بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده ریاضی و کامپیوتر
گروه ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض گرایش هندسه

حد در رسته کلیسلی Set_P

استاد راهنما:
دکتر سید ناصر حسینی

مؤلف:
یوسف قاسمی نژاد رائینی

شهریور ماه ۱۳۸۸

تقدیم به:

همسر مهربانم

تقدیروتشکر

سپاس معبودی را که عشق به آموختن را در دل انسانها به‌ودیعه نهاد.

خداوندا تو را سپاس می گویم که به من ارزشمندترین نعمت یعنی سلامتی را عطا فرمودی و در سرنوشت سازترین لحظات زندگی مرا یاری نموده ای .

پاک‌ترین و صادقانه‌ترین سپاس و قدردانی خود را از نخستین آموزگارانم پدرو مادر فداکارم دارم آنان که دریای بیکران مهر خویش را بی دریغ بر من ارزانی داشتند .

از خواهر گرانقدرم که همواره مشوق من در طول تحصیل بوده‌اند از صمیم قلب و با تمام وجود تشکر می کنم.

بر خود لازم می دانم از استاد ارجمند جناب آقای دکتر سید ناصر حسینی به خاطر همه راهنمایی هایشان در انجام پایان نامه صمیمانه قدردانی نمایم.

از جناب آقای دکتر موسوی و جناب آقای دکتر نکویی که داوری این پایان نامه را بر عهده داشتند تشکر می کنم.

در خاتمه از درگاه خداوند متعال طول عمر و توفیق روز افزون اساتید محترم و دانش‌پژوهان گرامی رشته جذاب ریاضی را در دستیابی به اهداف عالیه مسئلت دارم.

چکیده

در این پایان نامه رسته کلیسلی Set_P و رسته ریخت جزئی $\overrightarrow{Set}$ معرفی شده و الحاق‌هایی بین رسته‌های Set ، Set_P و $\overrightarrow{Set}$ بدست آورده‌ایم.

همچنین به مطالعه وجود ضرب ، معادلساز و عقب بر در رسته کلیسلی Set_P پرداخته‌ایم.

نشان داده‌ایم ضرب در این رسته وجود دارد. برای وجود معادلساز شرایط لازم و کافی را بدست آورده و نتیجه را به وجود عقب بر و نهایتاً حد ، بطور کلی تسری داده‌ایم.

مقدمه

ساختارهای سه تایی یا موندها و الحاق ها ابزارهای تکنیکی بسیار مهم و پرکاربردی در نظریه رسته می باشند ببینید[3],[1] . از جمله موضوعاتی که بوسیله موندها تعریف می شوند، رسته های کلیسلی می باشند که خود موضوع مهمی در نظریه رسته است ببینید.[14],[13],[3],[1] یکی از کاربردهای مهم موندها و رسته های کلیسلی در علوم محاسباتی است ببینید[3]. در این پایان نامه به یک رسته کلیسلی خاص که توسط موند مجموعه توانی تعریف می شود (رسته Set_P)، می پردازیم.

از آنجا که رسته های ریخت جزئی رسته های بسیار مهمی در نظریه رسته می باشند ببینید[8],[7],[6],[5],[4],[2],[1]، در کنار رسته کلیسلی Set_P، رسته ریخت جزئی $\overrightarrow{Set}$ را مورد بحث قرار داده ایم و ارتباطی بین رسته های Set_P، $\overrightarrow{Set}$ و Set با معرفی زوج های الحاقی ایجاد کرده ایم[12],[11],[10],[9] .

بسیاری از ساختارهای اساسی در ریاضیات می توانند در قالب حدها یا به شکل دوگان آن یعنی هم حد بیان و شرح داده شوند .

چنین ساختارهایی به یک دیاگرام داده شده و یک شئ مشخص به همراه ریخت هایی که این شئ را به سایر اشیاء متصل می کند، نسبت داده می شوند. در این پایان نامه به مواردی از حدها مثل معادلساز، ضرب وعقب بر در رسته Set_P پرداخته می شود. علاوه بر آن موضوع کلی حد و وجود آن در این رسته مورد بحث قرار می گیرد.

این پایان نامه در سه فصل تنظیم شده است.

در فصل اول یک سری مقدمات و پیشنیازهای رسته ای مرور می شوند و قضایایی در مورد حد در رسته، الحاق و موند و سایر تعاریف مورد نیاز بیان می شوند. در پایان این فصل به معرفی رسته های Set_P و $\overrightarrow{Set}$ می پردازیم.

در فصل دوم رابطه ای بین رسته های Set، Set_P و $\overrightarrow{Set}$ با معرفی الحاق هایی بین آنها، ایجاد می نماییم.

در فصل سوم به مطالعه حد در رسته کلیسلی مجموعه ها (رسته Set_P) می پردازیم

فهرست مطالب

فصل اول

پیشنیازها

در این فصل یک سری مقدمات و پیش نیازهای رسته ای مرور می شوند و قضایایی در مورد حد در رسته، الحاق و موند و سایر تعاریف مورد نیاز بیان می شوند. در پایان رسته های Set_P و $\overrightarrow{Set}$ را معرفی می نماییم. جهت مطالعه اثبات قضایا و برای مطالعه عمیقتر مفاهیمی که در این فصل آمده به [1],[6],[3] رجوع شود.

۱-۱ حد در یک رسته

در این بخش تعاریف و قضایای رسته ای را مطرح می کنیم، که در بخش ها و فصل های بعد از آنها استفاده می کنیم. از جمله مفهوم حد و بعضی قضایای مربوط به آن را مرور می کنیم ببینید[1].

۱-۱-۱ تعریف: شئ a در رسته A را

(۱) اولیه گویند هرگاه برای هر شئ b در A یک ریخت منحصر بفرد $f: a \longrightarrow b$ موجود باشد.

(۲) نهایی گویند هرگاه برای هر شئ b در A یک ریخت منحصر بفرد $f: b \longrightarrow a$ موجود باشد.

۱-۱-۲ تعریف: یک چشمه، زوج $(a,(f_i)_{i\in I})$ شامل شئ a و یک خانواده از ریخت های $f_i: a \longrightarrow a_i$ که با رده I اندیس گذاری شده است، می باشد. a دامنه چشمه و $(a_i)_{i\in I}$ هم دامنه چشمه نامیده میشود.

۱-۱-۳ تعریف: فرض کنیم $S=\{f_i: a \longrightarrow a_i : i\in I\}$ یک چشمه باشد که با (S,a) نمایش داده می شود و $f: b \longrightarrow a$ یک ریخت باشد، ترکیب f و چشمه S، چشمه $S\circ f=\{f_i \circ f: b \longrightarrow a_i\}$ است.

۱-۱-٤ تعریف: چشمه $P=\{\pi_i: p \longrightarrow p_i : i\in I\}$ ضرب نامیده می شود اگر برای هر چشمه با هم دامنه مشابه P مانند $S=\{f_i: a \longrightarrow p_i : i\in I\}$ ریخت منحصر بفردی چون $f: a \longrightarrow p$ موجود باشد بطوریکه $P\circ f=S$.

در اینصورت P ضرب خانواده $\{p_i\}_{i\in I}$ نامیده می شود.

۱-۱-۵ لم: چشمه تهی (p,ϕ) یک ضرب است اگر وفقط اگر p شئ نهایی باشد.

۱-۱-٦ تعریف: فرض کنیم $a \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} b$ یک زوج ریخت در رسته A باشند، یک معادلساز f و g ریختی مانند $h:c\longrightarrow a$ است بطوریکه $f\circ h=g\circ h$ و خاصیت جهانی زیر را دارد:

اگر $h':c'\longrightarrow a$ در A بگونه ای باشد که $f\circ h'=g\circ h'$ آنگاه ریخت یکتای $\bar{h}:c'\longrightarrow c$ موجود باشد بطوری که $h\circ\bar{h}=h'$.

۱-۱-۷ مثال: در رسته مجموعه ها معادلساز $X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y$ نگاشت شمول $i:E\longrightarrow X$ است که در آن $E=\{x\in X \;:\; f(x)=g(x)\}$.

۱-۱-۸ تعریف: فرض کنیم ریخت های زیر ریخت هایی در رسته A باشند، مربع $g\circ\bar{f}=f\circ\bar{g}$ که بصورت زیر نمایش داده می شود:

$$\begin{tikzcd} p \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\bar{g}"'] & b \arrow[d, "g"] \\ a \arrow[r, "f"'] & c \end{tikzcd}$$

عقب بر نامیده می شود اگر جابجایی باشد وخاصیت جهانی زیر را داشته باشد:

بر ای هر مربع جابجایی به شکل

$$\begin{tikzcd} p' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & b \arrow[d, "g"] \\ a \arrow[r, "f"'] & c \end{tikzcd}$$

ریخت یکتای $k:p'\longrightarrow p$ موجود باشد بطوریکه داشته باشیم:

$\bar{g}\circ k = g'$ و $\bar{f}\circ k = f'$.

(ریخت $\bar{f}$ را عقب بر f در امتداد g می نامیم و با $g^{-1}(f)$ نمایش می دهیم)

۱-۱-۹ مثال: دررسته Set عقب بر دو تابع ($A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$) را اینگونه تعریف می کنیم:
قرار می دهیم

$$D=\{(x,y): x\in A, y\in B, \quad f(x)=g(y)\}.$$

و ($A \xleftarrow{\bar{g}} D \xrightarrow{\bar{f}} B$) که $\bar{g}(x,y)=x$, $\bar{f}(x,y)=y$. آنگاه مربع زیر عقب بر می باشد.

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\bar{g}"'] & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

۱-۱-۱۰ قضیه: گیریم $f:a\longrightarrow c$ و $g:b\longrightarrow c$ ریخت هایی در رسته A باشند، فرض کنیم $a\times b$ ضرب a و b در رسته A باشد و توابع تصویری $pr_1: a\times b\longrightarrow a$ و $pr_2: a\times b\longrightarrow b$ باشند، اگر $e:d\longrightarrow a\times b$ معادلساز $a\times b \overset{f\circ pr_1}{\underset{g\circ pr_2}{\rightrightarrows}} c$

باشد، سپس مربع زیر یک عقب بر است.

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[r, "pr_2\circ e"] \arrow[d, "pr_1\circ e"'] & b \arrow[d, "g"] \\
a \arrow[r, "f"'] & c
\end{tikzcd}$$

۱-۱-۱۱ تعریف: یک دیاگرام در رسته A تابعگونی مانند $D:I\longrightarrow A$ است، که هم دامنه آن A است. I طرح دیاگرام نامیده می شود.

مثال: یک دیاگرام با طرح گسسته فقط یک خانواده از اشیاء A است.

مثال: یک دیاگرام با طرح $\bullet \rightrightarrows \bullet$ فقط یک زوج ریخت در A با دامنه و هم دامنه مشترک است.

۱-۱-۱۲ تعریف: فرض کنیم $D:I \longrightarrow A$ یک دیاگرام باشد، برای هر $i \in I_0$ نمایش می دهیم، $D(i)=d_i$

(۱)چشمه $(\theta_i : a \longrightarrow d_i)_{i\in I_0}$، چشمه طبیعی برای D نامیده می شود هرگاه برای هر ریخت $f:i \longrightarrow j$ در I داشته باشیم: $D(f)\circ\theta_i=\theta_j$

(۲) یک حد در D چشمه ای طبیعی برای D مانند $(\theta_i : l \longrightarrow d_i)_{i\in I_0}$ است که خاصیت جهانی زیر را دارد:

هر چشمه ای طبیعی برای D مانند $(\alpha_i : a \longrightarrow d_i)_{i\in I_0}$ بطور یکتایی روی آن فاکتور می شود، یعنی ریخت یکتای $\alpha : a \longrightarrow l$ موجود است بطوریکه برای هر $i \in I_0$ داریم: $\theta_i \circ \alpha = \alpha_i$.

۱-۱-۱۳ مثال: برای دیاگرام گسسته $D:I \longrightarrow A$ هر چشمه ای با هم دامنه $(d_i)_{i\in I}$ طبیعی برای D است. یک چشمه حد است اگر وفقط اگر ضرب خانواده $(d_i)_{i\in I}$ باشد. بنابرین ضرب ها حدهای دیاگرام های گسسته می باشند.

۱-۱-۱۴ تعریف: گیریم I و A رسته باشند، فرض کنیم هر دیاگرام با طرح I در A حد داشته باشد. برای هر شئ $D \in A^I$ یعنی $D:I \longrightarrow A$ گیریم $\theta_i^D : l_D \longrightarrow d_i$ نمایش حد D باشد، تابعگون $Lim : A^I \longrightarrow A$ را تعریف می کنیم که برای هر شئ D، $Lim(D)=l_D$ وبرای تبدیل طبیعی $\eta : D \longrightarrow D'$، $Lim(\eta)$ را ریخت یکتایی تعریف می کنیم که برای هر $i \in I$، $\theta_i^{D'} \circ Lim(\eta) = \eta_i \circ \theta_i^D$

۱-۱-۱۵ قضیه: $Lim : A^I \longrightarrow A$ یک تابعگون است.

۱-۱-۱۶ تعریف: گوییم رسته A

(۱)معادلساز دارد اگر برای هر زوج ریخت موازی در رسته A معادلساز وجود داشته باشد.

(۲) ضرب (متناهی) دارد اگر برای هر خانواده با مجموعه اندیس گذار (متناهی) یک ضرب وجود داشته باشد.

(۳)عقب بر دارد اگر برای هر ۲-سینک (دوگان چشمه) عقب بر داشته باشد.

۱-۱-۱۷ تعریف: گوییم رسته A

(۱)متناهیاً کامل است اگر هر دیاگرام متناهی در A حد داشته باشد.

(۲)کامل است اگر هر دیاگرام کوچک در A حد داشته باشد.

۱-۱-۱۸ قضیه:برای هر رسته A گزاره های زیر معادلند.

(۱)رسته A(متناهیاً) کامل است.

(۲) رسته A ضرب (متناهی) و معادلساز دارد.

۱-۲ تابعگون های الحاقی و موند

در این بخش دو مفهوم الحاق و موند را یادآوری کرده، این قضیه را بیان می کنیم که الحاق راست حدها را حفظ می کند و موند مجموعه توانی را معرفی می کنیم، ببینید [6],[1] .

۱-۲-۱ تعریف: فرض کنیم $U:A\longrightarrow B$, $F:B\longrightarrow A$ تابعگون باشند، گوییم (F,U) یک زوج الحاقی است هرگاه $A(F-,-)\cong_n B(-,U-)$ یعنی تابعگون های $A(F-,-)$ و $B(-,U-)$ بطور طبیعی یکریخت باشند.

U را الحاق راست و F را الحاق چپ می گوییم.

۱-۲-۲ قضیه: فرض کنیم $U:A\longrightarrow B$, $F:B\longrightarrow A$ و (F,U) یک زوج الحاقی باشد، در این صورت U حد را حفظ می کند. یعنی دیاگرام زیر جابجایی است.

$$\begin{tikzcd} A^J \arrow[r, "Lim"] \arrow[d, "U^J"'] & A \arrow[d, "U"] \\ B^J \arrow[r, "Lim"] & B \end{tikzcd}$$

۱-۲-۳ نتیجه: در زوج الحاقی (F,U) ، U ضرب، معادلساز و عقب بر را حفظ می کند.

۱-۲-٤ تعریف: برای تابعگون $X \longrightarrow X$: T تعریف میکنیم $T^1 = T, T^0 = 1_X$ و $T^2 = T \circ T$ بطور کلی برای هر $n \in N$ $T^n = T^{n-1} \circ T$

۱-۲-٥ تعریف: موند T روی رسته X عبارت است از سه تایی $\mathrm{T} = (T, \eta, \mu)$ شامل

- تابعگون $T : X \longrightarrow X$
- تبدیل طبیعی $\eta : 1_X \longrightarrow T$
- تبدیل طبیعی $\mu : T^2 \longrightarrow T$

بطوریکه دیاگرام های زیر جابجایی باشند:

$$\begin{tikzcd} T^3 \arrow[r, "T\mu"] \arrow[d, "\mu T"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\ T^2 \arrow[r, "\mu"'] & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T \arrow[dr, "1_T"'] & T^2 \arrow[l, "\eta T"'] \arrow[r, "T\eta"] \arrow[d, "\mu"] & T \arrow[dl, "1_T"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

۱-۲-٦ مثال: روی رسته X موند بدیهی $\mathrm{T} = (1_X, 1_T, 1_T)$

۱-۲-۷ مثال: موند مجموعه توانی روی رسته مجموعه ها $\mathrm{P} = (P, \eta, \mu)$ که در آن
$P : Set \longrightarrow Set$ تابعگون زیر است:

برای هر مجموعه X، $P(X)$ مجموعه توانی X است و اگر $X \xrightarrow{f} Y$ یک تابع باشد، $P(f) : P(X) \longrightarrow P(Y)$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$\forall A \subseteq X \quad P(f)(A) = f(A) = \{f(a) : a \in A\}$$

بسادگی دیده می شود که P یک تابعگون است.

تبدیل طبیعی $\eta : 1_{Set} \longrightarrow P$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$\eta : 1_{Set} \longrightarrow P : Set \longrightarrow Set$$
$$\forall X \in Set \qquad \eta_X : X \longrightarrow P(X)$$
$$\forall x \in X \qquad \eta_X(x) = \{x\}$$

بسادگی دیده می شود که η یک تبدیل طبیعی است.

تبدیل طبیعی $\mu : P^2 \longrightarrow P$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$\mu : P^2 \longrightarrow P : Set \longrightarrow Set$$
$$\forall X \in Set \qquad \mu_X : P^2(X) \longrightarrow P(X)$$
$$\mu_X : P(P(X)) \longrightarrow P(X)$$
$$\forall Z \subseteq P(X) \qquad \mu_X(Z) = \bigcup_{A \in Z} A$$

می توان نشان داد که μ یک تبدیل طبیعی است.

هم چنین می توان نشان داد دیاگرام های مربوط به تعریف موند جابجایی هستند.

بنابرین $\mathrm{P} = (P, \eta, \mu)$ یک موند است.

۱-۳ رسته کلیسلی و رسته ریخت جزئی

در این بخش تعاریف رسته کلیسلی و رسته ریخت جزئی را یادآوری می کنیم و رسته های Set_P و $\overrightarrow{Set}$ را بعنوان مثال هایی از این رسته ها می آوریم ببینید [6],[3],[1] .

۱-۳-۱ تعریف: رسته کلیسلی از یک موند $\mathrm{T} = (T, \eta, \mu)$ روی X رسته ملموس زیر است:

(X_T, U_T) روی X بطوری که اشیاء X_T همان اشیاء X است وریخت $\hat{f} : x \longrightarrow y$

با ریخت $f:x\longrightarrow T(y)$ در تناظر است. به عبارت دیگر

$$Ob(X_T)=Ob(X) \quad \text{و} \quad \hom_{X_T}(x,y)=\hom_X(x,T(y))$$

((قرارداد می کنیم هر ریخت g در رسته X_T با ریخت $\overline{\overline{g}}$ در رسته X متناظر است.))

ریخت همانی در رسته X_T ، $\hat{\eta}_X$ است و اگر $\hat{f}:x\longrightarrow y$ و $\hat{g}:y\longrightarrow z$ ریخت هایی در X_T باشند یعنی $f:x\longrightarrow T(y)$ و $g:y\longrightarrow T(z)$ داریم:

$$\hat{g}\circ\hat{f}=\mu_z\circ T(g)\circ f$$

$$x\xrightarrow{f}T(y)\xrightarrow{T(g)}T^2(z)\xrightarrow{\mu_z}T(z)$$

بعلاوه داریم:

$$U_Y(x\xrightarrow{\hat{f}}y)=T(x)\xrightarrow{\mu_y\circ T(f)}T(y)$$

۱-۳-۲ مثال: رسته کلیسلی از موند مجموعه توانی که آن را با Set_P نمایش می دهیم.

در فصل های بعد این رسته را بطور کامل مورد بحث و بررسی قرار می دهیم.

۱-۳-۳ تعریف: یک کلاس M، از ریخت های رسته Cرا بسته تحت عقب بر گوییم اگر برای هر

$f\in M$ ، عقب بر f در امتداد هر ریخت g از رسته C، در M قرار بگیرد.

۱-۳-٤ مثال: کلاس همه تکریختی های رسته دلخواه C تحت عقب بر بسته است.

۱-۳-٥ تعریف: ریخت $i:A\to B$ را ریخت جهانی گوییم اگر برای هر ریخت $f:C\longrightarrow B$ عقب بر f در امتداد i موجود باشد.

(کلاس همه ی ریخت های جهانی در رسته C را با $u(C)$ نمایش می دهیم)

۱-۳-٦ تعریف: تکریختی i در صورتی که ریخت جهانی نیز باشد، تکریختی جهانی می نامیم.

۱-۳-۷ مثال: همه تکریختی ها در رسته Set تکریختی جهانی هستند.

۱-۳-۸ تعریف: گیریم D کلاس تکریختی های جهانی C باشد، رسته ریخت جزئی $\overline{C}=\overline{(C,D)}$ که اشیاء آن همان اشیاء C و ریخت $\overline{f}=[(i_f,f)]:a\longrightarrow b$ کلاس

ریختی های هم ارزی زوج $(i_f : d_f \longrightarrow a, f : d_f \longrightarrow b)$ که در آن $i_f \in D$ و f در C می باشد و (i_f , f) با (i_g , g) هم ارز است اگر یکریختی k موجود باشد بطوریکه $i_f = i_g \circ k$ و $f = g \circ k$.

ریخت همانی روی شئ a ، $[(1_a , 1_a)]$ می باشد و اگر $\vec{f} : a \longrightarrow b$ و $\vec{g} : b \longrightarrow c$ ریخت هایی در باشند آنگاه:

$$\vec{g} \circ \vec{f} = [(i_g , g)] \circ [(i_f , f)] = [(i_f \circ f^{-1}(i_g), g \circ i^{-1}{}_g (f))]$$

$f^{-1}(i_g)$ عقب بر i_g در امتداد f است .

می توان نشان داد که $\vec{C}$ یک رسته است.

۱-۳-۹ مثال: رسته $\overrightarrow{Set}$ که اشیاء آن مجموعه ها و ریخت های آن $\vec{f} = [(i_f , f)] : X \longrightarrow Y$ که در آن $i_f : D_f \longrightarrow X$ تکریختی و $f : D_f \longrightarrow Y$ یک تابع است.

چون در رسته مجموعه ها تکریختی ها، تکریختی جهانی هستند وتا حد یکریختی با نگاشت شمول یکی هستند، لذا می توانیم فرض کنیم i_f نگاشت شمول است.

فصل دوم

الحاق‌هائی بین رسته‌های Set، Set_P و $\overrightarrow{Set}$