وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه تفرش

دانشکده ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

حل عددی معادلات انتگرال فردهلم- ولترا با استفاده از توابع هایبرید لژاندر

استادان راهنما

دکتر مهدی رمضانی

دکتر یدالله اردوخانی

دانشجو

حسین بحرینی

دی ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به

قطره ای از دریای بیکران تلاش ها و بزرگواری های پدرم

و

به پنجره های آسمانی چشمان پر انتظار مادرم

و

زحمات و همکاری و همراهی بی دریغ همسرم.

سپاس گذاری ...

سپاس معبودی را که آفریننده و خالق اندیشه ها، مخلوقات و پدیده ها بدون الگویی، دانای بی معلم و خلاق که بر ما منت نهاد و این مهم را به ما ارزانی داشت.

سپاس وافر از استادان راهنما جناب دکتر اردوخانی و جناب دکتر رمضانی که حاصل تلاشم را در راه رسیدن به هدفی والا مقدور نمی بود چنانچه از هدایت و حمایت ایشان بهره مند نمی شدم.

سپاس از تمامی دوستانی که در این راه راهنمایم نمودند.

چکیده

در این پایان‌نامه روشهای عددی مفیدی برای حل چند رده از معادلات انتگرال فردهلم و ولترا به کمک توابع هایبرید لژاندر ارائه می‌شود. معادلات مطرح شده، معادله انتگرال فردهلم خطی نوع دوم، معادله انتگرال ولترا خطی نوع دوم، معادله انتگرال آمیخته فردهلم-ولترا خطی نوع دوم و همرشتاین، معادله انتگرال فردهلم غیرخطی و معادله انتگرال ولترا غیرخطی می‌باشند. ایده اصلی در این روش، استفاده از ماتریس‌های عملیاتی چند جمله‌ای‌های هایبرید لژاندر می‌باشد. بدین منظور، نخست جواب معادله مورد نظر را به صورت $Y^T\mathbf{h}(t)$ (که در آن Y بردار ضرایب مجهول و $\mathbf{h}(t)$ بردار پایه هایبرید لژاندر می‌باشد) تقریب زده و سپس با به‌کارگیری ماتریس‌های عملیاتی توابع هایبرید لژاندر، این معادله را به یک معادله ماتریسی هم‌ارز که با یک دستگاه از معادلات جبری با ضرایب مجهول هایبرید لژاندر مطابقت دارد، تبدیل می‌کنیم. جواب این دستگاه، بردار مجهول Y را مشخص می‌کند [۲۳] . در انتهای این روش تعدادی مثال عددی ارائه می‌شود و نتایج آن‌ها با نتایج عددی به دست آمده از دیگر روش‌های موجود برای حل این‌گونه معادلات مقایسه می‌شود.

یکی از ویژگی‌های توابع هایبرید این است که مقادیر m(مرتبه لژاندر) و n(مرتبه بلاک-پالس) قابل تعدیل هستند به طوری‌که قادر خواهیم بود جواب تقریبی با دقت مناسب از توابع متعامد به صورت تکه‌ای پیوسته برای معادلات انتگرال به دست آوریم. همچنین تاکید می‌کنیم که مقادیر بهین mو n می‌توانند خطای نسبی محاسبات را کاهش دهند.

واژه‌های کلیدی: *توابع هایبرید، فردهلم، ولترا، معادلات انتگرال، ماتریس حاصل‌ضرب، ماتریس ضرائب، توابع متعامد تکه‌ای ثابت.*

فهرست مطالب

پیش گفتار

معادلات انتگرال اغلب در فرمول‌های ریاضی مربوط به پدیده‌های فیزیکی ظاهر می‌شوند. در بررسی علومی نظیر زیست‌شناسی [۱] ، مهندسی [۳، ۲] ، فیزیک [۴] و علوم کاربردی وسیعی نظیر بیومکانیک، کنترل، اقتصاد، مهندسی الکترونیک، الکترودینامیک، الکترواستاتیک، تئوری بازی‌ها، دینامیک سیالات، تئوری نوسان [۵] و ... با این‌گونه معادلات مواجه می‌شویم.
اصطلاح معادلات انتگرالی نخستین بار توسط بویس ریموند [۱] براي این دسته از معادلات پیشنهاد شد. در سال ۱۷۸۲ لاپلاس [۲] اولین کسی بود که برای حل معادلات دیفرانسیل، معادله انتگرال

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xt} f(t)dt$$

را مطرح نمود. فوریه [۳] در سال ۱۸۱۱ در حل مسایل حرارت، تئوری انتگرال فوریه را شکل داد. آبل [۴] نیز در حل مسایل مکانیکی، معادله انتگرالی آبل را مطرح نمود.
در طول سال‌های ۱۸۲۶ تا ۱۸۹۶ دانشمندانی نظیر پواسن [۵] (در نظریه مغناطیس)، لیوویل (در حل دسته‌ی خاصی از معادلات دیفرانسیل)، نیومن [۶] در مساله دیریکله (تعیین تابع f روي سطح s که در معادله لاپلاس صدق می‌کند)، پوانکاره [۷] (در رابطه با یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی) با معادلات انتگرالی مواجه شدند و قدم‌هایی بزرگ در راه توسعه این‌گونه معادلات برداشته شد. در سال ۱۸۹۶ دانشمندی ایتالیایی به نام ولترا [۸] براي اولین بار نظریه عمومی معادلات انتگرال را ارائه داد. در حدود سال ۱۹۰۰ نیز ریاضی‌دان

[۱] Bois Reymond
[۲] Laplace
[۳] Fourier
[۴] Abel
[۵] Poison
[۶] Newman
[۷] Poincare
[۸] Volterra

سوئدی به نام فردهلم [۹] یک دسته بندی کلی از معادلات انتگرال خطی به صورت

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)f(t)dt, \quad a \le x \le b$$

ارائه داد که نوع خاصی از معادلات ولترا است. تحقیقات وی منجر به ارائه قضایای فردهلم گردید که از قضایای بنیادی معادلات انتگرال به شمار می‌آیند. هیلبرت [۱۰] نیز در تحقیقاتش بسیاری از مسایل ریاضی-فیزیک را به کمک معادلات انتگرالی حل کرد. وی معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات با مشتقات جزئی با مقادیر اولیه و مرزی را به معادلات انتگرال تبدیل کرد و به این ترتیب حرکتی نو در حل این‌گونه معادلات به وجود آمد.

قضایای فردهلم ابتدا برای هسته‌های پیوسته ارائه شد، ولی بعدها توسط کارلمان [۱۱] و ریس [۱۲] برای هسته‌های کلی‌تر تعمیم یافت. در حدود سال ۱۹۵۰ هرمن ویل [۱۳] تحقیقات زیادی در ارتباط با این‌که به ازای چه مقادیری معادله انتگرال جواب دارد، انجام داد. از آنجا که همه‌ی معادلات انتگرال را نمی‌توان به صورت تحلیلی حل کرد، لذا به تدریج روش‌های تقریبی و عددی برای حل این معادلات به کار گرفته شد. در سال‌های اخیر توابع پایه‌ای متفاوتی [۱۱، ۱۲] مانند توابع متعامد و موجک‌ها برای تقریب جواب معادله انتگرال به کار برده شده است. به طور کلی توابع متعامد را می توان در سه دسته کلی قرار داد [۱۳] که عبارتند از:

- دسته اول شامل توابع متعامد تکه‌ای ثابت($PCOF$) نظیر توابع والش، بلاک-پالس، هار و غیره می‌باشد.
- دسته دوم شامل چند جمله‌ای‌های متعامد نظیر چندجمله‌ای‌های لاگور، لژاندر، چبیشف و غیره می‌باشد.
- دسته سوم که کاربرد وسیعی دارند، مجموعه توابع سینوس و کسینوس در سری‌های فوریه می‌باشد.

با توجه به این‌که حل معادلات انتگرال فردهلم و ولترا نوع دوم از حل معادلات دیفرانسیل معمولی دشوارتر است، بنابراین بسیاری از محققین [۱۲، ۱۱] تلاش کرده‌اند که به روشهای متفاوتی بر این مشکل غلبه یابند. اخیرا توابع هایبرید توجه بسیاری از محققین را برای حل سیستم‌های دیفرانسیلی به خود جلب کرده است و یک ابزار ریاضی مفیدی می‌باشد.

[۹] Fredholm
[۱۰] Hilbert
[۱۱] Carleman
[۱۲] Riesz
[۱۳] Hermann weyl

رزاقی و مرزبان اولین کسانی بودند که برای اولین بار توابع هایبرید را برای آنالیز سیستم‌ها به کار بردند. [۱۵، ۱۴] آن‌ها ابتدا یک ماتریس عملیاتی برای انتگرال بردار توابع هایبرید به دست آوردند و راه را برای بررسی سیستم‌های دینامیکی به وسیله توابع هایبرید هموار کردند.

در این پایان‌نامه توابع هایبرید که مشتمل بر توابع بلاک-پالس و چند جمله‌ای‌های لژاندر هستند را مورد بررسی قرار می‌دهیم. همچنین جزئیات مفیدی از توابع هایبرید، انتگرال حاصل‌ضرب پایه‌ها، ماتریس حاصل‌ضرب پایه‌ها و ماتریس ضرایب وابسته با بهترین مرتبه که برای حل این‌گونه معادلات انتگرال به کار می‌رود، بیان خواهد شد. ایده اصلی در این روش، تبدیل معادله انتگرال به یک دستگاه معادلات جبری است. از این‌رو، کاهش قابل ملاحظه‌ای در حجم محاسبات و افزایش سرعت انجام محاسبات خواهیم داشت.

این پایان‌نامه در چهار فصل تنظیم شده است. در فصل اول، مقدماتی از آنالیز حقیقی و آنالیز عددی که مورد نیاز فصل‌های بعدی است ارائه می‌گردد. در فصل دوم، حل تحلیلی برخی معادلات انتگرال معرفی می‌شوند. در فصل سوم، ماتریس‌های عملیاتی چندجمله‌ای‌های لژاندر و هایبرید آن‌ها ارائه می‌شوند. در فصل چهارم، روش‌های حل عددی چند دسته از معادلات را بیان کرده، با ارائه مثال‌های عددی روش را مورد ارزیابی قرار می‌دهیم و با نتایج موجود از حل این معادلات با دیگر روش‌ها مقایسه می‌نماییم.

فصل ۱

پیش‌نیازها

در این فصل به بیان برخی تعاریف و قضایای مهم از آنالیز تابعی، آنالیز حقیقی [۱۷، ۱۶] و آنالیز عددی [۱۸] می‌پردازیم که برای درک بهتر مفاهیم موجود در فصل‌های بعدی مورد نیاز می‌باشند.

۱.۱ مفاهیم پایه در آنالیز حقیقی

تعریف ۱.۱.۱. ***یک فضای برداری(خطی)*** *متشکل است از:*

۱. *یک مجموعه $\mathbf{V}$ از اشیا به نام بردار،*

۲. *یک میدان $\mathbf{K}$ از اسکالرها ،*

۳. *دو عملگر $\mathbf{u}+\mathbf{v}\in\mathbf{V}\longmapsto(\mathbf{u},\mathbf{v})$ و $\alpha\mathbf{v}\in\mathbf{V}\longmapsto(\alpha,\mathbf{v})$ که در اصول موضوعه زیر صدق می‌کنند:*

- $\forall u,v\in V,\quad u+v=v+u$
- $\forall u,v,w\in V,\quad (u+v)+w=u+(v+w)$
- $\exists ۰,۱\in V\ \ni\ \forall v\in V,\quad ۰+v=v+۰=v,\ ۱v=v$
- $\forall v\in V;\exists -v\in V\ni -v+v=۰$
- $\forall\alpha,\beta\in K,\forall v\in V,\quad \alpha(\beta v)=(\alpha\beta)v$
- $\forall\alpha,\beta\in K,\forall v,u\in V,\quad (\alpha+\beta)v=\alpha v+\beta v,\ \alpha(v+u)=\alpha v+\alpha u$

با توجه به تعریف بالا $\mathbf{V}$ را یک ***فضای برداری*** روی میدان $\mathbf{K}$ می‌نامیم. اگر $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ آن‌گاه $\mathbf{V}$ را ***فضای برداری حقیقی*** و اگر $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ ، در این صورت $\mathbf{V}$ را ***فضای برداری مختلط*** می‌نامیم.

مثال ۱.۱.۱. *یک مجموعه از تمام دنباله‌های نامتناهی $x_۱, x_۲, \ldots$ از اعداد حقیقی به طوری‌که $\sum\limits_{\mathbf{i=1}}^{\infty} |\mathbf{x_i}|^{\mathbf{p}} < \infty$ ، یک **فضای برداری** است که با $\mathbf{l_p}$ نشان داده می‌شود.*

تعریف ۲.۱.۱. *فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان K باشد. زیر مجموعه W از V را یک زیر فضای V می‌نامیم هرگاه W با اعمال جمع و ضرب اسکالر تعریف شده روی V ، یک فضای برداری روی K باشد.*

قضیه ۱.۱.۱. *یک فضای برداری X دارای بعد **متناهی** است اگر و تنها اگر دارای یک پایه با $\mathbf{n}$ **عضو** باشد. همچنین هر مجموعه از n عنصر $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ که یک پایه برای فضای n- بعدی تشکیل می‌دهد، یک پوشش (مولد) از $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ گفته می‌شود.*

مثال ۲.۱.۱. *مجموعه تمام چندجمله‌ای‌های از درجه نابیشتر از n یک فضای P_n ، از بعد $n + ۱$ است. جمله‌های $۱, t, t^۲, \ldots, t^n$ پایه برای P_n هستند.*

تعریف ۳.۱.۱. *فرض کنید $\mathbf{V}$ یک فضای برداری باشد، یک **نرم** $\|.\|$ یک تابع از $\mathbf{V}$ به $\mathbb{R}$ با خصوصیات زیر می‌باشد:*

۱. برای هر $v \in V$ ، $\|v\| \geq ۰$ و $\|v\| = ۰$ اگر و تنها اگر $v = ۰$.

۲. برای هر $v \in V$ و $\alpha \in K$ ، $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$

۳. برای هر $v, u \in V$ ، $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

فضای $\mathbf{V}$ به همراه نرم $\|.\|$ یعنی $(V, \|.\|)$ ، یک **فضای خطی نرم‌دار** یا **فضای نرم‌دار** نامیده می‌شود.

مثال ۳.۱.۱. *برای $X = (x_۱, \ldots, x_d)^T$ تابع،*

$$\|X\|_۲ = \left(\sum_{i=۱}^{d} x_i^۲\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

*یک نرم در فضای $\mathbb{R}^d$ است که **نرم اقلیدسی** [۱] نامیده می‌شود و یک نرم معمول در فضای $\mathbb{R}^d$ است.*

[۱] Euclidean norm

وقتی $d=۱$ ، این نرم همان قدر مطلق می‌شود یعنی برای هر x ،

$$\|x\|_{۲}=|x|.$$

به طور کلی‌تر برای $۱\leq p<\infty$ ، فرمول‌های

$$\|X\|_p=\left(\sum_{i=۱}^{d}x_i^p\right)^{\frac{۱}{p}}$$

و

$$\|X\|_\infty=max_{۱\leq i\leq d}|x_i|$$

نرم‌هایی در فضای $\mathbb{R}^d$ می‌باشند. نرم $\|.\|_{\mathbf{p}}$ ، **p -نرم** نامیده می‌شود و به $\|X\|_\infty$ ***نرم ماکزیمم*** یا ***نرم نامتناهی*** گفته می‌شود. همچنین می‌توان نشان داد که:

$$\|X\|_\infty=\lim_{p\to\infty}\|x\|_p.$$

نکته ۱.۱.۱. اگر V یک فضای نرم‌دار باشد و برای هر $u,v\in V$ داشته باشیم، $d(u,v)=\|u-v\|$ آن‌گاه (V,d) را یک فضای متری القا شده به وسیله نرم گوییم. بنابراین هر فضای نرم‌دار یک فضای متری است.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید V یک فضای نرم‌دار با نرم $\|.\|$ باشد. دنباله $\{u_n\}_{n=۰}^{\infty}$ را همگرا به $u\in V$ می‌گوییم هرگاه:

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n-u\|=۰$$

همچنین می‌توان گفت که u حد دنباله $\{u_n\}$ است. و می‌توان نوشت:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=u$$

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید که $\mathbf{V}$ یک **فضای نرم دار** باشد. دنباله $\{u_n\}_{n=۰}^{\infty}\subset V$ را یک ***دنباله کشی*** [۲] می‌نامیم هرگاه:

$$\lim_{m,n\to\infty}\|u_m-u_n\|=۰.$$

تعریف ۶.۱.۱. فضای متری (V,d) را ***کامل*** می‌گوییم اگر هر دنباله کوشی در این فضا به عضوی از همین فضا همگرا باشد.

[۲] Cauchy sequence

تعریف ۷.۱.۱. *فضای نرم دار V را* ***فضای باناخ*** [۳] *گوییم هرگاه فضای متری (V,d) با متر متعارف (متری که به وسیله نرم القا می‌شود) یک فضای متری کامل باشد.*

مثال ۴.۱.۱. *فرض کنیم $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ یک مجموعه باز کران‌دار باشد. برای هر $v \in C(\bar{\Omega})$ و $1 \leq p < \infty$ تعریف می‌کنیم p- نرم*

$$\|v\|_p = \left(\int_\Omega |v(x)|^p dx\right)^{\left(\frac{1}{p}\right)}.$$

در این‌جا، $x = [x_1, \ldots, x_d]^T$ *و* $dx = dx_1 dx_2 \ldots dx_d$. **به علاوه، تعریف می‌کنیم** ∞ *-نرم یا نرم ماکزیمم را به صورت*

$$\|v\|_\infty = \max_{x\in c} |v(x)|.$$

فضای $C\left(\bar{\Omega}\right)$ با نرم $\|.\|_\infty$ ، یک فضای باناخ است، زیرا حد یکنواخت توابع پیوسته، پیوسته می‌باشد. فضای $C\left(\bar{\Omega}\right)$ با نرم $\|.\|_p$ ، که $1 \leq p < \infty$ ، یک فضای باناخ نیست. برای نشان دادن این موضوع، فضای $C\left[0, 1\right]$ و یک دنباله در این فضا را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$u_{n(x)} = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \\ nx - \frac{1}{2}\left(n-1\right), & \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \leq x < \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, \\ 1, & \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

و قرار می‌دهیم:

$$u(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

بنابراین $\|u_n - u\|_p \longrightarrow 0$ وقتی $n \longrightarrow \infty$. به عبارت دیگر، دنباله $\{u_n\}$ به u در نرم $\|.\|_p$ همگرا است. اما واضح است که مهم نیست ما چگونه $u(\frac{1}{2})$ را تعریف کنیم و تابع حد u پیوسته نیست.

[۳] Banach spaces

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنیم X یک مجموعه غیرتهی باشد. خانواده $\mathcal{A}$ از زیر مجموعه‌های X را یک جبر گوییم هرگاه:

۱. اجتماع هر دو عضو $\mathcal{A}$ در $\mathcal{A}$ باشد.

۲. متمم هر عضو $\mathcal{A}$ در $\mathcal{A}$ باشد.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنیم X یک مجموعه غیر تهی باشد. خانواده $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌های X را یک $\sigma-$جبر گوییم هرگاه:

۱. تحت اجتماع شمارا بسته باشد. به عبارت دیگر برای هر $\mathcal{A} \supseteq \{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ آن‌گاه $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ باشد.

۲. متمم هر عضو $\mathcal{A}$ در $\mathcal{A}$ باشد.

نکته ۲.۱.۱. جبر $\mathcal{A}$ یک $\sigma-$جبر است هرگاه تحت اجتماع شمارا از عناصر دو به دو مجزای خود بسته باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱. اگر X یک مجموعه غیرتهی و $\mathcal{A}$ یک $\sigma-$جبر روی X باشد، زوج $(X, \mathcal{A})$ را یک فضای اندازه‌پذیر گوییم.

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنیم $(X, \mathcal{A})$ یک فضای اندازه‌پذیر و $f : X \to \mathbb{R}^*$ یک تابع حقیقی توسعه یافته باشد. f را تابعی اندازه‌پذیر گوییم هرگاه به ازای هر زیرمجموعه باز E در $\mathbb{R}$، مجموعه $f^{-1}(E)$ در X نسبت به $\mathcal{A}$ اندازه‌پذیر باشد یعنی $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$.

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنیم $0 < p < \infty$ ، در این صورت مجموعه تمام توابع اندازه‌پذیری مانند f که $|f(t)|^p$ انتگرال‌پذیر باشند $\left(\int_X |f(t)|^p dt < \infty\right)$ را فضای $L^p(X)$ گوییم. به عبارت دیگر:

$$L^p(X) = \left\{ f \mid f : X \to C, \int_X |f(t)|^p dt < \infty \right\}.$$

به آسانی می‌توان نشان داد که L^p یک فضای برداری است.

تعریف ۱۳.۱.۱. به ازای هر $p \geqslant 1$ و $f \in L^p$ ،

$$\|f\|_p = \left\{ \int_X |f(t)|^p dt < \infty \right\}^{\frac{1}{p}}$$

و عدد $\|f\|_p$ را L^p- نرم f گوییم. به آسانی می‌توان نشان داد که این تابع در شرایط نرم صدق می‌کند.

تعریف ۱۴.۱.۱. *فرض کنید $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ دنباله‌ای در فضای نرم‌دار X باشد. گوییم سری $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ در X همگرا به x است هرگاه دنباله $S_n = \sum_{i=0}^{n} x_i$ به x همگرا باشد. در این صورت می‌نویسیم $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = x$. همچنین سری $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ را مطلقا همگرا می‌گوییم هرگاه $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|$ همگرا باشد.*

قضیه ۲.۱.۱. *شرط لازم و کافی برای آنکه فضای نرم‌دار X کامل باشد، این است که هر سری مطلقا همگرا در این فضا همگرا باشد.*

قضیه ۳.۱.۱. **(ریز-فیشر[۴])** *فضای L^p ، $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ کامل است.*

در این صورت با توجه به قضایای فوق، L^p به ازای $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ یک فضای نرم‌دار کامل است، بنابراین L^p به ازای $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ یک فضای باناخ است.
در حالت خاص $L^2(X)$ ، یعنی

$$L^2(X) = \left\{ f \mid f \,:\, X \to C, \int_X |f(t)|^2 dt < \infty \right\}.$$

با نرم

$$\|f\|_2 = \left\{ \int_X |f(t)|^2 dt < \infty \right\}^{\frac{1}{2}}$$

یک فضای باناخ است.

تعریف ۱۵.۱.۱. *فرض کنیم V یک فضای خطی روی C یا $K = \mathbb{R}$ باشد. یک تابع ضرب داخلی $\langle .,. \rangle$ ، یک تابع از $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ به $\mathbf{K}$ با خصوصیات زیر می‌باشد:*

- $\forall v \in V, \quad \langle v,v \rangle \geq 0 \quad , \quad \langle v,v \rangle = 0 \Longleftrightarrow v = 0$
- $\forall v,u \in V, \quad \langle u,v \rangle = \overline{\langle v,u \rangle}$
- $\forall v,u,w \in V, \forall \alpha,\beta \in K, \quad \langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u,w \rangle + \beta \langle v,w \rangle$

فضای V به همراه تابع ضرب داخلی $\langle .,. \rangle$ فضای حاصل‌ضرب داخلی نامیده می‌شود. وقتی $K = \mathbb{R}$ ، V را فضای ضرب داخلی حقیقی می‌گوییم، همچنین اگر $K = C$، V یک فضای ضرب مختلط می‌باشد.
در حالت فضای ضرب داخلی حقیقی، ویژگی دوم به تقارن در ضرب داخلی تغییر می‌یابد:

$$\forall\, u,v \in V, \quad \langle u,v \rangle = \langle v,u \rangle$$

[۴] Riesz-Fischer

فضای ضرب داخلی $\langle .,. \rangle$ یک نرم روی V به همراه فرمول زیر نتیجه می‌دهد:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}, \qquad v \in V.$$

و به همین ترتیب یک متر روی V با ضابطه زیر تعریف می‌شود:

$$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle}.$$

قضیه ۴.۱.۱. *(نامساوی کشی-شوارتز [۵]): اگر V یک فضای حاصل‌ضرب داخلی باشد، آن‌گاه:*

$$\forall v, u \in V, \quad |\langle u, v\rangle| \leq \sqrt{\langle u, u\rangle\langle v, v\rangle}$$

اثبات: مرجع [۱۶] را ببینید.

قضیه ۵.۱.۱. *یک تابع ضرب داخلی نسبت به نرم القاء شده توسط آن پیوسته است. به عبارت دیگر، اگر $\|.\|$ یک نرم تعریف شده به صورت $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ باشد، از $\|v_n - v\| \to 0$ و $\|u_n - u\| \to 0$ هرگاه $n \to \infty$ نتیجه می‌گیریم $(u_n, v_n) \to (u, v)$ وقتی $n \to \infty$.*
به ویژه اگر $u_n \to u$، آن‌گاه برای هر v، $(u_n, v) \to (u, v)$ وقتی $n \to \infty$.

تعریف ۱۶.۱.۱. *یک فضای ضرب داخلی کامل را فضای هیلبرت گوییم. با توجه به این تعریف، هر فضای ضرب داخلی که توسط نرم القاء شده به وسیله این ضرب یک فضای باناخ باشد، فضای هیلبرت می‌نامیم.*

مثال ۵.۱.۱. *فضای دکارتی C^d یک فضای هیلبرت با ضرب داخلی زیر است:*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i \overline{y_i}.$$

مثال ۶.۱.۱. *فضای $L^2[a, b]$ یک فضای هیلبرت با ضرب داخلی زیر می‌باشد:*

$$\langle u, v\rangle = \int_a^b u(x)\overline{v(x)}dx.$$

[۵] Cauchy-Schwarz

تعریف ۱.۱.۱۷. *دو بردار غیر صفر u و v را متعامد می‌گوییم اگر و تنها اگر $(u,v) = ۰$. یک عضو $v \in V$ را بر زیر مجموعه $U \subset V$ متعامد گوییم، هرگاه:*

$$\forall\, u \in U, \qquad (u,v) = ۰.$$

تعریف ۱.۱.۱۸. *فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی باشد. گوییم $A = \{v_i\}_{i \geq ۱} \subset V$ یک سیستم متعامد است هرگاه:*

$$\forall v_i, v_j \in A,\ \langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} ۰, & i \neq j. \\ \alpha > ۰, & i = j. \end{cases}$$

نکته ۱.۱.۳. *اگر برای هر $v_i \in A$ داشته باشیم $\|v_i\| = ۱$، مجموعه A را متعامد یکه یا نرمال گوییم.*

تعریف ۱.۱.۱۹. *فرض کنیم V یک فضای حاصل‌ضرب داخلی باشد، $U \subseteq V$ را مکمل متعامد برای V گوییم هرگاه:*

$$U^{\perp} = \{v \in V \mid \langle v, u \rangle = ۰, \forall u \in U\}$$

نکته ۱.۱.۴. *اگر U یک مجموعه مکمل متعامد برای V باشد آن‌گاه یک زیر مجموعه بسته از آن است.*

قضیه ۱.۱.۶. *فرض کنیم $\{v_j\}_{j=۱}^{\infty}$ یک سیستم متعامد در فضای هیلبرت V باشد. آن‌گاه خواهیم داشت:*

(a $\forall v \in V, \sum_{j=۱}^{\infty} |\langle v, v_j \rangle|^۲ \leq \|v\|^۲$ (نامساوی بسل)

(b برای هر $v \in V$ ، سری $\sum_{j=۱}^{\infty} \langle v, v_j \rangle v_j$ در V همگرا است.

(c اگر $v = \sum_{j=۱}^{\infty} a_j v_j$ آن‌گاه $a_j = \langle v, v_j \rangle$.

(d سری $\sum_{j=۱}^{\infty} a_j v_j$ در V همگرا است اگر و تنها اگر $\sum_{j=۱}^{\infty} |a_j|^۲ < \infty$.

اثبات: مرجع [۱۶] را ببینید.

قضیه ۷.۱.۱. *فرض کنیم $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک سیستم متعامد در فضای هیلبرت V باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادل هستند:*

a) $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$ *یک پایه متعامد برای V است.*

b) $\forall u, v \in V, \langle u, v\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle u, v_j\rangle \overline{\langle v, v_j\rangle}$

c) $\forall v \in V,\ \|v\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle u, v_j\rangle|^2$ (**اتحاد پارسوال**).

d) *برای هر* $v \in V$ ، *اگر* $j \geq 1$ ، $\langle v, v_j\rangle = 0$ *آن‌گاه:* $v = 0$.

e) *یک زیر فضای پوششی* $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$ **چگال** *در V است.*

اثبات: مرجع [۱۶] را ببینید.

تعریف ۲۰.۱.۱. *تابع ω را بر $[a, b]$ یک تابع وزن گوییم هرگاه:*

۱. ω *بر* (a, b) *نامنفی باشد.*

۲. ω *بر* $[a, b]$ *انتگرال‌پذیر باشد.*

۳. ω *بر هیچ بازه غیربدیهی* (a, b) *متحد با صفر نباشد.*

تعریف ۲۱.۱.۱. *ضرب داخلی نسبت به تابع وزن ω را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$\langle x, y\rangle = \int_a^b \omega(t)x(t)\overline{y(t)}dt; \quad x(t), y(t) \in L^2[a, b].$$

۲.۱ نرم های برداری و ماتریسی

تعریف ۱.۲.۱. *روی فضای $\mathbb{R}^n$ برای $1 \leq p < \infty$ ، خانواده‌ای از نرم‌ها موسوم به نرم‌های هولدر [۶] یا $p-$نرم‌ها به صورت زیر تعریف می‌گردد.*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

[۶] Holder

نکته ۱.۲.۱. *حالت خاصی از نرم‌های هولدر که بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد به ازای* $p=1$ *و* $p=2$ *حاصل می‌گردد که عبارتند از:*

- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ (نرم l_1 یا نرم مجموع)
- $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ (نرم l_2 یا نرم اقلیدسی)

همچنین روی $\mathbb{R}^n$ می‌توان نرمی به صورت زیر، موسوم به نرم ماکزیمم یا بی‌نهایت، تعریف نمود:

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|.$$

تعریف ۲.۲.۱. *فرض کنیم* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$*، آن‌گاه:*

- $\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$ (نرم ماکزیمم سطر از ماتریس A)
- $\|x\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$ (نرم ماکزیمم ستون از ماتریس A)
- $\|x\|_2 = \sqrt{\rho\left(A^T A\right)}$ (نرم ماکزیمم مقدار ویژه از ماتریس $A^T A$)

تعریف ۳.۲.۱. *عدد وضعیت یک ماتریس، میزان حساسیت یک سیستم مستقل خطی را اندازه می‌گیرد. این عدد نشان‌گر صحت نتایج حاصل از ماتریس معکوس و حل معادلات خطی است. در دستگاه معادلات خطی* $Ax = y$ *عدد وضعیت سیستم در* $p-$ *نرم را با* $cond(A,p)$ *نشان می‌دهیم و با رابطه زیر محاسبه می‌شود:*

$$cond(A,p) = \|A\|_p \|A^{-1}\|_p.$$

در صورتی که $cond(A,p)$ *عددی نزدیک به یک باشد، نشان‌دهنده خوش‌حالت بودن ماتریس* A *می باشد.*