دانشگاه سیستان وبلوچستان
تحصیلات تکمیلی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

گرایش: آنالیز عددی

عنوان :

روشی جدید برای حل عددی معادلات انتگرال ولترا با استفاده از تقریب برنشتاین

استاد راهنما:

دکتر پرویز سرگلزائی

تحقیق و نگارش :

محمدرضا نخزری‌مقدم

بهمن ماه ۱۳۹۰

تقدیم به:

مادرم

همسر عزیزم

گل‌های باغ زندگی‌ام علی و النا

تشکر و قدردانی

پرودگارا! سرنوشت مرا را خیر بنویس، تقدیری مبارک، تا هر چه را که تو دیر می‌خواهی من زود نخواهم و آنچه را که تو زود می‌خواهی من دیر نخواهم.

از تو می خواهم در قلبم ایمان و بر راهم استواری بخشی و در تمام مراحل زندگی یارم نمایی و لحظه‌ای مرا به حال خود وا مگذاری.

از زحمات بی شائبه جناب آقای دکتر پرویز سرگلزائی که مسئولیت هدایت و نظارت این پایان نامه را به عهده داشتند، بینهایت سپاسگزارم.

از خانم دکتر مریم عرب عامری و آقای دکتر حسن میش مست نهی، که زحمت داوری این پایان نامه را پذیرفتند کمال تشکر را دارم.

همچنین از دوستان گرانقدرم آقایان جواد کوثری، محمدرضا محمدبیگی و جمشید عزیزی که در طول این دوره همراه من بوده‌اند کمال تشکر را دارم.

محمدرضا نخزری‌مقدم

چکیده

در این پایان‌نامه، روشی عددی برای حل معادلات انتگرال ولترا از نوع اول $(VK1)$[1] و از نوع دوم $(VK2)$[2] و حتی نوع منفردی از این معادلات ارائه می‌شود.

روش پیشنهادی بر اساس تقریب زدن تابع مجهول با تقریب‌های برنشتاین می‌باشد.

در این روش از محاسبات ساده با راه حل‌های تقریبی کاملاً قابل قبول استفاده می‌کنیم. علاوه بر این کران خطا را در این روش برآورد می‌کنیم.

برای نمایش کارآمدی این روش از مثال‌های متعددی استفاده کرده‌ایم.

واژگان کلیدی:

تقریب برنشتاین – معادلات انتگرال ولترا – روش عددی – معادلات انتگرال منفرد.

---

[1] Volterra integral equations of the first Kind

[2] Volterra integral equations of the Second Kind

فهرست مندرجات

پیشگفتار

نظریه معادلات انتگرال بی‌تردید یکی از مهم‌ترین شاخه‌های آنالیز ریاضی می‌باشد که در مسئله هدایت گرما [۱]، مسائل خاص فیزیکی یا مکانیکی [۲۵]، متغیر بودن توازن جریان در یک لوله حمل مواد نفتی [۱۱]، مسائل انتشار [۲] الکترواستاتیک [۸]، ارتباطات [۱۲] و نیروگاههای هسته‌ای نقش مهمی دارد.

روش‌های عددی متعددی برای حل معادلات انتگرال ولترا از نوع دوم وجود دارند [۶]، از جمله این روش‌ها، روش حل عددی معادله انتگرال با هسته پیچشی با استفاده از سری تیلور [۱۴]، روش حل عددی معادله انتگرال ولترا از نوع دوم با استفاده از موجک لژاندر[۱۳]، روش حل عددی معادله انتگرال بر اساس روش تجزیه آدومیان [۳]، روش حل عددی معادله انتگرال با استفاده از $Sinc - Collection$(مجموعه سینک)[۲۰]، و روش تربیع با تغییر گام می‌باشد [۲۲].

اخیراً برای حل معادلات انتگرال ولترا خطی از نوع دوم روش سری‌های توانی ارائه شده است [۲۳].

روش‌های متداول حل عددی معادلات انتگرال بر اساس چند جمله‌ای‌های برنشتاین وجود دارند [۱۳,۵]، اما روش ارائه شده در این پایان نامه با آنها متفاوت می‌باشد.

دراین روش تابع مجهول را با تقریب های برنشتاین تقریب می زنیم [۱۹,۲۱].

یکی از مزایای این روش این است که، نه تنها جواب‌های عددی دقیقی را برای معادلات انتگرال نوع اول و دوم بدست می آوریم بلکه می‌توان این روش را برای معادلاتی از نوع تکین نیز بکار برد و جواب‌های قابل قبولی را برای این نوع از معادلات بدست آورد.

فهرست جدول ها

فهرست شکل ها

فصل ۱

تعاریف و مقدمات

۱–۱ مقدمه

دراین فصل ابتدا تاریخچه معادلات انتگرال و سپس تعریف وانواع آن رابیان می کنیم.

۱–۲ تاریخچه معادلات انتگرال

اولین فردی که عنوان معادلات انتگرال را برای معادلاتی که تابع مجهول زیر علامت انتگرال ظاهر می‌شد مطرح کرد بویس ریموند[۱] بود.

در سال ۱۷۸۲ لاپلاس [۲] معادله انتگرالی برای تابع f به صورت زیر ارائه کرد.

$$f(t) = \int_{\circ}^{\infty} e^{-ts} f(s) ds$$

پس از وی در سال ۱۸۱۱ فوریه[۳] در مطالعات خود بر روی نظریه حرارت به نوعی از این معادلات برخورد کرد لذا معمولاً بیان می شود که مبدأ معادلات انتگرال به انتگرال فوریه بر می گردد. سپس در سال ۱۸۲۳ آبل [۴] نیز در حل مسائل مکانیکی با این نوع معادلات روبرو شد. معادله انتگرال آبل به صورت $g(t) = \int_a^t K(t,s) f(s) ds$ می باشد که در آن K و g معلوم و f مجهول است. سایر افرادی که به نوعی از معادله انتگرال رسیده اند به شرح زیر می باشد.

–در سال ۱۸۲۶ پواسن [۵] در نظریه مغناطیس، نوعی معادله انتگرال را مطرح کرد.

– در سال ۱۸۳۲ لیوویل[۶] معادلات انتگرال خاصی را حل نمود.

–در سال ۱۸۹۶ پوانکاره[۷] معادله انتگرال زیر را که با معادله دیفرانسیل جزئی حرکت موج متناظر می باشد

---

[۱] Bois-Reymond

[۲] Laplace

[۳] Fourier

[۴] Abel

[۵] Poisson

[۶] Liouville

[۷] Poincare

بدست آورد.

$$\begin{array}{l} u\left(x\right)+\lambda\int_a^b K(x,y)u\left(y\right)dy=f\left(x\right) \\ \begin{cases} \nabla u+\lambda u=f\left(x,y\right) \\ \nabla=\frac{\partial^{۲}}{\partial x^{۲}}+\frac{\partial^{۲}}{\partial y^{۲}} \end{cases} \end{array}$$

فردهلم[۸] برای بدست آوردن جواب معادله فوق تلاش نمود.

و سرانجام ولترا [۹] اولین کسی بود که در اواخر قرن نوزدهم نظریه معادله انتگرال را ارائه کرد. در اوایل نیمه دوم قرن بیستم تحقیقات بسیاری بر روی شرایط وجود جواب معادله انتگرال توسط هرمن ویل [۱۰] صورت گرفت.

تعریف ۱ـــ۱ (معادله انتگرال) : معادله انتگرال، معادله‌ای است که در آن تابع مجهول در زیر علامت انتگرال ظاهر می شود.

معادله زیر که در آن $f(x)$ تابع مجهول می باشد نمونه‌ای ازمعادله انتگرال است

$$f(x)=g(x)+\lambda\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}K(x,t)f(t)dt \qquad (۱ـــ۱)$$

در این معادله $K(x,t)$ هسته معادله انتگرال نامیده می شود. $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ حدود انتگرال هستند. هسته $K(x,t)$ و تابع $g(x)$ در معادله داده می شوند و این تابع $f(x)$ می باشد که باید بدست آید. باید توجه داشت که تابع مجهول $f(x)$ هم می تواند زیر علامت انتگرال و هم در خارج آن حضور داشته باشد و یا در یکی از این دو مکان.

مثال:

$$g(x)+\lambda\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}K(x,t)f(t)dt\ =\ ۰$$

۱ـــ۳ انواع معادلات انتگرال

با توجه به تنوع کاربرد معادلات انتگرال ضرورت تقسیم بندی جامع آن آشکار می شود علی الخصوص در مسائل فیزیکی که انواع خاصی از معادلات انتگرال ظاهر می شوند و برای هر کدام از آنها راه حل های متفاوتی

[۸] Erikivan fredholm
[۹] Volterra
[۱۰] Hermannweyl

ارائه می شود.

دسته بندی معادلات انتگرال بر حسب منفرد بودن یا نبودن هسته، تابع مجهول زیر علامت انتگرال، حدود انتگرال گیری، وجود یا عدم وجود تابع مجهول خارج علامت انتگرال گیری انجام می گیرد.

معادله انتگرال را با توجه به خطی بودن یا غیر خطی بودن تابع مجهول زیر انتگرال به دو نوع زیر تقسیم می کنند

تعریف ۱—۲ (معادله انتگرال خطی): معادله انتگرال زیر که در آن $f(t)$ خطی است را معادله انتگرال خطی گوییم.

$$h\left(x\right) f\left(x\right) = g\left(x\right) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K\left(x,t\right) f\left(t\right) dt \qquad \alpha(x) \leq x, t \leq \beta(x) \tag{۱—۲}$$

تعریف ۱—۳ (معادله انتگرال غیرخطی): معادله انتگرالی که در آن $f(t)$ غیرخطی است را معادله انتگرال غیرخطی گوییم.

مثال:

$$f(x) = x + \lambda \int_{۰}^{x} cos(x) f^{۳}(t) dt$$

حالات خاص معادله (۱—۲) به صورت زیر می باشد.

الف: اگر دامنه انتگرال گیری ثابت باشد این معادله به معادله انتگرال فردهلم مشهور است، شکل استاندارد معادله انتگرال فردهلم به صورت زیر است

$$h(x)f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)f(t)dt \quad a \leq x, t \leq b \tag{۱—۳}$$

که در آن هسته معادله انتگرال $K(x,t)$ و تابع $g(x)$ معلوم هستند و λ یک پارامتر معلوم می باشد بر حسب اینکه $h(x)$ کدامیک از مقادیر زیر را اختیار کند معادله انتگرال فردهلم به دو دسته زیر تقسیم می شود.

تعریف ۱—۴ (معادله انتگرال فردهلم نوع اول):

اگر در معادله (۱—۳)، $h(x) = ۰$ باشد معادله (۱—۳) به معادله زیر تبدیل می‌شود

$$g(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)f(t)dt = ۰$$

که آن‌را فردهلم نوع اول گویند.

تعریف ۱—۵ (معادله انتگرال فردهلم نوع دوم):

اگر در معادله (۱—۳)، ۱ $h(x) =$ باشد معادله (۱—۳) به معادله زیر تبدیل می شود

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)f(t)dt$$

که آن را فردهلم نوع دوم گویند.

ب: معادلاتی که در آنها حد بالای انتگرال متغیر است این حد به صورت تابعی از x ظاهر می شود به این نوع معادلات، معادله انتگرال ولترا گفته می شود.

فرم استاندارد معادله انتگرال خطی ولترا به صورت زیر است

$$h(x)f(x) = g(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)f(t)dt \qquad (۱—۴)$$

که در آن $f(t)$ خطی است.

معادله (۱—۴) را می توان حالت خاص معادله انتگرال فردهلم تلقی کرد به طوری که هسته ۰ $K(x,t) =$ برای $t > x$ و $t \in [a,b]$

معادله انتگرال خطی ولترا را با توجه به مقدار $h(x)$ به دو گروه تقسیم بندی می کنیم.

تعریف ۱—٦(معادله انتگرال ولترا نوع اول):

در صورتی که در معادله (۱—۴) قرار دهیم ۰ $h(x) =$ معادله (۱—۴) به معادله زیر تبدیل می شود

$$g(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)f(t)dt \qquad (۱—۵)$$

که آن‌را معادله انتگرال ولترای نوع اول گویند.

تعریف ۱—۷ (معادله انتگرال ولترا نوع دوم):

در صورتی که در معادله (۱—۴) قرار دهیم ۱ $h(x) =$ معادله (۱—۴) به معادله زیر تبدیل می شود.

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)f(t)dt \qquad (۱—٦)$$

که آن را معادله انتگرال ولترای نوع دوم گویند.

تعریف ۱—۸ (معادله انتگرال همگن): در صورتی که تابع سمت راست معادله انتگرال نوع دوم یعنی $g(x) = 0$ باشد معادله انتگرال را همگن یا متجانس گویند.

د: معادله انتگرال از نوع اول (۱—۵) یا از نوع دوم (۱—٦) را که در آنها حد پایین، حد بالا یا هر دو نامتناهی باشند معادله انتگرال منفرد نامیده می شود.

هم چنین اگر هسته معادلات (۱—۵) و (۱—٦) در یک نقطه یا نقاطی از دامنه انتگرال‌گیری نامتناهی باشد این گونه معادلات را نیز معادلات انتگرال منفرد گویند.

معادلات زیر به دلیل نامتناهی بودن دامنه انتگرال گیری منفرد نامیده می شود .

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{x-t} f(t)dt$$

$$f(x) = 1 + x^2 + \tfrac{1}{6}\int_{-\infty}^{\infty} (x+t)f(t)dt$$

و معادلات زیر به دلیل اینکه هسته $K(x,t)$ وقتی که $x \to \infty$ نامتناهی می شود منفرد نامیده می شوند.

$$x^2 = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} f(t)dt \qquad (۱—۷)$$

$$x = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} f(t)dt \quad 0 < \alpha < 1 \qquad (۱—۸)$$

معادلات (۱—۷) و (۱—۸) به ترتیب معادله انتگرال آبل و معادله انتگرال آبل تعمیم یافته نامیده می شود.

این گونه معادلات در کاربردهای مهندسی و فیزیک نظیر انتقال گرما، رشد کریستالها و مکانیک سیالات ظاهر می شوند.

نوع دیگر از معادلات که به هر دسته از معادلات انتگرال ولترا و فردهلم مربوط می شوند معادلات انتگرال— دیفرانسیل فردهلم و ولترا هستند.

تعریف ۱—۹ (معادله انتگرال— دیفرانسیل فردهلم ومعادله انتگرال— دیفرانسیل ولترا) : دراین نوع معادلات تابع مجهول $f(x)$ در هر دو طرف ظاهر می شود در یک طرف زیر علامت انتگرال و در طرف دیگر به عنوان یک مشتق معمولی ظاهر می شود.

این نوع انتگرال در برخی پدیده های فیزیکی و هم چنین هنگام تبدیل یک معادله دیفرانسیل به یک معادله انتگرال ظاهر می شوند.

$$f''(x) = ۱ + \int_{۰}^{x} (x-t)f(t)dt \qquad f(۰) = ۱,\ f'(۰) = ۰ \tag{۱−۹}$$

$$f'(x) = ۱ - \int_{۰}^{x} (t)f(t)dt \qquad f(۰) = ۰ \tag{۱−۱۰}$$

$$f'(x) = \frac{۱}{۲۱} - \int_{۰}^{۱} (tx)f(t)dt \qquad f(۰) = \frac{۱}{۶} \tag{۱−۱۱}$$

معادلات (۱−۹) و (۱−۱۰) را معادلات انتگرال− دیفرانسیل ولترا و معادله (۱−۱۱) را معادله انتگرال−دیفرانسیل فردهلم می نامند.

۱−۴ هسته معادله انتگرال

در معادله انتگرال (۱−۱)، $K(x,t)$ را بعنوان هسته معرفی کردیم در زیر انواع هسته را بیان می کنیم.

۱−هسته منفرد: اگر هسته معادله انتگرال در یک یا چند نقطه از دامنه انتگرال گیری نامتناهی باشد هسته را منفرد گوییم.

۲−هسته جدایی پذیر یا تبهگن: فرم کلی هسته های جدایی پذیر به صورت زیر می باشد

$$K(x,t) = \sum_{k=۱}^{n} g_k(x)h_k(t)$$

۳−هسته مربع انتگرال پذیر:

هسته $K(x,t)$ را بر حسب x و t که $a < t < b$ و $a < x < b$ مربع انتگرال پذیر گوییم هر گاه شرط زیر برقرار باشد

$$\int_a^b \int_a^b K(x,t)dxdt < \infty$$

این شرط به شرط منظم بودن مشهور است.

۴−هسته منفرد ضعیف: هرگاه برای هسته $K(x,t)$ داشته باشیم:

$$K(x,t) = \frac{H(x,t)}{|x-t|^{\alpha}} \quad \text{و} \quad ۰ < \alpha < ۱$$

که $H(x,t)$ یک تابع کراندار است، آنگاه می توان $K(x,t)$ را به یک هسته کراندار تبدیل کرد بنابراین $K(x,t)$ را یک هسته منفرد ضعیف گوییم.

۵−هسته متقارن: تابع مختلط $K(x,t)$ را متقارن یا هرمیتی گوییم هر گاه $K(x,t) = K^*(x,t)$، $K^*(x,t)$ مزدوج مختلط می باشد.

بنابراین اگر هسته حقیقی باشد داریم $K(x,t) = K(t,x)$ [۲۶].

فصل ۲

فضاهای نرم دار

۲—۱ مقدمه

وقتی از روش های عددی حل مسئله استفاده می کنیم لازم است جوابهای مختلف را با هم مقایسه کنیم به عبارتی باید اختلاف روش های بکار رفته را اندازه بگیریم.
در فضای برداری فاصله بین دو نقطه را باید مشخص کنیم بنابراین مفهوم فاصله و طول بردار را تعمیم می دهیم و این کار به کمک نرم امکان پذیر است.

۲—۲ نرم‌ها

به هر عضو x از فضای برداری X عددی حقیقی و نامنفی $||x||$ که آنرا نرم x می نامیم نسبت می دهیم به طوری که دارای خواص زیر باشد

الف) به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم $||x|| \geq 0$

ب) $||x|| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$

ج) به ازای هر $x \in X$ و $\alpha \in F$ داشته باشیم $||\alpha x|| = |\alpha| ||x||$ (F میدانی است که X روی آن تعریف می شود)

د) نامساوی مثلثی برقرار باشد یعنی به ازای هر x و y از X داشته باشیم

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

با شرایط فوق X را یک فضای برداری نرم دار می نامیم و عدد نامنفی $||x - y||$ را فاصله بین دو نقطه x و y می نامیم.

مثال ۲—۱: نرم اقلیدسی در $\mathbb{R}^n$ به صورت زیر تعریف می شود.

اگر $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ تعریف می کنیم

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$