بسم الله الرحمن الرحيم

به نام خدا

دانشکده فیزیک

۲۰ /۱۰/ ۱۳۸۱

حل عددی معادله برگرز یک بعدی با نیروی تصادفی

سید سعید موسوی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

در رشته

فیزیک- اتمی مولکولی

استاد راهنما : دکتر محمد رضا رحیمی تبار

شهریور ماه ۱۳۸۱

تقدیم به دو گل خوشبوی زندگی‌ام

به مادرم : آفتاب ایثار و محبت

به پدرم : نمونه تلاش و همت

چکیده

معادله برگرز یک معادله دیفرانسیل غیر خطی می‌باشد که حالت ساده شده‌ای از معادله ناویر استوکس است و برای بررسی خواص تلاطم مورد استفاده قرار می‌گیرد. اگر یک نیروی تصادفی با همبستگی معین وتابع توزیع گاوسی برای توضیح برخی خصوصیات سیستم به آن اضافی شود شکل معادله بصورت زیر در می‌آید.

$$v_t + vv_x - \nu v_{xx} = f$$

در اینجا حالت حدی $\nu \to 0$ مورد بررسی قرار گرفته است. با گذشت زمان در معادله شوک پدیدار می‌شود. تکنیکی که برای حل عددی استفاده شده است تفکیک شوک از بقیه نقاط و استفاده از معادلات شوک برای این نقاط می‌باشد. به این ترتیب رفتار معادله برگرز با گذشت زمان مورد بررسی قرار گرفته است

.

سپاسگزاری

با سپاس فراوان و قدردانی از زحمات جناب آقای دکتر رحیمی تبار که در طول انجام این پایان نامه همواره به بهترین نحو مرا هدایت نمودند و از راهنماییهای ارزشمند ایشان بهره‌مند شدم. همچنین از آقای دکتر عباسی که از نظرات مفیدشان استفاده کردم و آقایان دکتر اسماعیل زاده و دکتر روحانی که در نشست بررسی این پایان نامه شرکت نمودند مراتب سپاس را ابراز می‌دارم.

بر خود لازم می‌دارم از کلیه دوستانی که در مراحل انجام این پروژه از همکاریهای بی‌دریغشان برخوردار بودم صمیمانه تشکر کنم.

فهرست مطالب:

عنوان صفحه

فهرست مطالب:

عنوان صفحه

فهرست مطالب:

فهرست تصاویر و نمودارها

فهرست تصاویر و نمودارها

عنوان | صفحه

فصـــــــل اول

مقدمــــــه

۱-۱- تاریخچه و کاربردهای معادله برگرز

معادله برگرز که شکل آن به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u.\frac{\partial u}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (۱-۱)$$

توصیف کننده تعدادی از پدیده‌های مربوط به امواج غیرخطی است که در تئوری انتشار موج اکوستیک و فیزیک پلاسما کاربرد دارد. علاوه بر آن می‌توان به پدیده‌هایی مثل رشد غیر تعادلی سطوح، رفتار پلیمرها در محیطهای بی‌نظم، رفتار خطوط شار مغناطیسی در ابررساناها و شیشه‌های اسپینی اشاره کرد که قابل نگاشت به معادله برگرز هستند.[۶]

این معادله اولین بار توسط J.M.Burgers در سال ۱۹۴۰ میلادی به عنوان یک مدل ساده از تلاطم مطرح شد. این معادله دارای خواص مشترکی با معادله ناویر- استوکس می‌باشد. بعنوان مثال غیرخطی بودن، خواص تقارنی و روابط اتلاف انرژی. اما از طرف دیگر بدلیل وجود تبدیل هاپف-کل این معادله انتگرال‌پذیر بوده و دارای خواص آشوبناک نمی‌باشد. هنگامی که انتگرال‌پذیری این معادله ثابت شد توجه به آن، بعنوان مدل ساده‌ای از تلاطم، مدتی کاهش یافت. چندین سال بعد مشخص شد که خواصی در معادله برگرز وجود دارد کاملا غیر بدیهی بوده و علیرغم انتگرال‌پذیری معادله جواب به آن سؤالات می تواند رهیافتهای مناسبی را در بررسی معادلات غیرخطی بدست دهد.

برای توضیح برخی خصوصیات سیستم جمله نویز بصورت زیر وارد معادله برگرز می‌شود:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}-\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t) \qquad (۲-۱)$$

در رابطه فوق ν ضریب ثابت و مثبتی بوده و نسبت ضریب لزجی سیال به چگالی سیال را بیان می‌کند.

برای نگه داشتن تقارن انتقالی سیستم، نویز باید دارای خصوصیت زیر باشد.

$$\langle f(x,t)\rangle=0 \qquad (۳-۱)$$

در ابعاد بالاتر معادله برگرز را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$u_t + (u.\nabla)u - \nu\nabla^2 u = f(x,t) \qquad (۴-۱)$$

یکی از مهمترین کاربردهای معادله برگرز این است که تحت تبدیل:

$$u = -\nabla h \qquad (۵-۱)$$

به معادله مهم و شناخته شده .K.P.Z [1] تبدیل می‌شود:

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla h(x,t))^2 = \nu\nabla^2 h(x,t) - \eta(x,t) \qquad (۶-۱)$$

که این معادله بر دسته وسیعی از مسائل مربوط به رشد سطوح غیر تعادلی حاکم است. در رابطه فوق $f(x,t) = \nabla\eta(x,t)$ می‌باشد.

اگر ذرات را بصورت اتفاقی روی یک سطح بریزیم، سطح در نقاط مختلف شروع به رشد می‌کند. $h(x,t)$ نشان دهنده ارتفاع سطح در نقاط و زمانهای مختلف می‌باشد. وجود $\eta(x,t)$ بیانگر این است که ذرات بصورت کاتوره‌ای در نقاط مختلف می‌نشینند.

با یک نگاشت دیگر بصورت:

$$h = 2\nu.\mathrm{Log}(z) \qquad (۷-۱)$$

معادله برگرز به یک معادله تصادفی روی z بصورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \nu\nabla^2 z + \frac{\eta}{2\nu} \qquad (۸-۱)$$

این معادله شرودینگر در زمان مجازی برای ذره‌ای است که در یک پتانسیل کاتوره‌ای وابسته به زمان $\frac{\eta}{2\nu}$ حرکت می‌کند.

همچنین این معادله، معادله حاکم بر تابع پارش یک تار الاستیکی تحت پتانسیل کاتوره‌ای می‌باشد. بطوریکه انتهای تار در زمان *t* مقید به قرار گرفتن در نقطه x باشد. حل معادله فوق منجر به حل

[1] Kardar, Parisi & Zhang

مسئله پلیمرهای هدایت شده در یک پتانسیل کاتوره‌ای می‌گردد.

آنچه در ادامه آمده است به قرار زیر می‌باشد.

در فصل دوم به نحوه استخراج معادله ناویر- استوکس با استفاده از اصول بقای جرم و اندازه حرکت خطی و معادلات سیال استوکی پرداخته می‌شود و سپس با ساده‌سازی آن معادله برگرز بدست می‌آید. در ادامه با استفاده از تبدیل هاپف-کل، حل تحلیلی معادله برگرز و پس از آن تفسیر هندسی و فرم عمومی موج شوکی بیان می‌شود.

در فصل سوم با ارائه تعریف همبستگی، آنالیز فوریه و چگالی طیفی نحوه تولید داده تصادفی با همبستگی خاص آورده شده و سپس روشهای هموار کردن این داده‌ها برای استفاده در شبیه‌سازی بیان شده است.

در فصل چهارم به حل عددی معادله برگرز تحت تاثیر نیرو پرداخته شده است. در این فصل شرط پایداری در گسسته‌سازی معادله برگرز، معادلات شوک و خلاصه‌ای از کارهای انجام شده در تولید نویز و شبیه‌سازی و بالاخره در انتها نتایج و نمودارهای بدست آمده از حل عددی آورده شده است.

فصل دوم

استخراج و حل تحلیلی معادله برگرز