

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

انجمن فیزیکدانان ایران
تاسیس ۱۳۳۵

به نام خدا

دانشکده فیزیک

۲۰ / ۱۰ / ۱۳۸۱

حل عددی معادله برگرز یک بعدی با نیروی تصادفی

سید سعید موسوی

پایان نامه کارشناسی ارشد

در رشته

فیزیک - اتمی مولکولی

استاد راهنما: دکتر محمد رضا رحیمی تبار

سید سعید موسوی

شهریور ماه ۱۳۸۱

تقدیم به دو گل خوشبوی زندگی ام

به مادرم : آفتاب ایثار و محبت

به پدرم : نمونه تلاش و همت

چکیده

معادله برگرز یک معادله دیفرانسیل غیر خطی می‌باشد که حالت ساده شده‌ای از معادله ناویر استوکس است و برای بررسی خواص تلاطم مورد استفاده قرار می‌گیرد. اگر یک نیروی تصادفی با همبستگی معین و تابع توزیع گاوسی برای توضیح برخی خصوصیات سیستم به آن اضافی شود شکل معادله بصورت زیر در می‌آید.

$$v_t + vv_x - \nu v_{xx} = f$$

در اینجا حالت حدی $0 \rightarrow \nu$ مورد بررسی قرار گرفته است. با گذشت زمان در معادله شوک پدیدار می‌شود. تکنیکی که برای حل عددی استفاده شده است تفکیک شوک از بقیه نقاط و استفاده از معادلات شوک برای این نقاط می‌باشد. به این ترتیب رفتار معادله برگرز با گذشت زمان مورد بررسی قرار گرفته است

سپاسگزاری

با سپاس فراوان و قدردانی از زحمات جناب آقای دکتر رحیمی تبار که در طول انجام این پایان نامه همواره به بهترین نحو مرا هدایت نمودند و از راهنماییهای ارزشمند ایشان بهره‌مند شدم. همچنین از آقای دکتر عباسی که از نظرات مفیدشان استفاده کردم و آقایان دکتر اسماعیل زاده و دکتر روحانی که در نشست بررسی این پایان نامه شرکت نمودند مراتب سپاس را ابراز می‌دارم. بر خود لازم می‌دارم از کلیه دوستانی که در مراحل انجام این پروژه از همکاریهای بی‌دریغشان برخوردار بودم صمیمانه تشکر کنم.

فهرست مطالب:

صفحه

عنوان

فصل اول : مقدمه

۱-۱- تاریخچه و کاربردهای معادله برگرز ۱

فصل دوم : استخراج و حل تحلیلی

۱-۲- مقدمه ۴

۲-۲- استخراج معادله برگرز ۴

۱-۲-۱- اصل بقای جرم ۴

۲-۲-۲- اصل بقای اندازه حرکت خطی ۴

۳-۲-۲- تغییر مکان یک سیستم مادی ۵

۴-۲-۲- تانسور تغییر فرم کوشی و گرین ۶

۵-۲-۲- تانسور تغییر فرم نسبی بینهایت کوچک ۶

۶-۲-۲- تانسور نرخ تغییر فرم نسبی ۷

۷-۲-۲- معادلات مشخصه جامدات ارتجاعی خطی ۷

۸-۲-۲- معادلات ناویر-استوکس ۹

۹-۲-۲- معادله برگرز ۱۰

۳-۲-۳- حل تحلیلی معادله برگرز در یک بعد ۱۱

۱-۳-۲- تفسیر هندسی با توجه به مینیمم های مطلق ۱۴

۲-۳-۲- حل برای زمانهای بزرگ، فرم عمومی موج شوکی ۲۱

فهرست مطالب:

صفحه

عنوان

فصل سوم : نويز تصادفی

۲۲.....	۱-۳- مقدمه
۲۳.....	۲-۳- مراحل توليد داده تصادفی.....
۲۴.....	۱-۲-۳- همبستگی
۲۶.....	۲-۲-۳- آناليز فوريه
۲۷.....	۳-۲-۳- چگالی طيفی
۲۸.....	۴-۲-۳- تحريك و پاسخ سيستم های خطی
۳۰.....	۵-۲-۳- انتقال ارتعاش تصادفی
۳۱.....	۶-۲-۳- تبديل فوريه گسسته
۳۳.....	۷-۲-۳- تبديل فوريه توابع تناوبی
۳۵.....	۸-۲-۳- تخمین دانسیته طيفی
۳۶.....	۳-۳- قضیه حد مرکزی
۳۷.....	۴-۳- تبديل فوريه سريع
۴۱.....	۱-۴-۳- اضافه کردن صفر
۴۲.....	۵-۳- هموار کردن داده تصادفی
۴۲.....	۱-۵-۳- روش فیلتر کردن
۴۳.....	۲-۵-۳- روش ضرب در پاسخ فرکانسی
۴۴.....	۶-۳- مروری بر مطالب

فهرست مطالب:

صفحه

عنوان

فصل چهارم : حل عددی

- ۴-۱- مقدمه ۴۶
- ۴-۲- شرط پایداری در گسسته سازی معادله برگرز ۴۶
- ۴-۳- معادلات شوک ۵۰
- ۴-۴- تولید داده تصادفی ۵۲
- ۴-۵- شبیه سازی معادله برگرز واداشته ۵۳
- ۴-۶- نمودارها و نتایج ۵۷

پیوست

- ضمیمه ۱- استخراج معادلات چند سیالی پلاسما از معادلات سینتیکی ۶۹
- ضمیمه ۲- برنامه کامپیوتری ساخت داده‌های تصادفی ۷۱
- ضمیمه ۳- برنامه کامپیوتری حل عددی معادله برگرز یک بعدی ۷۷

مرجعها

سازمان اطلاعات و ارتباطات
مستند آرکایو

فهرست تصاویر و نمودارها

صفحه

عنوان

- ۱-۲- پیدا کردن مینیمم تابع $z(\xi)$ ۱۵
- ۲-۲- انتقال محور سهمی در راستای محور ξ ۱۶
- ۳-۲- زمانی که سهمی به اندازه کافی باز شده باشد ۱۶
- ۴-۲- حل برای زمانهای بزرگ ۲۲
- ۱-۳- مقادیر غیر همبسته. و مقادیر همبسته ۲۴
- ۲-۳- تحریک و پاسخ سیستم های خطی ۲۹
- ۳-۳- گسسته سازی یک تابع پیوسته ۳۱
- ۴-۳- هموار کردن داده ها از روش فیلتر کردن ۳۴
- ۵-۳- روش ضرب در پاسخ فرکانسی ۴۴
- ۱-۴- نمودار معادله برگرز با v نزدیک به صفر و بدون حضور نیرو ۵۷
- ۲-۴- نمودار معادله برگرز افتان با v بزرگ و بدون حضور نیرو ۵۷
- ۳-۴- تغییرات معادله برگرز برای v های مختلف و بدون حضور نیرو ۵۸
- ۴-۴- نمودار تغییرات معادله برگرز در حالت $0 \rightarrow v$ و پدیدار شدن شوک ۵۹
- ۵-۴- نمودار تغییرات معادله برگرز بدون حضور نیرو و پدیدار شدن شوک ۶۰
- ۶-۴- نمودار تغییرات معادله برگرز در حالت $0 \rightarrow v$ و پدیدار شدن شوک ۶۱
- ۷-۴- نمودار تابع توزیع داده های تصادفی تولید شده برای ۱۰۰,۰۰۰ داده ۶۲
- ۸-۴- نمودار تابع توزیع داده های تصادفی تولید شده برای ۵,۰۰۰,۰۰۰ داده ۶۲

فهرست تصاویر و نمودارها

صفحه

عنوان

-
- ۹-۴- نمودار هموارسازی داده‌های تصادفی ۶۳
- ۱۰-۴- نمودار هموارسازی داده‌های تصادفی ۶۳
- ۱۱-۴- نمودار همبستگی داده‌های تصادفی ۶۴
- ۱۲-۴- نمودار همبستگی داده‌های تصادفی پس از هموار کردن ۶۴
- ۱۳-۴- نمودار معادله برگرز در حضور نیروی با همبستگی کم ۶۵
- ۱۴-۴- نمودار معادله برگرز در حضور نیروی با همبستگی زیاد ۶۶
- ۱۵-۴- نمودار معادله برگرز در حضور نیرو و پدیدار شدن شوک در نمودار ۶۷
- ۱۶-۴- تابع توزیع سرعت پس از گذشت ۲۰۰ قدم زمانی برای شدت نویز واحد ۶۸
- ۱۷-۴- تابع توزیع سرعت پس از گذشت ۲۰,۰۰۰ قدم زمانی ۶۸
- ۱۸-۴- تابع توزیع سرعت برای شدت نویز چهار برابر ۶۸

فصل اول

مقدمه

۱-۱- تاریخچه و کاربردهای معادله برگرز

معادله برگرز که شکل آن به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1-1)$$

توصیف کننده تعدادی از پدیده‌های مربوط به امواج غیرخطی است که در تئوری انتشار موج اکوستیک و فیزیک پلاسما کاربرد دارد. علاوه بر آن می‌توان به پدیده‌هایی مثل رشد غیر تعادلی سطوح، رفتار پلیمرها در محیط‌های بی‌نظم، رفتار خطوط شار مغناطیسی در ابررساناها و شیشه‌های اسپینی اشاره کرد که قابل نگاشت به معادله برگرز هستند. [۶]

این معادله اولین بار توسط J.M.Burgers در سال ۱۹۴۰ میلادی به عنوان یک مدل ساده از تلاطم مطرح شد. این معادله دارای خواص مشترکی با معادله ناویر-استوکس می‌باشد. بعنوان مثال غیرخطی بودن، خواص تقارنی و روابط اتلاف انرژی. اما از طرف دیگر بدلیل وجود تبدیل هاپف-کل این معادله انتگرال پذیر بوده و دارای خواص آشوبناک نمی‌باشد. هنگامی که انتگرال پذیری این معادله ثابت شد توجه به آن، بعنوان مدل ساده‌ای از تلاطم، مدتی کاهش یافت. چندین سال بعد مشخص شد که خواصی در معادله برگرز وجود دارد کاملاً غیر بدیهی بوده و علیرغم انتگرال پذیری معادله جواب به آن سؤالات می‌تواند رهیافتهای مناسبی را در بررسی معادلات غیرخطی بدست دهد.

برای توضیح برخی خصوصیات سیستم جمله نوین بصورت زیر وارد معادله برگرز می‌شود:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \quad (2-1)$$

در رابطه فوق ν ضریب ثابت و مثبتی بوده و نسبت ضریب لزجی سیال به چگالی سیال را بیان می‌کند.

برای نگه داشتن تقارن انتقالی سیستم، نوین باید دارای خصوصیت زیر باشد.

$$\langle f(x, t) \rangle = 0 \quad (3-1)$$

در ابعاد بالاتر معادله برگرز را می توان بصورت زیر نوشت:

$$u_t + (u \cdot \nabla)u - \nu \nabla^2 u = f(x, t) \quad (4-1)$$

یکی از مهمترین کاربردهای معادله برگرز این است که تحت تبدیل:

$$u = -\nabla h \quad (5-1)$$

به معادله مهم و شناخته شده K.P.Z.¹ تبدیل می شود:

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} - \frac{1}{2} (\nabla h(x, t))^2 = \nu \nabla^2 h(x, t) - \eta(x, t) \quad (6-1)$$

که این معادله بر دسته وسیعی از مسائل مربوط به رشد سطوح غیر تعادلی حاکم است. در رابطه فوق

$$f(x, t) = \nabla \eta(x, t) \text{ می باشد.}$$

اگر ذرات را بصورت اتفاقی روی یک سطح بریزیم، سطح در نقاط مختلف شروع به رشد می کند.

h(x, t) نشان دهنده ارتفاع سطح در نقاط و زمانهای مختلف می باشد. وجود $\eta(x, t)$ بیانگر این است

که ذرات بصورت کاتوره ای در نقاط مختلف می نشینند.

با یک نگاهت دیگر بصورت:

$$h = 2\nu \cdot \text{Log}(z) \quad (7-1)$$

معادله برگرز به یک معادله تصادفی روی Z بصورت زیر تبدیل می شود:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \nu \nabla^2 z + \frac{\eta}{2\nu} \quad (8-1)$$

این معادله شرودینگر در زمان مجازی برای ذره ای است که در یک پتانسیل کاتوره ای وابسته به زمان

$\frac{\eta}{2\nu}$ حرکت می کند.

همچنین این معادله، معادله حاکم بر تابع پارش یک تار الاستیکی تحت پتانسیل کاتوره ای می باشد.

بطوریکه انتهای تار در زمان t مقید به قرار گرفتن در نقطه X باشد. حل معادله فوق منجر به حل

¹ Kardar, Parisi & Zhang

مسئله پلیمرهای هدایت شده در یک پتانسیل کاتوره‌ای می‌گردد.

آنچه در ادامه آمده است به قرار زیر می‌باشد.

در فصل دوم به نحوه استخراج معادله ناویر- استوکس با استفاده از اصول بقای جرم و اندازه حرکت خطی و معادلات سیال استوکی پرداخته می‌شود و سپس با ساده‌سازی آن معادله برگرز بدست می‌آید. در ادامه با استفاده از تبدیل هاپف-کل، حل تحلیلی معادله برگرز و پس از آن تفسیر هندسی و فرم عمومی موج شوکی بیان می‌شود.

در فصل سوم با ارائه تعریف همبستگی، آنالیز فوریه و چگالی طیفی نحوه تولید داده تصادفی با همبستگی خاص آورده شده و سپس روشهای هموار کردن این داده‌ها برای استفاده در شبیه‌سازی بیان شده است.

در فصل چهارم به حل عددی معادله برگرز تحت تاثیر نیرو پرداخته شده است. در این فصل شرط پایداری در گسسته‌سازی معادله برگرز، معادلات شوک و خلاصه‌ای از کارهای انجام شده در تولید نویز و شبیه‌سازی و بالاخره در انتها نتایج و نمودارهای بدست آمده از حل عددی آورده شده است.

فصل دوم

استخراج و حل تحلیلی معادله برگرز