \leqslant b$ باشد. عنصر $a \in A$ را *ماکزیمال* می‌نامیم هر گاه عضوی از A مانند b، به‌جز a وجود نداشته باشد به طوری که $a \leqslant b$. $d \in A$ را یک *کران بالای* B می‌نامیم هر گاه به ازای هر $b \in B$، $b \leqslant b$ باشد.

لم زرن: فرض کنیم A یک مجموعه ناتهی جزئی مرتب باشد و هر زنجیر آن کران بالایی در A داشته باشد. در این صورت A عنصر ماکزیمال دارد.

تعریف ۸.۱.۱. در مجموعه جزئی مرتب $(L;\leqslant)$ عنصر $u \in L$ *بزرگترین کران پایین* برای دو عنصر $a, b \in L$ می‌باشد، اگر

۱. u کران پایین a, b باشد، یعنی $u \leqslant a$ و $u \leqslant b$ ؛

۲. اگر کران بالای دیگری مانند v برای a, b وجود داشته باشد، آن‌گاه $v \leqslant u$.

تعریف ۹.۱.۱. در مجموعه جزئی مرتب $(L;\leqslant)$ عنصر $u \in L$ *کوچکترین کران بالا* برای دو عنصر $a, b \in L$ می‌باشد، اگر

۱. u کران بالا a, b باشد، یعنی $a \leqslant u$ و $b \leqslant u$ ؛

۲. اگر کران بالای دیگری مانند v برای a, b وجود داشته باشد، آن‌گاه $u \leqslant v$.

کوچکترین عنصر یک مجموعه جزئی مرتب $(L;\leqslant)$ را با ۰ و بزرگترین عنصر آن مجموعه را با ۱ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۱.۱. مجموعه جزئی مرتب $(L;\leqslant)$ را *نیم‌مشبکه پایینی* می‌گوییم اگر هر دو عنصر آن در L دارای بزرگترین کران پایین باشند و آن را *نیم‌مشبکه بالایی* می‌گوییم اگر هر دو عنصر آن در L کوچکترین کران بالا داشته باشند. اگر هر دو عنصر از مجموعه $(L;\leqslant)$ دارای کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین باشد، آن را مشبکه می‌نامیم.

بزرگترین کران پایین $a,b\in L$ را با نماد $a\wedge b$ و کوچکترین کران بالا $a,b\in L$ را با نماد $a\vee b$ نمایش می‌دهیم.

اگر $(L,\leqslant)$ یک نیم‌مشبکه پایینی باشد آن‌گاه $\wedge$ یک رابطه دوتایی روی L است و جبر $(L;\leqslant,\wedge)$ از نوع ۲ را القاء می‌کند که در شرط‌های زیر، به ازای هر $a,b,c\in L$ صدق می‌کند:

(۱) قانون خودتوان $\quad a\wedge a=a$

(۲) قانون جابجایی $\quad a\wedge b=b\wedge a$

(۳) قانون شرکت‌پذیری $\quad (a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$

عکس این مطلب نیز برقرار است؛ یعنی اگر $(L;\wedge)$ یک جبر از نوع ۲ باشد که در رابطه‌های فوق صدق کند، مجموعه جزئی مرتب $(L;\leqslant)$ تعریف می‌گردد به طوری که

$$a\leqslant b\Longleftrightarrow a\wedge b=a\qquad \forall a,b\in L$$

و در حالتی که $(L;\leqslant)$ نیم‌مشبکه بالایی باشد، به روش مشابه رابطه‌های بالا تعریف می‌شود.

تعریف ۱۱.۱.۱. جبر $(L;\wedge,\vee)$ از نوع $(۲,۲)$ را مشبکه می‌نامیم اگر شرط‌های زیر را به ازای هر $a,b,c\in L$ داشته باشد

(L_1) قانون خودتوان $\quad a\wedge a=a$ و $a\vee a=a$

(L_2) قانون جابجایی $\quad a\wedge b=b\wedge a$ و $a\vee b=b\vee a$

(L_3) قانون شرکت‌پذیری $\quad (a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$ و $(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)$

(L_4) قانون جذب $\quad a\wedge(a\vee b)=a$ و $a\vee(a\wedge b)=a$

تعریف ۱۲.۱.۱. مشبکه L را *توزیع‌پذیر* می‌نامیم اگر در شرط $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ صدق کند یا به طور معادل $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$؛ این شرط را قانون توزیع‌پذیری می‌گوییم.

۲.۱ BCI-جبر

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید X یک مجموعه با عنصر ثابت "$\circ$" و عملگر دوتایی "$*$" روی این مجموعه باشد. جبر $(X;*,\circ)$ از نوع $(۲,\circ)$ را یک BCI-جبر می‌نامیم، هر گاه شرط‌های زیر به ازای هر $x,y,z \in X$ برقرار باشد:

$BCI-۱ : ((x*y)*(x*z))*(z*y)=\circ;$

$BCI-۲ : (x*(x*y))*y=\circ;$

$BCI-۳ : x*x=\circ;$

$BCI-۴ : x*y=\circ, y*x=\circ \Longrightarrow x=y\ ;$

وX را یک BCK-جبر می‌نامیم، اگر شرط زیر برای هر $x \in X$ برقرار باشد:

$BCK-۵ : \circ * x = \circ\ .$

قرارداد. به اختصار از نماد X به جای BCI-جبر $(X,*,\circ)$ استفاده می‌شود.

مثال ۱.۱.۱.

۱. اگر $\mathbb{Z}$ مجموعه اعداد صحیح وبرای هر $a,b \in \mathbb{Z}$ تعریف می‌کنیم $a*b=a-b$، آن‌گاه جبر $(\mathbb{Z};*,\circ)$ یک BCI-جبر است.

۲. در جبر گزاره‌ها اگر $q*p \equiv p \to q$ باشد و صفر آن گزاره‌ی همیشه درست باشد یک BCK-جبر تشکیل می‌دهد.

۳. اگر $P(X)$ مجموعه توانی X و $A*B=A-B$ و صفر آن را مجموعه $\varnothing$ باشد $(P(X);*,\circ)$ یک BCK-جبر است .

مثال ۲.۱. روی مجموعه $X=\{\circ,a,b,c\}$ عمل‌های دوتایی $*_{۱}, *_{۲}$ را مطابق جدول‌های زیر تعریف می‌کنیم

$*_{۱}$	∘	a	b	c
∘	∘	∘	c	b
a	a	∘	c	b
b	b	b	∘	c
c	c	c	b	∘

$*_{۲}$	∘	a	b	c
∘	∘	∘	∘	∘
a	a	∘	a	∘
b	b	b	∘	∘
c	c	b	a	∘

آن‌گاه $(X;*_{۱},\circ)$ یک BCI-جبر و $(X;*_{۲},\circ)$ یک BCK-جبر است. همان طور که ملاحظه می‌شود، عناصر روی قطر اصلی هر دو جدول صفر است و ستون دوم هر دو، تکرار ستون اول می‌باشد. بارزترین تفاوت این دو جبر در تعریف $x*\circ$ آن‌هاست.

مثال ۳.۱. [۱] فرض کنید $(G,.,e)$ یک گروه آبلی با عنصر یکه e باشد. عمل دوتایی $*$ روی X را $x*y=x\cdot y^{-۱}$ تعریف می‌کنیم، آن‌گاه X یک BCI-جبر است. $(G,*,e)$ را BCI-جبر الحاقی گروه آبلی $(G,.,e)$ می‌نامیم.

قضیه زیر تعریفی معادل برای یک BCI-جبر است.

قضیه ۱.۲.۱. [۱] جبر $(X;*,\circ)$ از نوع $(۲,\circ)$ یک BCI-جبر است اگر و فقط اگر به ازای هر $x,y,z\in X$ داشته باشیم:

$$(i)\ \ BCI-۱:\ \ ((x*y)*(x*z))*(z*y)=\circ\ ;$$

$$(ii)\ \ x*\circ=x\ ;$$

$$(iii)\ \ BCI-۴:\ \ x*y=\circ, y*x=\circ\Longrightarrow x=y\ .$$

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید X یک BCI-جبر باشد. برای هر $x, y \in X$ تعریف می‌کنیم که

$$x \leqslant y \Longleftrightarrow x * y = 0$$

قضیه زیر نشان می‌دهد که BCI-جبرها بخشی از جبرهای مرتب هستند.

قضیه ۲.۲.۱. [۱] اگر $(X; *, 0)$ یک BCI-جبر باشد آن‌گاه $(X, \leqslant)$ یک مجموعه جزئی مرتب است که عنصر مینیمال آن صفر است، یعنی برای هر $x \in X$، اگر $x \leqslant 0$ باشد، آن‌گاه $x = 0$.

رابطه ترتیب جزئی $\leqslant$ را BCI-ترتیب روی X می‌گویند.

قضیه ۳.۲.۱. [۱] جبر $(X; *, 0)$ از نوع $(2, 0)$ یک BCI-جبر است اگر و فقط اگر رابطه ترتیب جزئی $\leqslant$ روی X موجود باشد که برای هر $x, y, z \in X$، شرط‌های زیر برقرار باشد:

(i) $(x * y) * (x * z) \leqslant z * y;$

(ii) $x * (x * y) \leqslant y;$

(iii) $x * y = 0 \Leftrightarrow x \leqslant y.$

گزاره ۴.۲.۱. [۱] در BCI-جبر X به ازای هر $x, y, z, a_i \in X (i = 1, 2, \ldots, n)$ حکم‌های زیر برقرار است:

۱. اگر $x \leqslant y$ باشد آن‌گاه $z * y \leqslant z * x$؛

۲. اگر $x \leqslant y$ باشد آن‌گاه $x * z \leqslant y * z$؛

۳. شرط C $(x * y) * z = (x * z) * y$؛

۴. قانون ادغام $x * (x * (x * y)) = x * y$؛

۵. قانون توزیع‌پذیری صفر از چپ $\circ * (x * y) = (\circ * x) * (\circ * y)$؛

۶. $(x * z) * (y * z) \leqslant x * y$؛

۷. اگر $x * y \leqslant z$ باشد آن‌گاه $x * z \leqslant y$؛

۸. اگر $i_۱, i_۲, \ldots, i_n$ جایگشتی از $۱, ۲, \ldots, n$ باشد

$$(\ldots((x * a_۱) * a_۲) * \ldots) * a_n = (\ldots((x * a_{i_۱}) * a_{i_۲}) * \ldots) * a_{i_n}$$

گزاره ۵.۲.۱. [۲] جبر $(X; *, \circ)$ از نوع $(۲, \circ)$ یک BCI-جبر است اگر و فقط اگر به ازای هر $x, y, z \in X$ شرط‌های زیر را داشته باشد:

$$B: \ ((x * y) * (z * y)) * (x * z) = \circ;$$

$$C: \ ((x * y) * z) * ((x * z) * y) = \circ;$$

$$I: \ x * x = \circ;$$

$$BCI - ۴: \ x * y = \circ, y * x = \circ \Longrightarrow x = y.$$

تعریف ۳.۲.۱. زیرمجموعه ناتهی S از BCI-جبر $(X; *, \circ)$ را *زیرجبر* می‌گوییم اگر $\circ \in S$ و $(S; *, \circ)$ یک BCI-جبر باشد.

قضیه ۶.۲.۱. [۱] زیرمجموعه ناتهی S از BCI-جبرX، زیرجبری از X است اگر و فقط اگر

$$x * y \in S \qquad \forall x, y \in S$$

مثال ۴.۱. زیرمجموعه‌های X و$\{\circ\}$ زیرجبرهای بدیهی X هستند.

نمادگذاری. مجموعه اعداد صحیح نامنفی را با $\mathbb{N}$ و مجموعه اعداد طبیعی را با $\mathbb{N}^*$ نمایش می‌دهیم و تعریف می‌کنیم:

$$x * y^{\circ} = x$$

$$x * y^n = (\ldots((x \underbrace{*y) * y) * \ldots) * y}_{n \text{بار}}$$

که $x, y \in X$ عناصری دلخواه از BCI-جبر X و $n \in \mathbb{N}^*$ می‌باشند.

گزاره ۱.۲.۷. فرض کنید X یک BCI-جبر و k عددی صحیح ومثبت باشد، آن‌گاه برای هر $x, y \in X$ داریم

(i) $x * (x * (x * y))^k = x * y^k$;

(ii) $\circ * (\circ * x^k) = \circ * (\circ * x)^k$;

(iii) $\circ * (x * y)^k = (\circ * x^k) * (\circ * y^k)$.

اثبات. (i) : حکم را با استفاده از استقرا روی n بررسی می‌کنیم. برای مشاهده جزئیات بیشتر به [۱] مراجعه شود.

(ii) : حکم را با استفاده از استقرا روی n بررسی می‌کنیم. اگر $n = ۱$ باشد، به وضوح رابطه برقرار است. فرض می‌کنیم رابطه فوق برای $n = k$ درست باشد و حکم را برای $n = k + ۱$ ثابت می‌کنیم. آن‌گاه

$$\begin{aligned}
\circ * (\circ * x^{k+۱}) &= \circ * ((\circ * x^k) * x) \\
&= (\circ * (\circ * x^k)) * (\circ * x) && \text{(توزیع‌پذیری صفر از چپ)} \\
&= (\circ * (\circ * x)^k) * (\circ * x) && \text{(فرض استقرا)} \\
&= \circ * (\circ * x)^{k+۱}
\end{aligned}$$

(iii) : حکم را با استفاده از استقرا روی n برررسی می‌کنیم. اگر $n = ۱$ باشد، با توجه به قانون توزیع‌پذیری صفر از چپ، رابطه برقرار است. فرض می‌کنیم رابطه فوق برای $n = k$ برقرار باشد و حکم را برای $n = k + ۱$ ثابت می‌کنیم. آن‌گاه داریم

$$\circ * (x * y)^{k+۱} = (\circ * (x * y)^k) * (x * y)$$

(فرض استقرا و توزیع‌پذیری صفر از چپ) $= ((0 * x^k) * (0 * y^k)) * (x * y)$

(شرط C) $= ((0 * x^k) * (x * y)) * (0 * y^k)$

(شرط C) $= ((0 * (x * y)) * x^k) * (0 * y^k)$

(توزیع‌پذیری صفر از چپ و شرط C) $= ((0 * x^{k+1}) * (0 * y)) * (0 * y^k)$

(شرط C) $= ((0 * (0 * y^k)) * x^{k+1}) * (0 * y)$

(رابطه ۲ و توزیع‌پذیری صفر از چپ) $= ((0 * (0 * y)^k) * (0 * y)) * x^k$

(رابطه ۲) $= (0 * (0 * y^{k+1})) * x^{k+1}$

(توزیع‌پذیری صفر از چپ را $n + 1$ بار اجرا کردن) $= (0 * x^{k+1}) * (0 * y^{k+1})$

به این ترتیب حکم ثابت می‌شود. $\square$

تعریف ۴.۲.۱. عنصر x در BCI-جبر X را *پوچتوان* می‌نامیم، اگر عدد صحیح و مثبت n موجود باشد به طوری که

$$0 * x^n = 0$$

و کوچکترین عدد طبیعی k که در شرط $0 * x^k = 0$ صدق کند را مرتبه x می‌گوییم. در این صورت مرتبه هر عنصر $x \in X$ به طور منحصر به فرد وجود دارد و آن را با $o(x)$ نمایش می‌دهیم؛ اگر $x \in X$ پوچتوان نباشد مرتبه آن را نامتناهی می‌نامیم.

تعریف ۵.۲.۱. BCI-جبر X را *شرکت‌پذیر* می‌گوییم هر گاه

$$(x * y) * z = x * (y * z) \qquad \forall x, y, z \in X$$

و *نیم‌شرکت‌پذیر* می‌گوییم هر گاه

$$(x * y) * z \leqslant x * (y * z) \qquad \forall x, y, z \in X$$

تعریف ۶.۲.۱. زیرمجموعه ناتهی I از BCI-جبر X را *ایده‌آل* می‌گوییم اگر

$(i)\ \circ \in I$

$(ii)\ x * y \in I, y \in I \Longrightarrow x \in I$

نکته. فرض کنید X یک BCI-جبر و I ایده‌آلی از آن باشد، مطابق جدول کیلی زیر

$*$	I	$X-I$
I		
$X-I$	$X-I$	

اگر عناصر $X-I$ در I ضرب شوند، عناصری از $X-I$ را نتیجه می‌دهند.

قضیه ۸.۲.۱. [۱] فرض کنید $(i \in \Gamma)I_i$ خانواده‌ای از ایده‌آل‌های BCI-جبر X باشند. آن‌گاه $\bigcap_{i\in\Gamma} I_i$ ایده‌آل X است.

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از BCI-جبر X باشد، کوچکترین ایده‌آل X که شامل S است را *ایده‌آل مولد X توسط S* می‌نامیم و آن را با $\langle S\rangle$ نمایش می‌دهیم؛ یعنی $\langle S\rangle = \bigcap_{S\subseteq I} I$ و I ایده‌آلی از X است.

قضیه ۹.۲.۱. [۱] فرض کنید S زیرمجموعه ناتهی از BCI-جبر X باشد و

$$A = \{x \in X \mid (\ldots((x * a_۱) * a_۲ * \ldots) * a_n = \circ \quad s.t. \quad a_۱, a_۲, \ldots, a_n \in S\}$$

آن‌گاه $\langle S\rangle = A \cup \{\circ\}$؛ در حالتی که S شامل عنصر مثبت X یا شامل عنصری پوچتوان باشد، آن‌گاه $A = \langle S\rangle$.

نتیجه ۱.۱. در BCI-جبر X هر ایده‌آل اصلی $\langle a\rangle$ از X را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\langle a\rangle = \{\circ\} \cup \{x \in X \mid x * a^n = \circ \quad s.t. \quad n \in \mathbb{N}^*\}$$

و به طور خاص اگر a مثبت یا پوچتوان باشد، آن‌گاه

$$\langle a\rangle = \{x \in X \mid x * a^n = \circ \quad s.t. \quad n \in \mathbb{N}^*\}$$

نتیجه ۷.۲.۱. فرض کنید A ایده‌آلی از BCI-جبر X و S زیرمجموعه‌ای از X که حداقل شامل یک عنصر پوچتوان باشد، آن‌گاه $x \in \langle A \cup S\rangle$ اگر و فقط اگر برای $s_۱, s_۲, \ldots, s_n \in S$ داشته باشیم

$$(\ldots((x * s_۱) * s_۲) * \ldots) * s_n \in A.$$

تعریف ۸.۲.۱. رابطه هم‌ارزی θ در BCI-جبر X را *رابطه همنهشتی* روی X می‌نامیم، اگر برای هر $x, y, u, v \in X$ داشته باشیم:

$$x \sim y(\theta) \text{ و } u \sim v(\theta) \Longrightarrow x * u \sim y * v(\theta)$$

قرارداد. فرض کنید θ رابطه هم‌ارزی روی BCI-جبر X باشد، کلاس هم‌ارزی $\overline{x}$ که شامل عنصر x است را با θ_x (یعنی $\theta_x = \{y \in X \mid y \sim x(\theta)\}$) و مجموعه خارج‌قسمتی X/θ را با $\{\theta_x \mid x \in X\}$ نمایش می‌دهیم. اگر θ یک رابطه همنهشتی روی X باشد، آن‌گاه عمل $*$ روی X/θ را $\theta_x * \theta_y = \theta_{x*y}$ تعریف می‌کنیم.

گزاره ۱۰.۲.۱. [۱] ساختار $(X/\theta; *, \theta_\circ)$ جبر خارج‌قسمتی از نوع $(۲,\circ)$ است که $\theta_\circ$ کلاس هم‌ارزی صفر می‌باشد.

گزاره ۱۱.۲.۱. [۱] فرض کنید θ رابطه همنهشتی روی BCI-جبر X باشد، آن‌گاه شرط‌های زیر برای هر $x, y, z \in X$ برقرار است:

$BCI - ۱ \ : ((\theta_x * \theta_y) * (\theta_x * \theta_z)) * (\theta_z * \theta_y) = \circ;$

$BCI - ۲ \ : (\theta_x * (\theta_x * \theta_y)) * \theta_y = \circ;$

$BCI - ۳ \ : \theta_x * \theta_x = \circ.$