بسم اللّٰه الرّحمن الرّحيم

دانشگاه اراک

دانشکده علوم– گروه ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (گرایش آنالیز ریاضی)

تحت عنوان:

درونریختی های فشرده، ریس و شبه‌فشرده جبرهای لیپشیتس

استاد راهنما:

دکتر داود علیمحمدی

استاد مشاور:

دکتر سیروس مرادی

تدوین:

آرزو بیرانوند

۱۳۸۸

چکیده

در این پایان نامه با فرض این که (X,d) یک فضای متری فشرده باشد، ابتدا به معرفی و بیان برخی از ویژگی های جبرهای لیپشیتس $Lip_\alpha(X,d)$ برای $۰ < \alpha \leq ۱$ و جبرهای کوچک لیپشیتس $lip_\alpha(X,d)$ برای $۰ < \alpha < ۱$ می پردازیم. سپس ایده آل های ماکسیمال این جبرها را بررسی می کنیم. همچنین برخی از ویژگی های درونریختی های جبر های لیپشیتس را مورد مطالعه قرار می دهیم. در ادامه زیر فضاهای چگال فضاهای کوچک لیپشیتس بر یک فضای متری غیر بحرانی را تعیین خواهیم کرد. در آخر به بیان درونریختی های ریس و شبه فشرده جبرهای باناخ پرداخته و ویژگی های درونریختی ها ریس و شبه فشرده جبرهای لیپشیتس را بررسی می کنیم.

پیش گفتار

در اوایل دهه‌ی ۱۹۵۰، پس از مطرح شدن نظریه گلفاند [۱] شاخه جدیدی از جبرهای باناخ تعویض‌پذیر به نام جبرهای تابعی [۲] بوجود آمد که بعدها به جبرهای یکنواخت [۳] معروف شد. در دهه‌ی ۱۹۷۰–۱۹۶۰ تئوری جبرهای تابعی باناخ [۴] که توسیعی از جبرهای یکنواخت است مطرح شد. دونالد شربرت [۵] در سال ۱۹۶۴ میلادی اولین بار جبرهای لیپشیتس $Lip((K,d),\alpha)$ و $lip((K,d),\alpha)$ را معرفی و مورد بررسی قرار داد.

در سال ۱۹۸۰ هربرت کاموویتز نشان داد که اگر B یک جبر باناخ تعویض‌پذیر و نیم ساده با واحد ۱ باشد و فضای ایده‌آل ماکسیمال آن X همبند باشد و $\phi : X \to X$ یک درونریختی فشرده مانند T القا کند آنگاه $x_\circ$ در X موجود است که $\bigcap_{n=1}^{\infty} \phi_n(X) = \{x_\circ\}$ و ϕ_n، nامین خود ترکیبی ϕ می باشد.

پس از آن هربرت کاموویتز[۶] و استفان شینبرگ [۷] درونریختی های فشرده این جبرها را تعیین نمودند. آنها با همکاری یکدیگر در سال ۱۹۹۰ بعضی از ویژگی های درونریختی های جبرهای لیپشیتس را مورد بررسی قرار دادند.

در سال ۲۰۰۵ کاموویتز با همکاری فینیشتین مسئله‌ی بالا را از درونریختی های فشرده به درونریختی های ریس و شبه فشرده تعمیم داد.

در سال ۲۰۰۸ بهروزی ویژگی های درونریختی های ریس وشبه فشرده جبرهای لیپشیتس رامورد مطالعه قرار داد وبرای هر درونریختی یکانی از جبرهای کوچک لیپشیتس یک کران پایین برای شعاع طیفی $r_e(T)$ مشخص نمود.

---

[۱] Gelfand

[۲] Functional algebra

[۳] Uniform algebra

[۴] Banach functional algebra

[۵] Donald Sherbert

[۶] Herbert Kamowitz

[۷] Stephan Scheinberg

در این پایان نامه به بررسی ویژگی های درونریختی های فشرده، شبه فشرده و ریس جبرهای لیپشیتس می پردازیم.

این پایان نامه مشتمل بر پنج فصل است. در فصل اول تعاریف، قضایا و نتایج مقدماتی از توپولوژی، آنالیز تابعی را بیان می کنیم که در فصل های بعد مورد نیاز هستند.

فصل دوم از دو بخش تشکیل می شود. در بخش اول به معرفی جبرهای لیپشیتس $Lip_\alpha(X,d)$ و جبرهای کوچک لیپشیتس پرداخته و برخی از ویژگی های اساسی این جبرها را مورد بررسی قرار می دهیم. در بخش دوم ایده‌ال های ماکسیمال جبرهای لیپشیتس را تعیین نموده و زیر جبرهای چگال جبرهای لیپشیتس و زیر جبرهای چگال ایده‌ال های ماکسیمال آن ها را مقایسه می کنیم.

در فصل سوم ویژگی هایی از درونریختی های جبرهای لیپشیتس را بیان می کنیم. شرایط لازم و کافی برای فشرده بودن این درونریختی ها را ذکر می کنیم و همچنین نشان می دهیم که طیف یک درونریختی ناصفر فشرده‌ی جبرهای لیپشیتس، فقط نقاط ۰ و ۱ را شامل می شود.

در فصل چهارم ابتدا بر مجموعه‌ای ناتهی مانند K متریک غیر بحرانی ρ را تعریف نموده و سپس زیر فضاهای چگال فضاهای کوچک لیپشیتس بر یک فضای متری غیر بحرانی را تعیین می کنیم.

فصل پنجم مشتمل بر دو بخش است. در بخش اول درونریختی ریس و شبه فشرده جبرهای باناخ تعویضپذیر را معرفی نموده و ارتباط آن ها با درونریختی های فشرده و فشرده توانی را بیان می کنیم. سپس صورت کاملتری از یک قضیه‌ی مهم روی درونریختی های شبه فشرده که در سال ۲۰۰۵ توسط کاموویتز بیان شده را اثبات می کنیم.

در بخش دوم درونریختی های ریس و شبه فشرده جبرهای لیپشیتس را مورد بررسی قرار می دهیم. برای هر درونریختی یکانی از جبرهای کوچک لیپشیتس یک کران پایین را برای شعاع طیفی $r_e(T)$ مشخص می کنیم. همچنین نشان می دهیم که این کران پایین می تواند تحت شرایطی با شعاع طیفی اساسی برابر شود.

فهرست مطالب

⋆ ⋆ ⋆

فصل ۱

مقدمه

در این فصل که مشتمل برشش بخش است، به بیان مباحثی از فضاهای برداری توپولوژیک،جبرهای باناخ، تبدیل گلفاند و فضای ایده‌ال ماکسیمال جبرهای باناخ تعویض پذیر ، جبرهای تابعی باناخ، همریختی‌های جبر های باناخ تعویض پذیر که در فصل‌های بعد مورد نیاز می‌باشند، می‌پردازیم.

۱.۱ فضاهای برداری توپولوژیک

در این بخش با معرفی فضاهای برداری توپولوژیک و فضاهای باناخ، به بیان مقدماتی در زمینه‌ی دوگان یک فضای برداری توپولوژیک، عملگر و طیف یک عملگر می‌پردازیم.

۱.۱.۱ تعریف.

یک فضای برداری مختلط مجموعه‌ای است مانند X است که عناصرش را بردارمی نامند و در آن دو عمل به نام‌های جمع و ضرب اسکالر (تابعی از $\mathbb{C} \times X$ به توی X) تعریف شده‌اند که از خواص جبری زیر بهره‌منداند:
به هر جفت بردار x و y، بردار $x+y$ چنان نظیر است که $x+y=y+x$ و $x+(y+z)=(x+y)+z$، X شامل بردار منحصر به فرد ۰ (بردار صفر یا مبدا X) است به طوری که به ازای هر $x \in X$، $x+0=x$، و به هر $x \in X$ بردار منحصر به فرد $-x$ چنان نظیر است که $x+(-x)=0$. به هر جفت (α, x) که $x \in X$

و α اسکالر(عدد مختلط) است بردار $\alpha x \in X$ چنان نظیر است که $1x = x$، $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$، و دو قانون پخشپذیری

$$(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x \quad \text{و} \quad \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$$

برقرارند.

۲.۱.۱ تعریف.

یک فضای برداری مختلط X را یک فضای نرمدارمی گوییم هرگاه به ازای هر عضو x از X یک عدد حقیقی نامنفی $||x||$ (نرم x) نظیر شود به طوری که:

(الف) $||x+y|| \leq ||x|| + ||y|| \quad (x, y \in X)$

(ب) $||ax|| = |a|.||x|| \quad (x \in X, a \in \mathbb{C})$

(ج) $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (x \in X)$

در این صورت $(X, ||.||)$ را یک فضای نرمدار (مختلط) می نامیم.

۳.۱.۱ تعریف.

یک فضای باناخ عبارت است از یک فضای نرمدار که تحت متریک حاصل از نرمش تام باشد، به عبارت دیگر هر دنباله‌ی کوشی در آن همگرا باشد.

۴.۱.۱ تعریف.

فرض کنیم X یک فضای برداری مختلط و τ یک توپولوژی بر X باشد به طوری که:

(الف) به ازای هر $x \in X$، مجموعه تک عضوی $\{x\}$ بسته است؛

(ب) اعمال جمع و ضرب اسکالر نسبت به توپولوژی τ پیوسته اند؛

در این صورت X را یک فضای برداری توپولوژیکی می‌نامیم.
به عنوان مثال فضاهای نرمدار، فضاهایی برداری توپولوژیکی هستند.

۵.۱.۱ تعریف.

گوییم خانواده‌ی F از توابع بر مجموعه X، نقاط X را جدا می کند هرگاه به ازای هر $x,y \in X$ که $x \neq y$، عضوی از F مانند f باشد به طوری که

$$f(x) \neq f(y).$$

۶.۱.۱ تعریف.

محمل تابع مختلط f بر فضای توپولوژیکی X بست مجموعه‌ی

$$\{x \in X : f(x) \neq 0\}$$

می‌باشد، که آن را با $supp(f)$ نشان می‌دهیم. و گردایه‌ی تمام توابع مختلط پیوسته که محمل فشرده دارند را با $C_c(X)$ نشان می‌دهیم.

۷.۱.۱ تعریف.

فضای برداری توپولوژیک X را موضعاً فشرده گوییم هرگاه ۰ یک همسایگی با بست فشرده داشته باشد.

۸.۱.۱ لم (لم اوریزون) [15;2.12] .

فرض کنیم X یک فضای موضعاً فشرده و هاسدورف باشد و $K \subseteq U \subseteq X$ به طوری که K در X فشرده و U در X باز باشد، در این صورت $f \in C_c(X)$ یافت می‌شود به طوری که $0 \leq f \leq 1$ و به ازای هر $x \in K$، $f(x) = 1$ و به ازای هر $x \in X \setminus U$، $f(x) = 0$.

۹.۱.۱ قضیه.

فرض کنیم X یک فضای موضعاً فشرده و هاسدورف باشد. در این صورت $C_c(X)$ نقاط X را جدا می‌کند.

برهان. فرض کنیم $x,y \in X$ و $x \neq y$. قرار می‌دهیم $U = X \setminus \{y\}$، می‌دانیم $\{x\} \subseteq U$ در X فشرده و

U در X باز است و $y \in X\setminus U$، لذا بنا به لم اوریزون، $f \in C_c(X)$ وجود دارد به طوری که $f(x) = 1$ و $f(y) = 0$، در نتیجه حکم ثابت است.

۱۰.۱.۱ تعریف.

نگاشت T از فضای برداری X به توی فضای برداری Y را یک تبدیل خطی (نگاشت خطی) گوییم، هرگاه:

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y) \quad (x, y \in X \ , \ \alpha, \beta \in \mathbb{C}).$$

هر تبدیل خطی از فضای برداری X به توی میدان $\mathbb{C}$ را یک تابعک خطی می‌نامیم.

۱۱.۱.۱ تعریف.

گوییم زیرمجموعه‌ی E از فضای برداری توپولوژیکی X کراندار است، اگر به هر همسایگی V از 0 در X عددی مانند $s > 0$ چنان نظیر باشد که به ازای هر $t > s$؛ $E \subseteq tV$.

۱۲.۱.۱ تعریف.

فرض کنیم X و Y دو فضای برداری توپولوژیکی مختلط باشند. نگاشت خطی $\Lambda : X \to Y$ را یک نگاشت خطی کراندار نامیم هرگاه تصویر هر مجموعه‌ی کراندار در X، مجموعه‌ای کراندار در Y باشد. به عبارت دقیق‌تر اگر $E \subseteq X$ یک مجموعه‌ی کراندار در $\mathcal{X}$ باشد آنگاه $\Lambda(E)$ یک مجموعه‌ی کراندار در Y است.

۱۳.۱.۱ تعریف.

فرض کنیم A و B دو فضای نرمدار باشند. نگاشت $T : A \to B$ را یک طولپا (یکمتری) نامیم هرگاه به ازای هر $a \in A$ داشته باشیم:

$$||Ta|| = ||a||.$$

۱۴.۱.۱ قضیه.

اگر X و Y دو فضای نرمدار باشند، نگاشت خطی T از X به Y را کراندار است هرگاه عددی ثابت مانند M وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم:

$$||Tx|| \leq M||x||.$$

۱۵.۱.۱ تعریف.

فرض کنیم X و Y دو فضای نرمدار باشند و نگاشت خطی $T : X \to Y$ کراندار باشد در این صورت $\sup\{||Tx|| : x \in X, ||x|| \leq 1\}$ را نرم(عملگری) T نامیده و آن را با $||T||$ نمایش می‌دهیم.

۱۶.۱.۱ تعریف.

فرض کنیم X و Y دو فضای نرمدار باشند. مجموعه‌ی همه‌ی عملگرهای خطی و کراندار از X به Y رابه $\mathcal{B}(X,Y)$ نمایش می دهیم و در حالت خاص $\mathcal{B}(X,X)$ را به $\mathcal{B}(X)$ نشان می دهیم.

۱۷.۱.۱ تعریف.

اگر X یک فضای نرمدار باشد، آنگاه $\mathcal{B}(X,\mathbb{C})$ را فضای دوگان X نامیم و آن را با X^* نشان می‌دهیم. هم چنین دوگان X^* را دوگان دوم X نامیده و آن را با X^{**} نشان می‌دهیم.

۱۸.۱.۱ تعریف.

فرض کنیم $(A, ||.||)$ یک فضای باناخ بر میدان $\mathbb{C}$ و A^{**} دوگان دوم A بر $\mathbb{C}$ باشد. نگاشت $\pi : A \to A^{**}$ با ضابطه‌ی $\pi(a)(\Lambda) = \Lambda a(\Lambda \in A^* \ , \ a \in A)$، یک نگاشت خطی یکمتری است که آن را نگاشت نشاننده‌ی متعارف می‌نامیم.

۱۹.۱.۱ تعریف.

فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیک بر میدان $\mathbb{C}$ با توپولوژی برداری τ باشد به طوری که X^*، فضای دوگان، X، نقاط X را جدا کند. در این صورت توپولوژی تولید شده بوسیله X^* بر X، یعنی ضعیف‌ترین توپولوژی τ_w بر X که هر $\Lambda \in X^*$ نسبت به τ_w پیوسته باشد، توپولوژی ضعیف بر X می‌نامیم. اگر x_0 عنصری دلخواه از X و $\varepsilon > 0$ و $\Lambda \in X^*$، آنگاه

$$U(x_0, \Lambda, \varepsilon) = \{x \in X : |\Lambda x - \Lambda x_0| < \varepsilon\}, \qquad (۱)$$

یک همسایگی باز پایه‌ای $x_0 \in X$ نسبت به توپولوژی ضعیف است. در حقیقت دسته‌ی تمام مجموعه‌های $U(x_0, \Lambda, \varepsilon)$ وقتی که بر $x_0 \in X$، Λ در X^* و ε در مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت تغییر می‌کنند، تشکیل یک زیرپایه برای توپولوژی ضعیف می‌دهند و تمام اشتراکهای متناهی از مجموعه‌های به فرم (۱)، تشکیل یک پایه برای توپولوژی ضعیف می‌دهند.

۲۰.۱.۱ تعریف.

فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیک بر میدان $\mathbb{C}$ و X^* دوگان X باشد، برای هر $x \in X$، نگاشت $f_x : X^* \to \mathbb{C}$ را به صورت $f_x(\Lambda) = \Lambda x$ که $\Lambda \in X^*$، تعریف می‌کنیم. در این صورت $\{f_x : x \in X\}$—توپولوژی بر X^* یعنی کوچکترین توپولوژی بر X^* که برای هر $x \in X$ نگاشت f_x نسبت به آن پیوسته باشد، توپولوژی ضعیف—ستاره بر X^* می‌نامیم.
یک مجموعه‌ی زیر پایه‌ای باز برای توپولوژی ضعیف—ستاره به شکل زیر است:

$$U(\Lambda_0, x, \varepsilon) == \{\Lambda \in X^* : |f_x(\Lambda) - f_x(\Lambda_0)|\} = \{\Lambda \in X^* : |\Lambda x - \Lambda x_0| < \varepsilon\}$$

که در آن $x \in X$، $\Lambda_0 \in X^*$ و $\varepsilon > 0$.
هم‌چنین یک مجموعه‌ی پایه‌ای برای توپولوژی ضعیف—ستاره به شکل زیر است:

$$(\Lambda_0, x_1, ..., x_n \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) = \{\Lambda \in X^* : |\Lambda(x_i) - \Lambda_0(x_i)| < \varepsilon_i, \quad 1 \le i \le n\}$$

که در آن $\Lambda_0 \in X^*$، $x_1, ..., x_n \in X$ و $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ اعداد حقیقی مثبت هستند.

۲۱.۱.۱ قضیه. [15; 4.10]

فرض کنیم X و Y دو فضای نرمدار باشند. به هر $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ یک $T^* \in \mathcal{B}(Y^*,X^*)$ منحصر به فرد نظیر است که در رابطه‌ی

$$< Tx, y^* >=< x, T^*y^* >$$

به ازای هر $x \in X$ وهر $y^* \in Y^*$ صدق می‌کند. به علاوه، T^* در $||T|| = ||T^*||$ صدق می‌نماید. T^* را الحاقی T می‌نامیم.

۲۲.۱.۱ تعریف.

فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند. $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ را فشرده گوییم هرگاه U گوی واحد باز در X باشد آنگاه بست $T(U)$ در Y فشرده باشد. به عبارت دیگر T فشرده است اگر و فقط اگر بستار تصویر هر مجموعه‌ی کراندار تحت T فشرده باشد.

۲۳.۱.۱ تعریف.

فرض کنیم X و Y دو فضای نرمدار باشند. مجموعه‌ی همه‌ی عملگرهای خطی و فشرده از X به Y رابه $\mathcal{K}(X,Y)$ نمایش می دهیم و در حالت خاص $\mathcal{K}(X,X)$ را به $\mathcal{K}(X)$ نشان می دهیم.

۲۴.۱.۱ قضیه [15;4.18].

فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند و $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ اگر $dimR(T) < \infty$، آنگاه T فشرده است.

۲۵.۱.۱ قضیه [15;4.19].

فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ بوده و $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. در این صورت T فشرده است اگر و تنها اگر T^* فشرده باشد.

۲۶.۱.۱ تعریف.

فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد و $T \in \mathcal{B}(X)$، مجموعه تمام اعداد مختلط مانند λ را که $T - \lambda I$ وارون‌پذیر نمی‌باشد، طیف T نامیده و آن را به $\sigma(T)$ نشان می دهیم. لذا $\lambda \in \sigma(T)$ اگر و تنها اگر دست کم یکی از دو حکم زیر درست باشد:

(الف) برد $T - \lambda I$ تمام X نباشد.

(ب) $T - \lambda I$ یک به یک نباشد.

اگر (ب) برقرار باشد، گوییم λ یک مقدار ویژه‌ی T است.

۲۷.۱.۱ قضیه.

فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند. $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ فشرده است اگر وتنها اگر هر دنباله‌ی کراندار $\{x_n\}$ در X شامل زیردنباله‌ای مانند $\{x_{n_i}\}$ باشد به طوری که $\{Tx_{n_i}\}$ به نقطه‌ای از Y همگرا باشد.

۲۸.۱.۱ قضیه [15;4.25].

فرض کنیم X یک فضای باناخ، $T \in \mathcal{B}(X)$ و T فشرده باشد. در این صورت اگر $\lambda \neq 0$ و $\lambda \in \sigma(T)$، آنگاه λ یک مقدار ویژه‌ی T است.

۲۹.۱.۱ قضیه[15; 4.18].

فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند.

(الف) هرگاه $dim(X) = \infty$، $T \in \mathcal{B}(X)$ و T فشرده باشد، آنگاه $0 \in \sigma(T)$.

(ب) اگر $S \in \mathcal{B}(X)$، $T \in \mathcal{B}(X)$. T فشرده باشد، ST و TS نیز چنین اند.

(ج) عملگرهای فشرده یک ایده‌ال بسته از $\mathcal{B}(X,Y)$ در نرم توپولوژی آن تشکیل می دهند.

۳۰.۱.۱ تعریف.

فرض کنیم X یک فضای باناخ، M زیر فضایی از X، و N زیر فضایی از $X^\star$ باشد. فناسازهای (پوچ سازها) $M^\perp$ و $^\perp N$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$M^\perp = \{x^\star \in X^\star \ :< x, x^\star >= 0, \forall x \in M\},$$

$$^\perp N = \{x \in X \ :< x, x^\star >= 0, \forall x^\star \in N\}.$$

۲.۱ چند تعریف و قضیه اساسی در آنالیز تابعی

۱.۲.۱ تعریف.

فرض کنیم X یک مجموعه‌ی ناتهی بوده و $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع مختلط بر X باشد. گوییم $\{f_n\}$ بر X به طور یکنواخت کراندار است هرگاه عددی مانند M یافت شود به طوری که:

$$|f_n(x)| < M \qquad (\forall x \in X, n = 1, 2, 3, ...).$$

۲.۲.۱ تعریف.

فرض کنیم X یک مجموعه‌ی ناتهی بوده و $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع مختلط بر X باشد. گوییم دنباله‌ای از توابع $\{f_n\}$ برای $n = 1, 2, 3, ...$ بر X به طور یکنواخت به تابع f همگراست، هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد صحیحی مانند N یافت شود به طوری که $n \geq N$ نامساوی $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ را به ازای هر $x \in X$ نتیجه دهد.

۳.۲.۱ تعریف.

فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. مجموعه‌ی E در X را ناهمبند نامیم اگر E اجتماع دو مجموعه‌ی ناتهی مانند $\mathcal{B}, \mathcal{A}$ باشد که:

$$\overline{\mathcal{A}} \bigcap \mathcal{B} = \mathcal{A} \bigcap \overline{\mathcal{B}} = \emptyset$$

۴.۲.۱ تعریف.

فرض کنیم $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع باشد که بر مجموعه‌ی E تعریف شده اند. گوییم $\{f_n\}$ بر E نقطه به نقطه کراندار است هرگاه $\{f_n(x)\}$ به ازای هر $x \in E$ کراندار باشد.

۵.۲.۱ تعریف.

فرض کنیم X و Y دو فضای برداری توپولوژیکی روی میدان $\mathbb{C}$ باشند و همچنین Γ گردایه‌ای از نگاشت های خطی از X به Y باشد، در این صورت گوییم Γ همپیوسته است هرگاه به ازای هر همسایگی 0 در Y مانند W، همسایگی از 0 در X مانند V یافت شود به طوری که به ازای هر $\Lambda \in \Gamma$ داشته باشیم:

$$\Lambda(V) \subseteq W.$$

۶.۲.۱ قضیه (آرزلا– آسکولی) [16; 11.26] .

فرض کنیم F گردایه‌ای از توابع مختلط، همپیوسته‌و نقطه به نقطه کراندار بر فضای متری X باشد. در این صورت هر دنباله‌ی $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در F، زیر دنباله‌ای دارد که بر هر زیرمجموعه‌ی فشرده X به طور یکنواخت همگراست.

۷.۲.۱ تعریف.

اگر X یک فضای متریک و $T : X \to X$ یک نگاشت باشد آنگاه $x \in X$ را نقطه‌ی ثابت T می‌گوییم هرگاه $Tx = x$.

۳.۱ جبرهای باناخ

در این قسمت، با معرفی جبرهای باناخ به بیان مقدماتی درباره‌ی این جبرها و همریختی‌های مختلط و خواصی از طیف اساسی این جبرها می‌پردازیم.

۱.۳.۱ تعریف.

فرض کنیم A یک مجموعه ناتهی باشد که روی آن دو عمل جمع و ضرب و ضرب اسکالر تعریف شده باشند به طوری که

(الف) A با جمع و ضرب اسکالر فضای برداری روی میدان $\mathbb{C}$ باشد؛

(ب) عمل ضرب نسبت به جمع توزیع‌پذیر باشد؛

(ج) $\forall \alpha \in \mathbb{C}\ ,\ \forall a, b \in A:\ \alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$؛

(د) عمل ضرب شرکت پذیر باشد.

آنگاه A را یک جبر مختلط گوییم.

الف) جبر A را تعویض‌پذیر گوییم هرگاه تحت عمل ضرب عناصر A جا به جا شوند. یعنی به ازای هر $a, b \in A$؛

$$ab = ba.$$

ب) جبر A را واحددار گوییم هرگاه عضوی از A مانند e وجود داشته باشد به طوری که‌به ازای هر $a \in A$؛

$$ea = ae = a.$$

e را واحد جبر A می نامیم.

ج) یک زیرمجموعه از جبر A را زیر جبر A نامیم، هرگاه تحت همان اعمال جمع و ضرب وضرب اسکالر روی A خود یک جبر باشد.

۲.۳.۱ تعریف.

فرض کنیم A یک جبر باناخ واحددار باشد. مجموعه همه اعضای وارونپذیر A را با A^{-1} نمایش می‌دهیم.

۳.۳.۱ تعریف.

فرض کنیم A یک جبرمختلط باشد و $||.|| : A \to \mathbb{C}$ یک نرم بر فضای برداری A روی میدان $\mathbb{C}$ باشد به طوری که:

$$||ab|| \leq ||a|| \, . \, ||b|| \qquad (a, b \in A).$$

در این صورت $||.||$ را یک نرم جبری بر A و $(A, ||.||)$ را یک جبر نرم دار بر میدان $\mathbb{C}$ می‌نامیم.

۴.۳.۱ تعریف.

فرض کنیم A یک جبر مختلط باشد. تابع $||.|| : A \to \mathbb{C}$ را یک نرم موضعاً جبری گوییم هرگاه اولاً $||.||$ یک نرم بر A باشد و ثانیاً $C > 0$ ی موجود باشد به گونه‌ای که به ازای هر $a, b \in A$؛

$$||ab|| \leq C \, ||a|| \, ||b||.$$

۵.۳.۱ تعریف.

فرض کنیم A یک جبر نرم دار بر میدان $\mathbb{C}$ باشد. اگر هر دنباله‌ی کوشی در $(A, ||.||)$ همگرا باشد، آنگاه $(A, ||.||)$ را یک جبر باناخ بر میدان $\mathbb{C}$ می‌نامیم.

۶.۳.۱ مثال.

فرض کنیم X یک فضای توپولوژیکی فشرده‌ی هاسدورف باشد. مجموعه‌ی همه توابع مختلط پیوسته بر X را با $C(X)$ نشان می‌دهیم که تحت اعمال جمع و ضرب نقطه به نقطه یک جبر مختلط بر X است. به هر $f \in C(X)$ نرم یکنواخت

$$||f||_X = \sup\{|f(x)| : x \in X\}.$$

را مربوط می‌کنیم. در این صورت $(C(X), ||.||_X)$ یک جبر باناخ تعویض‌پذیر واحددار است که واحد آن تابع ثابت 1 بر X است.