بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی

(گرایش محض)

عنوان :

گراف مقسوم علیه های صفر حلقه جابجایی

از:

صغری کریمی

استاد راهنما:

دکتر حبیب الله انصاری طرقی

شهریور ۱۳۹۲

تقدیم به:

روح پاک مادرم، دریای بی کران فداکاری و عشق که وجودم برایش همه رنج بود و وجودش برایم همه مهر
و به پدرم که عالمانه به من آموخت تا چگونه در عرصه زندگی، ایستادگی را تجربه نمایم
و به همسرم، اسطوره زندگیم، پناه خستگیم و امید بودنم
و به گلهای زندگیم ایلیا و آوا .

تقدیر و تشکر...

نمی توانم معنایی بالاتر از تقدیر و تشکر بر زبانم جاری سازم و سپاس خود را در وصف استادان خویش آشکار نمایم، که هر چه گویم و سرایم ، کم گفته ام.

از استاد گرامیم جناب آقای دکترحبیب الله انصاری طرقی بسیار سپاسگذارم چرا که بدون راهنماییهای ایشان تامین این پایان نامه بسیار مشکل مینمود.

از استادان فرزانه و دلسوز ، دکتر شهاب الدین ابراهیمی آتانی و دکتر احمد عباسی که زحمت داوری این پایان نامه را متقبل شدند کمال تشکر و قدر دانی را دارم .

از همسرم که سایه مهربانیش سایه سار زندگیم می باشد، او که اسوه صبر و تحمل بوده و مشکلات مسیر را برایم تسهیل نمود.

باشد که این خردترین بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

فهرست مطالب

چکیده:

گراف مقسوم علیه های صفر حلقه جابجایی

صغری کریمی

در این پایان نامه، هدف اصلی بررسی و مطالعه رأس‌های برشی گراف‌های مقسوم علیه صفر حلقه‌های موضعی و غیر موضعی متناهی است. همچنین ما به بررسی رأس‌های برشی گراف‌های مرتبط با حلقه گالوا می‌پردازیم. در نهایت رأس‌های برشی و مجموعه‌های برشی حلقه $\prod(\mathbb{Z}_{n_i})$ را با جزئیات بیشتر مورد مطالعه قرار می‌دهیم. مطالب این پایان‌نامه برگرفته از [۱۱] و [۹]می‌باشد .

کلید واژه:

حلقه جابجایی، حلقه موضعی متناهی ، رأس برشی، مجموعه برشی، گراف مقسوم علیه صفر، حلقه گالوا .

Abstract:

Zero- Divisor Graphs of Commutative Ring
Soghra Karimi

In this thesis , the main goal is to study cut vertices of graphs of local and nonlocal finite rings . Also we study cut vertices which is dependent of graphs of Galois rings. Finally we study the cut vertices and cut sets of graphs of rings $\prod(\mathbb{Z}_{n_i})$. The contents of this thesis are axtracted from [11] and [9].

Key words:
commutative ring , finite local ring , cut vertice , cut set , zero - divisor graph , Galois ring .

پیشگفتار:

جبر جابجایی یکی از مهم‌ترین گرایش‌های جبر است که به بررسی خواص حلقه‌های جابجایی بعنوان یک ساختار مهم جبری می‌پردازد . علاوه بر قضیه‌های بنیادی زیادی که در این زمینه وجود دارند، قضیه‌هایی نیز وجود دارند که حلقه‌ها را با توجه به خواص عناصر آنها بررسی می کنند. به طور مثال ، مقسوم علیه‌های صفر، پوچتوان ها و وارون‌پذیر ها از این جمله اند. ما در این پایان نامه، به بررسی خواص حلقه‌ها با توجه به مقسوم علیه‌های صفر آنها می‌پردازیم . برای اولین بار در سال ۱۹۹۸ ، $Beck$ از دانشکده ریاضیات و علوم کامپیوتر دانشگاه حیفا ، مفهوم گراف مقسوم علیه‌های صفر را برای یک حلقه جابجایی، بیان کرد . او تمام اعضای یک حلقه جابجایی و یکدار مانند R را رئوس گراف R در نظر می گرفت[۷] . او دو رأس x,y، را مجاور در نظر می گرفت اگر وتنها اگر $xy=0$.در حقیقت کار اساسی $Beck$ ، پیدا کردن شروط لازم و کافی برای متناهی بودن عدد رنگی [۱] گراف R بود. او حدس زد که عدد رنگی و عدد خوشه ای[۲] گراف R با هم برابرند و نتوانست این حدس را رد یا اثبات کند. گرافی که او تعریف کرد، گراف مناسبی نبود و خواص بدیهی زیادی داشت، از جمله همه رئوس با رأس صفر مجاور بودند. $Anderson$ و $Livingston$ ، گراف جدیدی برای حلقه R تعریف کردند. $Anderson$ به هر حلقه جابجایی مانند R ، گراف $\Gamma(R)$ را نظیر می کرد که به این صورت تعریف می‌شود : مجموعه رئوس $\Gamma(R)$ ، مجموعه مقسوم علیه‌های صفر غیر صفر حلقه R است و دو رأس x و y با هم مجاورند اگر و تنها اگر $xy=0$. بدیهی است گراف $Anderson$ زیر گرافی از گراف $Beck$ است.

این پایان نامه بر اساس [۱۱] و [۹] است و شامل ۵ فصل می‌باشد. در فصل اول به تعاریف و قضایای مقدماتی می‌پردازیم که در فصل‌های بعدی موردنیاز است. فصل دوم شامل دو بخش است که در بخش اول رأس برشی گراف مقسوم علیه صفر یک حلقه را تعریف و قضایای مقدماتی آنرا بیان می کنیم و در بخش دوم رأس برشی گراف مقسوم علیه صفر یک حلقه نوتری را بررسی می کنیم. در فصل سوم به بیان نتایج مربوط به رأس برشی گراف مقسوم علیه صفر حلقه متناهی غیر موضعی می‌پردازیم. فصل چهارم، شامل دو بخش است . در بخش اول نتایج مربوط به رأس‌های برشی گراف مقسوم علیه صفر حلقه موضعی متناهی را بیان می کنیم ، در بخش دوم ابتدا به بیان اجمالی تعاریف و قضایای حلقه های گالوا می‌پردازیم، سپس رأس‌های برشی حلقه‌هایی که در ارتباط با حلقه گالوا هستند را مورد بررسی قرار می‌دهیم. فصل پنجم، شامل سه بخش است . در بخش اول، به

[۱] chromatic number
[۲] clique number

تعریف مجموعه برشی می‌پردازیم و مثالهایی از آنرا بیان می کنیم . در بخش دوم ،قضایای مربوط به رأس برشی حلقه متناهی $\prod(\mathbb{Z}_{n_i})$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم . در بخش سوم ،نتایج و قضایای مجموعه های برشی حلقه $\prod(\mathbb{Z}_{n_i})$ را بیان می کنیم .

لازم به ذکر است که در این پایان نامه همه تعریف‌ها، لم‌ها، قضایا، ملاحظه‌ها و نتایج، شماره متوالی دارند. بعنوان مثال، در بخش اول از فصل دوم، چهارمین عنوان دارای شماره ۲-۱-۴ می‌باشد.

فصل ۱

پیش نیاز

۱ - ۱ مفاهیم مربوط به حلقه جابجایی

در این بخش تعاریف و قضیه های مورد نیاز از نظریه حلقه‌های جابجایی ارائه می‌شود. در سراسر این پایان نامه فرض می کنیم R یک حلقه جابجایی یکدار باشد بطوریکه $1_R \neq 0$.

تعریف ۱ - ۱ - ۱. فرض کنید $a \in R$، در اینصورت مجموعه $(a) = \{ar|r \in R\}$ ایده‌آل R است ، و ایده‌آل اصلی تولید شده توسط a نامیده می‌شود .

تعریف ۱ - ۱ - ۲. یک مقسوم علیه صفر R عضوی چون $x \in R$ است که به ازای آن، عضو ناصفر چون $y \in R$ موجود باشد که $xy = 0$. مجموعه مقسوم علیه‌های صفر R ، با $Z(R)$ نمایش داده می‌شود .

تعریف ۱ - ۱ -۳. $x \in R$ را پوچتوان گویند هرگاه به ازای عدد صحیح مثبت $n \geq 1$ ، $x^n = 0$. اگر n کوچکترین عدد صحیح مثبتی باشد ، بطوریکه $x^n = 0$ ($ann(x)$) همچنین گفته می‌شود که درجه پوچتوانی x ، n است. مجموعه همه اعضای پوچتوان حلقه R را با $Nil(R)$ نشان می دهند که به وضوح یک ایده‌آل R است.

تعریف ۱ - ۱ -۴. ایده‌آل I از حلقه R را ایده‌آل پوچتوان گوییم اگر $t \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد که $I^t = 0$.

تعریف ۱ - ۱ -۵. رادیکال جیکبسن حلقه R را اشتراک همه ایده‌آل‌های ماکسیمال R تعریف می کنند و آن را با $Jac(R)$ نشان می‌دهند .

تعریف ۱ - ۱ -۶. فرض کنید I و J ایده‌آلهای حلقه تعویض‌پذیر R باشند. خارج قسمت $(I : J)$ به صورت $(I : J) = \{a \in R|aJ \subseteq I\}$تعریف می‌شود . واضح است که $(I : J)$ یک ایده‌آل حلقه R است . در حالت خاص اگر $I = 0$ ،آنگاه $(0 : J) = \{a \in R|aJ = 0\} = \{a \in R|ab = 0 \;\; ; \;\; \forall b \in J\}$ پوچساز J نامیده می‌شود و با $Ann_R(J)$ یا $Ann(J)$ نمایش داده می‌شود . به ازای $d \in R$ ، به جای $(I : \{d\})$ به اختصار می‌نویسیم $(I : d)$ وبه همین نحو $(0 : \{d\})$ را به اختصار $(0 : d)$ نمایش می‌دهیم .

تعریف ۱ - ۱ -۷. پوچساز a را بطور سره ماکسیمال گویند اگر $b \in R^* \setminus \{a\}$ ، آنگاه $ann(a) \nsubseteq ann(b)$.

تعریف ۱ - ۱ -۸. عضو ناصفر x از حلقه R را یکه گویند ، هرگاه عضو ناصفر $y \in R$ موجود باشد بطوریکه $xy = 1$. مجموعه تمام عناصر یکه R را با $U(R)$ نشان می‌دهند که تحت عمل ضرب حلقه R ، یک گروه آبلی است.

تعریف ۱ - ۱ -۹. فرض کنید $Z(R)$ مجموعه همه مقسوم علیه های صفر حلقه R باشد. گراف مقسوم علیه صفر حلقه R در واقع آن گرافی است که $Z(R)^* = Z(R) \setminus \{0\}$ مجموعه رئوس گراف بوده و رأس x و y توسط یک یال به هم وصل می‌شوند اگر وفقط اگر $xy = 0$.

تعریف ۱-۱-۱۰. حلقه R را شبه موضعی گویند هرگاه تنها یک ایده‌آل ماکسیمال داشته باشد و حلقه R را موضعی گویند هرگاه شبه موضعی و نوتری باشد .

تعریف ۱-۱-۱۱. فرض کنیدI یک ایده‌آل حلقه R باشد. رادیکال ایده آل I را با $\sqrt{I}$ نشان می‌دهند و عبارت است از :

$$\sqrt{I} = \{a \in R | a^n \in I \ \ , \ \ \exists n \geq ۱\}$$

لم ۱-۱-۱۲. فرض کنید که R یک حلقه جابجایی آرتینی باشد. در اینصورت هر ایده‌آل اول R ماکسیمال است.

برهان. به گزاره۱-۸ ،از [۴] ص ۸۹ مراجعه شود . $\square$

نتیجه ۱-۱-۱۳. در یک حلقه آرتینی $Nil(R)$ با $Jac(R)$ برابر است.([۴] نتیجه۲-۸)

برهان. یادآوری می کنیم که به ازای هر ایده‌آل I از حلقه R ، $\sqrt{I} = \bigcap P_{P \in spec(R), I \subseteq P}$ پس

$$Nil(R) = \bigcap P_{P \in max(R)} = Jac(R).$$

$\square$

گزاره ۱-۱-۱۴. در یک حلقه آرتینی، $Nil(R)$ پوچتوان است.

برهان. به گزاره ۸-۴ ،از [۴]، صفحه ۸۹ مراجعه شود. $\square$

تعریف ۱-۱-۱۵. اگر کوچکترین عدد صحیح مثبت مانند n وجود داشته باشد بطوریکه برای هر $a \in R$ ، $na = ۰$ ، آنگاه گوییم R دارای مشخصه n است. $(charR = n)$ اگر این n موجود نباشد ، گوییم R دارای مشخصه صفر است. $(charR = ۰)$

تعریف ۱-۱-۱۶. فرض کنیم G یک گروه بوده و $a \in G$. مرتبه a مرتبه زیر گروه دوری $< a >$است و با $|a|$ نمایش داده می‌شود.([۱]ص ۵۴)

قضیه ۱-۱-۱۷. فرض کنیم G یک گروه بوده و $a \in G$. هرگاه a مرتبه نامتناهی داشته باشد آنگاه

۱. $a^k = e$ اگر و فقط اگر $k = ۰$ ؛

۲. عناصر a^k $(k \in \mathbb{Z})$ همه متمایزند.

هرگاه a مرتبه متناهی $m > ۰$ داشته باشد ، آنگاه

۳. m کوچکترین عدد صحیح مثبتی است که $a^m = e$ ؛

۴. $a^k = e$ اگر و فقط اگر $m \mid k$ ؛

۵. $a^r = a^s$ اگر وفقط اگر $r \equiv s(mod m)$ ؛

۶. $< a >$ مرکب از عناصر متمایز $a, a^2, ..., a^{m-1}, a^m = e$ است ؛

۷. به ازای هر k که $k \mid m$ ، داریم $\mid a^k \mid = \frac{m}{k}$.

برهان. به [۱] ، صفحه ۵۴ مراجعه شود. □

تعریف ۱-۱-۱۸. یک گروه که در آن هر عنصر مرتبه‌اش توانی از عدد اول ثابتی مانند p است یک $p-$ گروه نامیده می‌شود.

نتیجه ۱-۱-۱۹. گروه متناهی G یک $p-$ گروه است اگر وفقط اگر $|G|$ توانی از p باشد. [۱]

برهان. به نتیجه۵-۳ فصل ۲، صفحه ۱۴۶مراجعه شود. □

تعریف ۱-۱-۲۰. ایده‌آل q در یک حلقه R اولیه است اگروفقط اگر $\frac{R}{q} \neq 0$ و هر مقسوم علیه صفر در $\frac{R}{q}$ پوچتوان است. ([۴] ص ۵۰)

گزاره ۱-۱-۲۱. فرض کنید q یک ایده‌ال اولیه در حلقه R باشد، دراینصورت $\sqrt{q}$ کوچکترین ایده‌آل اول شامل q است . اگر $p = \sqrt{q}$، آنگاه گوییم q یک ایده‌آل $p-$اولیه است. ([۴] ص ۵۰)

تعریف ۱-۱-۲۲. فرض کنید I یک ایده‌آل سره از حلقه R باشد. گوییم I دارای یک تجزیه اولیه است اگر ایده‌آلهای اولیه $q_1, q_2, ..., q_n$ از R چنان موجود باشند که $I = q_1 \cap q_2 \cap ... \cap q_n$.

تعریف ۱-۱-۲۳. فرض کنید I یک ایده‌آل از حلقه R باشد . تجزیه $I = q_1 \cap q_2 \cap ... \cap q_n$ را یک تجزیه اولیه مینیمال گوییم اگر

۱. $q_1 \cap q_2 \cap ... \cap q_n \nsubseteq q_1 \cap ... \cap q_{i-1} \cap q_{i+1} \cap ... \cap q_n \quad ; \quad \forall 1 \leq i$

۲. ایده‌آل‌های اول $\sqrt{q_1} = p_1 \;,\; ... \;,\; \sqrt{q_n} = p_n$ همگی دوبدو متمایز باشند.

قضیه ۱-۱-۲۴. در یک حلقه نوتریR هر ایده‌آل یک تجزیه اولیه دارد. ([۴] ص۸۳)

گزاره ۱-۱-۲۵. فرض کنید q یک ایده‌آل تجزیه پذیر باشد و $q=\bigcap_{i=1}^{n} q_i$ یک تجزیه اولیه مینیمال باشد و $\sqrt{q_i}=p_i$. آنگاه

$$\bigcup_{i=1}^{n} p_i=\{x\in R|(q:x)\neq q\}$$

بعلاوه اگر ایده‌آل صفر تجزیه پذیر باشد ، مجموعه $Z(R)$ از مقسوم علیه صفر R اجتماعی از ایده‌آل‌های اول وابسته به (۰) است.([۴] ص۵۳)

گزاره ۱-۱-۲۶. فرض کنید $q\neq(1)$ یک ایده‌آل در یک حلقه نوتری باشد. ایده‌آل‌های اول وابسته به q دقیقاً برابر با مجموعه ایده‌آل‌های اول مانند p ، که $(q:x)=p$ ، به ازای $x\in A$ هستند. [۴]

برهان. به گزاره ۷- ۱۷ ، صفحه ۸۳ مراجعه شود . □

تبصره ۱-۱-۲۷. اگر I یک ایده‌آل R باشد I یک $R-$ مدول خواهد شد و همچنین $\frac{I}{J}$ که J ایده‌آلی از R است و $J\subseteq I$ می‌باشد یک $R-$ مدول است . [۱۴]

برهان. به مثال ۳-۶ صفحه ۱۰۳ مراجعه شود. □

تبصره ۱-۱-۲۸. فرض کنید K یک $R-$ مدول باشد و I یک ایده‌آل R باشد. اگر $I\subseteq Ann(K)$، آنگاه K یک $\frac{R}{I}-$مدول است.([۱۴] ص۱۰۷)

لم ۱-۱-۲۹. R شبه موضعی است اگر و فقط اگر مجموعه عضوهای وارون ناپذیر R ایده‌آل R باشد. [۱۴]

برهان. به لم ۱۳-۳ ، صفحه ۴۱ مراجعه شود. □

قضیه ۱-۱-۳۰. یک حلقه آرتینی R به طور یکتا با حاصلضرب مستقیم تعداد متناهی حلقه موضعی آرتینی یکریخت است. [۴]

برهان. به قضیه ۸-۷ ، صفحه ۹۰ مراجعه شود. □

لم ۱-۱-۳۱. فرض کنیم I ایده‌آل حلقه R باشد. I ماکسیمال است اگر و فقط اگر $\frac{R}{I}$ میدان باشد . [۱۴]

برهان. به لم ۳-۳ ، صفحه ۳۸ مراجعه شود. □

قضیه ۱-۱-۳۲. ***(اجتناب از ایده آل اول)*** فرض کنید $P_1,P_2,...,P_n$ که $n\geq 2$ ایده‌آل هایی از حلقه تعویضپذیر R باشند و حداکثر دو تای از آنها اول نباشند. فرض کنید S زیر گروهی جمعی R باشد که نسبت به ضرب بسته است . فرض کنید $S\subseteq\bigcup_{i=1}^{n} P_i$ در اینصورت به ازای j ای که $1\leq j\leq n$ ، $S\subseteq P_j$.
([۱۴]ص ۵۴)

۱-۲ مفاهیم مربوط به نظریه گراف

تعریف ۱-۲-۱. گراف G بنا بر تعریف ، برابر زوج (V,E) است که V مجموعه‌ای شامل تعداد دلخواهی عضو و مجموعه E شامل تعداد دلخواهی از زیر مجموعه‌های دو عضوی مجموعه V است. مجموعه V را رئوس G و مجموعه E را یالهای گراف G می نامند. به طور شهودی می‌توان گفت گرافG را با تعدادی نقطه در صفحه که در تناظر یک به یک با اعضای V(رأس‌ها) هستند ، نشان داد . برای ترسیم یالها اگر $\{x,y\} \in E$ که x,y دو رأس گراف هستند، باشد؛ کافی است پاره خطی بین دونقطه x و y رسم نمود .

در سراسر این پایان نامه فرض می کنیم G یک گراف با مجموعه رأس‌های $V(G)$ و مجموعه یال‌های $E(G)$ باشد .

تعریف ۱-۲-۲. گراف ساده گرافی است که بین هر دو رأس آن حداکثر یک یال وجود داشته باشد و فاقد طوق باشد.

تعریف ۱-۲-۳. دو رأس v و w از گراف G را مجاور گویند ، هرگاه یک یال بین آن دو وجود داشته باشد. (یعنی یک یال بصورت v —— wوجود داشته باشد.) در اینصورت می گویند که رئوس v و w برآن یال واقع هستند. به همین ترتیب دو یال متمایز از G را مجاور گویند ، هرگاه حداقل یک رأس مشترک داشته باشند .

تعریف ۱-۲-۴. یک گراف ساده که هر دو رأس متمایز آن مجاور باشند ، یک گراف کامل گویند . یک گراف کامل با n رأس را بصورت K_n نمایش می‌دهند.

تعریف ۱-۲-۵. گرافی که بتوان مجموعه رئوس آن را به دو زیر مجموعه X و Y چنان افراز کرد که یک سر تمام یالهای آن در X و یک سر دیگر آن در Y باشد ، گراف دو بخشی نامیده می‌شود .

تعریف ۱-۲-۶. گراف دو بخشی G ، با بخشهای X و Y ، که $|X| = ۱$ گراف ستاره‌ای نامیده می‌شود و $x \in X$ مرکز گراف ستاره‌ای نامیده می‌شود .

تعریف ۱-۲-۷. مسیر[۱] بین دو رأس متمایز و ناصفر $x_n \ , \ x_۰$ را بصورت یک دنباله ناصفر و متناهی $x_۰$ —— $x_۱ \ \dots \ x_i$ —— $x_{i+۱} \ \dots \ x_n$ از رأس های متمایز G نشان می‌دهند بطوریکه به ازای هر عدد صحیح $۰ \leq i \leq n-۱$، رأس‌های $x_i \ , \ x_{i+۱}$ مجاورند .

تعریف ۱-۲-۸. یک گراف که بین هر دو رأس آن مسیری وجود داشته باشد را یک گراف همبند گوییم .[۸]

[۱] path

تعریف ۱-۲-۹. یک دور[۱] در گراف G عبارت است از مسیر بین دو رأس ناصفر و متمایز $x_\circ \ , \ \ x_n \in G$ بطوریکه این مسیر حداقل از سه رأس متمایز و ناصفر تشکیل شده باشد و $x_\circ$ و x_n نیز مجاور باشند .

تعریف ۱-۲-۱۰. یک زیر گراف از گراف G ، خود یک گراف است، که هر رأس آن به $V(G)$ تعلق دارد و هر یال آن عضو $E(G)$ است .

تعریف ۱-۲-۱۱. رأس a از گراف G را یک رأس برشی[۲] گوییم هرگاه حذف آن و یالهای مربوطه اش ، گراف G را به دست کم دو زیر گراف X و Y مجزا کند.

تعریف ۱-۲-۱۲. رأس ایزوله[۳] در گراف G رأسی است که با هیچ رأس دیگری مجاور نباشد .

تعریف ۱-۲-۱۳. یک مجموعه $A \subseteq Z(R)^*$ ، که در آن $Z(R)^*$ مجموعه مقسوم علیه های ناصفر R است، یک مجموعه برشی[۴] گفته می شود در صورتیکه $c \ , \ d \in Z(R)^* \setminus A$ ، که $c \neq d$ ، وجود داشته باشد بطوریکه هر مسیر از c به d در $\Gamma(R)$ ، حداقل از یک عضو A عبور کند و هیچ زیر مجموعه سره A چنین خاصیتی نداشته باشد. در واقع A کوچکترین مجموعه با این خاصیت باشد.

تعریف ۱-۲-۱۴. فرض کنید A یک مجموعه برشی گراف $\Gamma(R)$ باشد ، یک رأس $a \notin A$ و ناصفر را ایزوله یا تنها در مجموعه A گویند هرگاه $ann(a) \setminus \{\circ\} \subseteq A$.

تبصره ۱-۲-۱۵. اگر $n = p^۲$ ، آنگاه $\mathbb{Z}_n$ یک گراف کامل است .

برهان. چون $\mathbb{Z}_n$ متناهی است پس هر عضو یا مقسوم علیه صفر است یا واحد. هر واحد نسبت به n اول است پس ب.م.م هر مقسوم علیه صفر و n مخالف ۱است که آن ب.م.م یکی از عوامل اول n است که مقسوم علیه صفر می‌شود. پس مجموعه مقسوم علیه های صفر $\mathbb{Z}_n$ عضوهایی هستند که یکی از عوامل اول n را داشته باشند. در $\mathbb{Z}_{p^۲}$ هر مقسوم علیه صفر یک عامل p را دارد. پس ضرب هردو مقسوم علیه صفر ، صفر می‌شود. لذا همه رأس‌ها با هم مجاور می‌شوند. □

تبصره ۱-۲-۱۶. اگر $n = ۲p$ که $p > ۲$ ، آنگاه $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$ یک گراف ستاره ای با مرکز p می‌باشد.

برهان. در $\mathbb{Z}_{۲p}$ هر مقسوم علیه صفر یا عامل p دارد یا ۲. تنها مقسوم علیه صفری که عامل p دارد خود p است چون غیر از p هر عضو دیگری که عامل p داشته باشد بزرگتر مساوی $۲p$ می‌شود. بقیه رأسها مضارب ۲ هستند. بنابراین یک گراف ستاره ای با مرکز p می‌شود که p با همه مضارب ۲، که کمتر مساوی $۲p$ هستند مجاور می‌باشد. □

---

[۱] cycle
[۲] cut vertex
[۳] isolated vertex
[۴] cut set

فصل ۲

گراف مقسوم علیه صفر یک حلقه جابجایی

در سال ۲۰۰۹ ، $M.Axtell$ و $J.Stickles$ و $W.Trampbachls$ به همراه یک تیم تحقیقاتی [۶]،مفهوم رأسهای برشی گراف مقسوم علیه صفر یک حلقه جابجایی را تعریف کردند. هدف آنها دریافتن خواص جبری یک حلقه جابجایی با استفاده از ابزار رأسهای برشی معرفی شده بود.

فرض کنید که G یک گراف و $V(G)$ و $E(G)$ به ترتیب مجموعه رأسها و یالهای گراف G می‌باشند.

۲-۱ رأس برشی در گراف مقسوم علیه صفر یک حلقه

تعریف ۲-۱-۱. گوییم گراف G ،توسط رأس a ، به دو زیر گراف Xو Y مجزا تجزیه می‌شود اگر :

۱. $|V(X)| \ , \ |V(Y)| \geq ۲$;

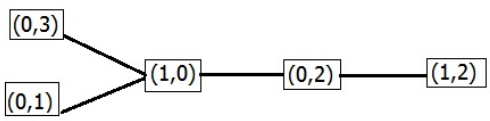
۲. $X \cup Y = G$;

۳. $V(X) \cap V(Y) = \{a\}$;

۴. اگر $x \in V(X)\backslash\{a\}$ و $y \in V(Y)\backslash\{a\}$ ، آنگاه x و y مجاور نیستند.

تعریف ۲-۱-۲. رأس a از گراف G را یک رأس برشی گوییم هرگاه حذف آن و یالهای مربوطه اش ، گراف G را به دست کم دو زیر گراف X و Y مجزا تجزیه کند . رأس a در تعریف ۲ − ۱ − ۱ ، یک رأس برشی است.

مثال ۲-۱-۳. حلقه $R = \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۴$ را در نظر بگیرید. رأس $(۱,۰)$ از گراف مقسوم علیه صفر این حلقه ، یک رأس برشی است .



قضیه ۲-۱-۴. اگر $\Gamma(R)$ توسط رأس برشی a ، به دو زیر گراف X و Y تجزیه شود، آنگاه $\{۰, a\}$ یک ایده‌آل R است.

برهان. از آنجائیکه a یک مقسوم علیه صفر R است ، لذا $a + a \in Z(R)$. از طرفی چون a ناصفر است، $a \neq a + a$. اکنون فرض کنید $a + a$ یک عضو ناصفر R باشد . بدون از دست دادن کلیت فرض کنید که $a + a \in V(X)\backslash\{a\}$ ، میدانیم که زیر گراف گراف حلقه جابجایی همبند است. چون Y یک زیر گراف همبند $\Gamma(R)$ است، دراینصورت $b \in V(Y)\backslash\{a\}$ وجود دارد بطوریکه $ab = ۰$. بنابراین $b(a + a) = ۰$ که

بنا بر تعریف (۴)۲ − ۱ − ۱ ، یک تناقض است. $a + a$ به ناچار عضو صفر R است. حال فرض کنید $r \in R$. واضح است که ra یک مقسوم علیه صفر است. فرض کنید $ra \notin \{۰, a\}$. به طور مشابه با بحث فوق فرض کنید $ra \in V(X)\backslash\{a\}$ و $b \in V(Y)\backslash\{a\}$ موجود باشد بطوریکه $ab = ۰$. دراینصورت $b(ra) = ۰$ که متناقض با تعریف (۴)۲ − ۱ − ۱ است. لذا $ra \in \{۰, a\}$ و در نتیجه اثبات تمام است. □

تبصره ۲-۱-۵. در فصل۴ ، مثال۴-۱-۶ ، می‌بینیم که عکس قضیه فوق برقرار نیست.

قضیه ۲-۱-۶. اگر a یک رأس برشی $\Gamma(R)$ باشد، آنگاه $r + s \in Z(R)$ ، که $r, s \notin Z(R)$.

برهان. فرض کنید $r \notin Z(R)$، در اینصورت $ra = a$. زیرا بنا بر قضیه ۲-۱-۴ ، $\{۰, a\}$ ایده آل R است . اگر $s \notin Z(R)$ ، آنگاه $-s \notin Z(R)$. لذا $-sa = a$. در نتیجه $ra = -sa$. پس $(r + s)a = ۰$ و چون a نا صفر است ، بنابراین $r + s \in Z(R)$. □

تبصره ۲-۱-۷. عکس قضیه بالا لزوماًبرقرار نیست. بطور مثال در $\Gamma(\mathbb{Z}_۴)$ ، برای هر r, s که مقسوم علیه صفر نیست، $r + s \in Z(R)$. ولی $\Gamma(\mathbb{Z}_۴)$ رأس برشی ندارد.

$$Z(\mathbb{Z}_۴) = \{\bar{۰}, \bar{۲}\}$$

$$\mathbb{Z}_۴ \setminus Z(\mathbb{Z}_۴) = \{\bar{۱}, \bar{۳}\}$$

واضح است که $\bar{۳} + \bar{۱} \in Z(\mathbb{Z}_۴)$ ولی $\Gamma(\mathbb{Z}_۴)$ رأس برشی ندارد. می‌توانید مثال ۴-۱-۶ ، از فصل ۴ را نیز ببینید.

قضیه ۲-۱-۸. فرض کنید $\Gamma(R)$ به دو زیر گراف X و Y توسط رأس برشی a ، تجزیه شود و $|V(X)| \geq ۳$. اگر X یک زیر گراف کامل $\Gamma(R)$ باشد، آنگاه برای هر $b \in V(X)$ ، داریم $b^۲ = ۰$. ([۶]قضیه ۳-۴)

برهان. فرض کنید $b \in V(X)\backslash\{a\}$. نشان می‌دهیم که $b^۲ = ۰$. اگر $b^۲ = b$ ، آنگاه $b(b - ۱) = ۰$. بنابراین $b - ۱$ یک مقسوم علیه صفر است. حال بنابر تعریف (۴)۲ − ۱ − ۱ ، $b - ۱ \in V(X)$. چون $|V(X)| \geq ۳$ است می‌توانیم $c \in V(X)\backslash\{a, b\}$ را اختیار کنیم. اگر $c = b - ۱$، از آنجائیکه X یک زیر گراف کامل است، آنگاه $ac = ۰$.

$$۰ = ac = a(b - ۱) = ab - a = -a$$

که تناقض است. بنابراین $c \neq b - ۱$. ازکامل بودن زیر گراف X داریم $c(b - ۱) = cb - c = -c = ۰$، که باز تناقض است. بنابراین $b^۲ \neq b$. از آنجائیکه $cb = ۰$ ، لذا $cb^۲ = ۰$. بنابراین از تعریف (۴)۲ − ۱ − ۱، $b^۲ \in V(X) \cup \{۰\}$. بازهم از کامل بودن زیر گراف X، $bb^۲ = ۰$. همچنین

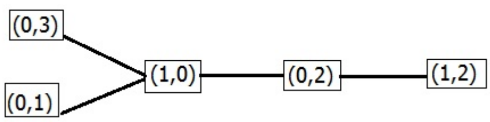
$$c\left(b^۲ + b\right) = cb^۲ + cb = ۰$$

از تعریف ۲(۴)–۱–۱ ، $b^۲ + b \in V(X) \cup \{۰\}$. از کامل بودن زیر گراف X داریم $b^۲ = b(b^۲ + b) = ۰$.
بنابراین برای هر عضو $b \in V(X) \setminus \{a\}$ ، داریم $b^۲ = ۰$. کافی است نشان دهیم که $a^۲ = ۰$.

$$c(a + b) = ca + cb = ۰$$

بنا برتعریف۲(۴)–۱–۱ ، $a + b \in V(X) \cup \{۰\}$. ازآنجائیکه b ناصفر است، داریم $a + b \neq a$. از کامل بودن X نتیجه می‌شود $۰ = a(a + b) = a^۲$. □

مثال۲-۱-۹. شرط $|V(X)| > ۲$ در قضیه قبل ، لازم است . به طور مثال حلقه $R = \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۴$ را در نظر بگیرید.



با در نظر گرفتن $V(X) = \{(۰,۲), (۱,۲)\}$ و $V(Y) = \{(۰,۲), (۱,۰), (۰,۱), (۰,۳)\}$ و $a = (۰,۲)$ و $b = (۱,۲)$ می‌بینیم که X کامل است، اما $|V(X)| = ۲$ ملاحظه می کنید که

$$V(X) \setminus \{a, b\} = \emptyset$$

و

$$b^۲ = (۱,۰) \in V(Y)$$

نتیجه۲-۱-۱۰. فرض کنید $\Gamma(R)$توسط رأس برشی a به دو زیر گراف Xو Y تجزیه می‌شود و $|V(X)| > ۲$ است. اگر X یک زیر گراف کامل باشد، آنگاه $V(X) \cup \{۰\}$ یک ایده آل است .

برهان. فرض کنید $b \in V(X) \setminus \{a\}$. از آنجائیکه X کامل است و از قضیه قبل، مربع هر عضو از $V(X)$، صفر است، لذا برای هر $x, y \in V(X) \cup \{۰\}$، داریم

$$bx = by = ۰$$

بنابراین $b(x + y) = ۰$. از تعریف ۲(۴)–۱–۱ ،

$$x + y \in V(X) \cup \{۰\}$$

بطور مشابه برای هر $r \in R$ ، از آنجائیکه $bx = ۰$ ، داریم $b(rx) = ۰$. لذا $rx \in V(X) \cup \{۰\}$. □