بِسمِ اللّهِ الرّ حمنِ الرّحيم

دانشگاه گیلان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

گرایش محض

پایان نامه دکتری

بستارهای صحیح و $\triangle$-بستارها از ایده‌آل‌ها نسبت به مدول‌ها و نتایجی پیرامون مدول‌های هموار نسبی

از:

فرهاد درستکار

استاد راهنما:

آقای دکتر حبیب اله انصاری طرقی

اسفند ۱۳۸۶

قدردانی

پس از شکر و سپاس خداوند متعال مراتب تقدیر خود را از استاد ارجمند جناب آقای دکتر حبیب اله انصاری طرقی که با نظرات ارزشمندشان بنده را در نگارش این رساله یاری نموده‌اند، ابراز می دارم.

از داوران محترم خارجی و داخلی آقایان دکتر سیامک یاسمی استاد دانشگاه تهران، دکترحبیب شریف استاد دانشگاه شیراز، دکتر شهاب الدین ابراهیمی استاد دانشگاه گیلان که بنده از محضر ایشان نیز بهره برده‌ام و دکتر احمد عباسی استادیار گروه ریاضی دانشگاه گیلان که علاوه بر زحمت داوری این رساله زحمت ویرایش فارسی این رساله را نیز تقبل نمودند تشکر می نمایم.

از مساعدتهای مدیر محترم گروه ریاضی دانشگاه جناب آقای دکتر بهروز فتحی تشکر می نمایم. همچنین لازم است از آقای رضا اولیایی دانشجوی دورهٔ دکتری ریاضی برای همکاری صمیمانه در امور رایانه سپاسگزاری نمایم.

فهرست

چکیده

عنوان پایان نامه: بستارهای صحیح و $\triangle$-بستارها از ایده‌آل‌ها نسبت به مدول‌ها و نتایجی پیرامون مدول‌های هموار نسبی
نگارنده: فرهاد درستکار

در این رساله، ما نتایج جدیدی در رابطه با مدول‌های هموار نسبی، مدول‌های پروژکتیو نسبی، بستارهای صحیح ایده‌آل‌ها نسبت به مدول‌هایی خاص و $\triangle$-بستارهای ایده‌آل‌ها نسبت به مدول‌ها روی یک حلقه نوتری بدست می آوریم. در هر یک از موارد زیر R یک حلقه جابجایی با عضو واحد مخالف صفر و M یک R-مدول می باشد.

فرض کنیم که R-مدول F نسبت به M هموار باشد. در فصل ۲ این رساله ما ایده‌آل‌های اول وابستهٔ ضعیف $M \otimes_R F$ را مشخص کرده و نتایجی در این ارتباط بدست آورده‌ایم (ر.ک.[6]).

در فصل ۳ این رساله فرض کرده‌ایم که R-مدول با تولید متناهی P، نسبت به M پروژکتیو باشد. در این فصل ما ایده‌آل‌های اول وابستهٔ ضعیف $Hom_R(P, M)$ را مشخص کرده و نتایجی پیرامون مدولهای پروژکتیو نسبی بدست می آوریم (ر.ک.[7]).

در فصل ۴ این رساله ما مفاهیم کاهش و بستار صحیح یک ایده‌آل نسبت به یک R-مدول M را که در آن R یک حلقه نوتری است، تعریف می کنیم. سپس نتایج جدیدی را ثابت می کنیم (ر.ک.[5]).

در یک حلقه نوتری R فرض کنید $\triangle$ یک مجموعهٔ بسته ضربی دلخواه از ایده‌آل‌های غیر صفر R باشد. در فصل ۵، ما دوگان مفاهیم $\triangle$-کاهش و $\triangle$-بستار برای یک ایده‌آل از R نسبت به R-مدول M را تعریف نموده و در این ارتباط نتایجی را بیان می کنیم (ر.ک.[8]).

کلید واژه: مدول‌های هموار نسبی، مدول‌های پروژکتیو نسبی، ایده‌آل‌های اول وابستهٔ ضعیف، بستارهای صحیح و $\triangle$-بستارها.

Abstract

Title of Dissertation: Integral closures and $\triangle-$closures of ideals relative to modules and relative flatness
Author: F. Dorostkar

In this thesis we will obtain some new results concerning relative flatness, relative projectivity, integral closures of ideals relative to some module, and $\triangle-$closures of ideals. Throughout the following, R will denote a commutative ring (with non zero identity) and M denotes an $R-$module.

Let F be an $R-$module which is flat relative to M. In chapter two of this thesis, we will specify the weakly associated prime ideals of $M \otimes_R F$ and obtain some new results (see [6]).

Let P be a finitely generated $R-$module which is projective relative to M. In chapter three of this thesis, we will specify the weakly associated prime ideals of $Hom_R(P, M)$ and obtain some related results (see [7]).

Now let R be a Noetherian ring. Further assume that I is an ideal of R. In chapter four, we will introduce the concepts of reduction and integral closure of an ideal relative to M and prove some new results (see [5]).

Let R be a Noetherian ring and let $\triangle$ be an arbitrary multiplicatively closed set of non zero ideals of R. Further assume that I is an ideal of R. In chapter five of this thesis, we will introduce the dual notion of $\triangle-$reduction and $\triangle-$closure of an ideal with respect to M and we prove some related results (see [8]).

Keywords: relative flatness, relative projectivity, weakly associated prime ideals, integral closure, $\triangle-$closure

مقدمه

در سراسر این رساله R یک حلقه جابجایی با عضو واحد مخالف صفر و $\mathbb{N}$ مجموعه تمام اعداد صحیح مثبت است، در اینجا I یک ایده‌آل دلخواه از حلقه R می باشد.

فرض کنید که R یک حلقه نوتری و M یک R–مدول است. S. Yassemi در [31, 1.19] نشان داده است که اگر F یک R–مدول هموار باشد، می توان $Ass_R(M \otimes_R F)$ را بر حسب $Ass_R(M)$ و $Coass_R(F)$ مشخص نمود (ر.ک. ۲۱.۱.۱) همچنین نشان داد که دنباله‌های

$$(Ass_R((M/I^nM) \otimes_R F))_{n\in\mathbb{N}}$$

و

$$(Ass_R((I^nM/I^{n+1}M) \otimes_R F))_{n\in\mathbb{N}},$$

از مجموعه‌ها نهایتاً ایستا می باشند (ر.ک. ۲۲.۱.۱).

فرض کنید M یک R–مدول باشد که زیر مدول صفر آن دارای یک تجزیه اولیه است. بعلاوه، فرض کنید F یک R–مدول باشد که نسبت به M هموار است. فرض کنید $E = (\bigoplus_{\mathfrak{p}\in Max(R)} R/\mathfrak{p})$ و $F^\vee = Hom_R(F, E)$. در فصل ۲ این رساله ما ثابت خواهیم داد که زیر مدول صفر $M \otimes_R F$ دارای یک تجزیه اولیه است (ر.ک.۳.۱.۲) و نشان خواهیم داد تحت شرط خاصی می توان $W.Ass_R(M \otimes_R F)$ را بر حسب $W.Ass_R(M)$ و $Ass_R(F^\vee)$ مشخص نمود (ر.ک. ۶.۱.۲). اگر R یک حلقه شبه نیم موضعی باشد $W.Ass_R(M \otimes_R F)$ را می توان بر حسب $W.Ass_R(M)$ و $Coass_R(F)$ مشخص نمود (ر.ک. ۹.۱.۲). همچنین در این فصل ثابت خواهیم کرد که اگر R یک حلقه نوتری باشد، آنگاه $Ass_R(M \otimes_R F)$ را می توان بر حسب $Ass_R(M)$ و $Coass_R(F)$ مشخص نمود (ر.ک. ۸.۱.۲ و ۱۱.۱.۲). بعلاوه، ثابت شده است که اگر M یک R–مدول نوتری باشد ، آنگاه به‌ازای هر زیر مدول M' از M دنباله‌های

$$(Ass_R((M \otimes_R F)/I^n(M' \otimes_R F)))_{n\in\mathbb{N}}$$

و

$$(Ass_R(I^n(M \otimes_R F)/I^n(M' \otimes_R F)))_{n\in\mathbb{N}}$$

از مجموعه‌ها نهایتاً ایستا می باشند(ر.ک. ۲.۲.۲). نتایج بالا تعمیم‌های قضایای ۲۱.۱.۱ و ۲۲.۱.۱ در حالتهای مختلف می باشند.

K. Divanni-Aazar و M. Tousi در [10, 1.4] ثابت نموده‌اند که (ر.ک. ۲۳.۱.۱) اگر P و M بترتیب

R–مدول پروژکتیو و R–مدول نوتری باشند در این صورت زیر مدول صفر $Hom_R(P,M)$ دارای یک تجزیه اولیه است و ایده‌آل‌های اول وابسته آن را می توان بر حسب $Ass_R(M)$ و $W.Ass_R(P)$ مشخص کرد.

در فصل ۳ نشان خواهیم داد که اگر M یک R–مدول با این خاصیت باشد که زیر مدول صفر آن دارای یک تجزیه اولیه باشد و P یک R–مدول با تولید متناهی و نسبت به M پروژکتیو باشد، آنگاه زیر مدول صفر $Hom_R(P,M)$ دارای یک تجزیه اولیه است و $W.Ass_R(Hom_R(P,M))$ را می توان بر حسب $W.Ass_R(M)$ و $W.Ass_R(P)$ مشخص نمود (ر.ک. ۷.۱.۳). همچنین با ارائه مثالی نشان می دهیم که شرط با تولید متناهی بودن P وقتی که R–مدول P پروژکتیو نسبت به M باشد قابل حذف نیست (ر.ک. ۸.۱.۳). همچنین ثابت می کنیم که اگر P یک R–مدول پروژکتیو باشد، آنگاه $W.Ass_R(Hom_R(P,M))$ را می توان بر حسب $W.Ass_R(M)$ و $W.Ass_R(P)$ مشخص نمود (ر.ک. ۳.۱.۳ و ۴.۱.۳). این نتیجه قضایای ۲۳.۱.۱ و ۲۴.۱.۱ را تعمیم می دهد. در انتهای فصل ۳ نیز نتایجی که ارتباط بین مدول‌های پروژکتیو نسبی و هموار نسبی را بیان می کنند، ذکر شده است (ر.ک. ۱.۲.۳ و ۲.۲.۳).

مفاهیم کاهش و بستار صحیح برای یک ایده‌آل از یک حلقه نوتری بوسیله Northcott و Ress در [19] معرفی شده‌اند. این مفاهیم برای یک ایده‌آل نسبت به یک مدول انژکتیو روی یک حلقه نوتری بوسیله H. Ansari-Toroghey و R. Y. Sharp در [2] معرفی شده است و آنها نشان داده‌اند که این مفاهیم دارای خاصیت‌هایی مشابه خاصیت‌های کلاسیک بیان شده در [19] می باشند.

در فصل ۴ این رساله مفاهیم کاهش و بستار صحیح برای یک ایده‌آل نسبت به R–مدول M، که در آن R یک حلقه نوتری است را تعریف می کنیم (ر.ک. ۱.۱.۴ و ۳.۱.۴) و تحت یک شرط ثابت می کنیم که $I^{*(M)} = I^{-}(Ass_R(M))$ (ر.ک. ۱۹.۱.۴ و ۲۰.۱.۴). بعلاوه، نشان می دهیم (ر.ک. ۲۲.۱.۴ و ۲۳.۱.۴) که

$$I^{*(M)} = \{x \in R : \text{وابستهٔ صحیح است } M \text{ نسبت به } I \text{ روی } x\}.$$

همچنین ثابت خواهد شد که دنباله‌های

$$(Ass_R(R/(I^n)^{*(M)}))_{n \in \mathbb{N}}$$

و

$$(Ass_R((I^n)^{*(M)}/I^n))_{n \in \mathbb{N}},$$

از مجموعه‌ها نهایتاً ایستا می باشند (ر.ک. ۱.۲.۴ و ۵.۲.۴).

فرض کنید $\triangle$ یک مجموعهٔ بسته ضربی دلخواه از ایده‌آل‌های غیر صفر R باشد. مفاهیم $\triangle$–کاهش و $\triangle$–بستار برای یک ایده‌آل از یک حلقه جابجایی بوسیله Ratliff در [23] و Ratliff و Rush در [24] تعریف شده‌اند. R. Naghipour و M. Sedghi در [18] دوگان مفاهیم $\triangle$–کاهش و $\triangle$–بستار برای یک ایده‌آل نسبت به یک مدول آرتینی روی یک حلقه جابجایی را بیان نموده و نتایجی مرتبط با این تعاریف بدست آورده‌اند.

فرض کنید R یک حلقه نوتری است و فرض کنید M یک R-مدول دلخواه است. در فصل ۵، ما دوگان مفاهیم $\triangle$-کاهش و $\triangle$-بستار برای یک ایده‌آل نسبت به M را معرفی کرده و نشان می دهیم این مفاهیم دارای بعضی خواص مشابه با خاصیت‌هایی که Ratliff برای $\triangle$-کاهش و $\triangle$-بستار برای ایده‌ال‌ها بیان نموده است، می باشند (ر.ک. ۷.۱.۵، ۱۱.۱.۵، ۱۲.۱.۵، ۱۵.۱.۵ و ۱٦.۱.۵). همچنین ثابت می کنیم (ر.ک. ۹.۱.۵) که

$$I_{\triangle}^{(M)} = \{x \in R : \text{ وابسته است } \triangle\text{-}، M \text{ نسبت به } I \text{ روی } x\}.$$

که در آن $I_{\triangle}^{(M)}$، $\triangle$-بستار از I نسبت به M می باشد و آن عبارت است از بزرگترین ایده‌آل در مجموعه تمام ایده‌آل‌هایی که I یک $\triangle$-کاهش از آنها نسبت به M می باشد. بعلاوه، ما رفتارهای مجانبی بعضی دنباله‌ها را که جملات آنها مجموعه‌هایی از ایده‌آل‌های اول وابسته یا ایده‌آل‌های اول ضمیمه شده هستند، را بررسی خواهیم کرد. همچنین نشان خواهیم داد اگر E یک R-مدول انژکتیو باشد (ر.ک. ۵.۲.۵)، آنگاه

$$Ass_R(R/I_{\triangle}^{(M)}) = \{\mathfrak{p} \in Ass_R(R/I)_{\triangle} : \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q} \text{ ،} \mathfrak{q} \in Ass_R(E) \text{ به ازای یک } \}.$$

فصل ۱

پیشنیازها

دراین فصل تعاریف و مفاهیم مورد نیاز در فصل‌های بعد را بیان می کنیم .

۱—۱ پیشنیازها و قضایای مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. (ر.ک. [1]) فرض کنید که M و P، R-مدول باشند. P را نسبت به M پروژکتیو (یا M-پروژکتیو) گویند اگر به ازای هر دنبالهٔ دقیق $0 \to N \to M$، دنبالهٔ $0 \to Hom_R(P,N) \to Hom_R(P,M)$، نیز یک دنبالهٔ دقیق باشد. R-مدول P را پروژکتیو گوییم اگر P نسبت به هر R-مدول پروژکتیو باشد.

تعریف ۲.۱.۱. (ر.ک. [1]) فرض کنید که M و E، R-مدول باشند. E را نسبت به M انژکتیو (یا M-انژکتیو) گویند اگر به ازای هر دنبالهٔ دقیق $M \to N \to 0$، دنبالهٔ $0 \to Hom_R(N,E) \to Hom_R(M,E)$، نیز یک دنبالهٔ دقیق باشد. R-مدول E را انژکتیو گوییم اگر E نسبت به هر R-مدول انژکتیو باشد.

تعریف ۳.۱.۱. (ر.ک. [1]) فرض کنید که M و F R-مدول باشند. R-مدول F را نسبت به M هموار (یا M-هموار) گویند اگر به ازای هر دنبالهٔ دقیق $M \to N \to 0$، دنبالهٔ $M \otimes_R F \to N \otimes_R F \to 0$، نیز یک دنبالهٔ دقیق باشد. R-مدول F را هموار گوییم اگر F نسبت به هر R-مدول هموار باشد.

تذکر ۴.۱.۱. (ر.ک. [1]) فرض کنید که U یک R-مدول باشد. فرض کنید $P^{-1}(U)$، $E^{-1}(U)$ و $F^{-1}(U)$ مجموعه هایی شامل تمام R-مدول‌های M می باشند که U به ترتیب، M-پروژکتیو، M-انژکتیو و M-هموار است. دراین صورت هر یک از مجموعه‌های $P^{-1}(U)$ ، $E^{-1}(U)$، $F^{-1}(U)$ نسبت به زیرمدول‌ها و خارج قسمت مدول‌های متعلق به خود بسته می باشند. بعلاوه، جمع مستقیم هر تعداد متناهی از مدول‌های متعلق به $P^{-1}(U)$، به

$P^{-1}(U)$ تعلق دارد و جمع مستقیم هر خانواده از مدول‌های متعلق به $E^{-1}(U)$ و $F^{-1}(U)$ نیز به $E^{-1}(U)$ و $F^{-1}(U)$ تعلق دارند.

تعریف ۱.۱.۵. فرض کنید که M یک R-مدول باشد. ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از R را یک ایده‌آل اول وابسته [۱] (یا وابستهٔ ضعیف[۲]) M گوییم اگر $x \in M$ چنان موجود باشد که $\mathfrak{p} = Ann_R(x)$ (یا $\mathfrak{p}$ عضو کمین $V(Ann_R(x))$ باشد). مجموعه تمام ایده‌آل‌های اول وابسته (یا وابستهٔ ضعیف) M را با $Ass_R(M)$ (یا $W.Ass_R(M)$) نشان می دهیم.

تذکر ۱.۱.۶. (ر.ک. [32, 1.1, 1.2]) فرض کنید که M یک R-مدول باشد. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند.

۱) $Ass_R(M) \subseteq W.Ass_R(M)$؛

۲) اگر $M \neq 0$، آنگاه $W.Ass_R(M) \neq \emptyset$؛

۳) اگر R یک حلقه نوتری باشد، آنگاه $W.Ass_R(M) = Ass_R(M)$؛

۴) اگر M یک R-مدول نوتری باشد، آنگاه $W.Ass_R(M) = Ass_R(M)$؛

۵) اگر $0 \to M \to N \to L \to 0$ یک دنبالهٔ دقیق باشد، آنگاه

$$W.Ass_R(M) \subseteq W.Ass_R(N) \subseteq W.Ass_R(M) \cup W.Ass_R(L).$$

لم ۱.۱.۷. فرض کنید که $(M_i)_{i\in I}$ یک خانواده از R-مدول‌ها باشد. در این صورت

$$W.Ass_R(\bigoplus_{i\in I} M_i) = \bigcup_{i\in I} W.Ass_R(M_i).$$

اثبات. قرار دهید $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$. از این که $W.Ass_R(M_i) \subseteq W.Ass_R(M)$ به ازای هر $i \in I$، داریم $\bigcup_{i\in I} W.Ass_R(M_i) \subseteq W.Ass_R(M)$. حال فرض کنید، $\mathfrak{p} \in W.Ass_R(M)$. پس یک $m \in M$ چنان موجود است که $\mathfrak{p}$ یک ایده‌آل اول کمین از $Ann_R(m)$ است. فرض کنید، $m = m_{i_1} + m_{i_2} + \ldots + m_{i_t}$ که $m_{i_k} \in M_{i_k}$. از این رو،

$$\mathfrak{p} \supseteq (0 :_R \sum_{k=1}^{t} Rm_{i_k}) = \bigcap_{k=1}^{t} (0 :_R Rm_{i_k}),$$

و این ایجاب می کند که به ازای یک k که $1 \leq k \leq t$، $\mathfrak{p} \supseteq (0 :_R Rm_{i_k})$. بدیهی است که $\mathfrak{p}$ یک ایده‌آل اول کمین $Ann_R(m_{i_k})$ می باشد. لذا $\mathfrak{p} \in W.Ass_R(M_{i_k}) \subseteq \bigcup_{i\in I} W.Ass_R(M_i)$ و این حکم را ثابت می کند. □

لم ۱.۱.۸. (ر.ک. [33, 2.7]) فرض کنید که S نیز یک حلقه جابجایی با عضو واحد مخالف صفر باشد و فرض کنید، $\phi : R \to S$ یک همریختی حلقه باشد. فرض کنید، M یک R-مدول و N یک S-مدول

associated prime ideal[۱]

weakly associated prime ideal[۲]

باشد. اگر $Hom_R(M,N) \neq 0$، آنگاه یک $\mathfrak{p} \in W.Ass_S(N)$ وجود دارد به طوری که $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{p}^c$ به ازای یک $\mathfrak{q} \in W.Ass_R(M)$.

تعریف ۹.۱.۱. (ر.ک. [20]) فرض کنید، M یک R–مدول باشد. یک زیرمدول سره Q از M را اولیه [۳] گویند اگر برای هر $r \in R$ و $m \in M$، عبارت $rm \in Q$ نتیجه دهد که $m \in Q$ یا $r^nM \subseteq Q$. بدیهی است که اگر Q یک زیر مدول اولیه M باشد، آنگاه $\mathfrak{p} = Rad(Ann_R(M/Q))$ یک ایده‌آل اول است. در این صورت Q را یک زیرمدول $\mathfrak{p}$–اولیه M گوییم. اگر زیر مدول صفر M، $\mathfrak{p}$–اولیه باشد، آنگاه R–مدول M را $\mathfrak{p}$–هم اولیه [۴] گویند.

تعریف ۱۰.۱.۱. (ر.ک. [20]) فرض کنید که M یک R–مدول باشد. زیرمدول N از M دارای یک تجزیه اولیه [۵] در M است اگر N برابر اشتراک تعداد متناهی از زیرمدول‌های اولیه M باشد. فرض کنید، $N = Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_n$ یک تجزیه اولیهٔ N باشد که در آن به ازای هر $1 \leq i \leq n$، Q_i یک زیرمدول $\mathfrak{p}_i$– اولیه M است. این تجزیه، یک تجزیه اولیهٔ کمین N است اگر

۱) $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ دوبدو متمایز باشند و

۲) $\bigcap_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} Q_i \nsubseteq Q_j$ بازای هر $j = 1, 2, \ldots, n$.

قضیه ۱۱.۱.۱. (ر.ک. [32, 1.3]) فرض کنید که M یک R–مدول باشد که زیرمدول صفر آن دارای یک تجزیه اولیه است. فرض کنید که $0 = Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_n$ یک تجزیه اولیهٔ کمین زیر مدول صفر M باشد، که در آن به ازای هر $1 \leq i \leq n$، Q_i یک زیرمدول $\mathfrak{p}_i$– اولیه M است. در این صورت

$$W.Ass_R(M) = \{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n\}.$$

تعریف ۱۲.۱.۱. (ر.ک. [1]) فرض کنید که C یک R–مدول باشد. C را یک هم مولد [۶] در کاتگوری R–مدول‌ها گوییم اگر به توان هر R–مدول M را در یک حاصل ضرب خارجی نسخه‌هایی از C نشاند. بنابر [1, 18.16]، $\bigoplus_{\mathfrak{m}\in Max(R)} E(R/\mathfrak{m})$ یک هم مولد در کاتگوری R–مدول‌ها و بنابر [1, 18.19]، $E(\bigoplus_{\mathfrak{m}\in Max(R)} R/\mathfrak{m})$ یک هم مولد انژکتیو [۷] در کاتگوری R–مدول‌ها می باشند.

قضیه ۱۳.۱.۱. (ر.ک. [1, 18.14]) برای یک R–مدول C گزاره‌های زیر با یکدیگر معادل‌اند.

۱) C یک هم مولد در کاتگوری R–مدول‌ها است؛

[۳] primary submodule
[۴] coprimary module
[۵] primary decomposition
[۶] cogenerator
[۷] injective cogenerator

۲) برای هر همریختی f در کاتگوری R–مدول‌ها اگر $Hom_R(f,C)=\circ$، آنگاه $f=\circ$.

تعریف ۱.۱.۱۴. (ر.ک. [30])

۱) فرض کنید که M یک R–مدول و K یک زیر مدول از M باشد. M یک توسیع اساسی[۸] از K است اگر به ازای هر زیرمدول غیر صفر N از M داشته باشیم $K\cap N\neq\circ$.

۲) فرض کنید که E یک R–مدول و M یک زیر مدول از E باشد. در این صورت E یک پوشش انژکتیو[۹] از M است اگر E یک R–مدول انژکتیو باشد که یک توسیع اساسی از M نیز هست. پوشش انژکتیو از R–مدول M را با $E(M)$ نشان می دهیم.

تعریف ۱.۱.۱۵. (ر.ک. [31] و [32]) یک R–مدول L را همدوری [۱۰] گویند اگر یک ایده‌آل بیشین مانند $\mathfrak{m}$ از R چنان موجود باشد که $L\subseteq E(R/\mathfrak{m})$.

تعریف ۱.۱.۱٦. (ر.ک. [31] و [32]) فرض کنید که M یک R–مدول باشد. یک ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از R یک ایده‌آل اول هم وابسته (یا هم وابستهٔ ضعیف) نامیده می شود اگر یک تصویر همریخت همدوری مخالف صفر از M مانند L موجود چنان باشد که $\mathfrak{p}=(\circ:_R L)$ (یا $\mathfrak{p}$ یک ایده‌آل اول کمین از $Ann_R(L)$ باشد). مجموعه تمام ایده‌آل‌های هم وابسته (یا هم وابستهٔ ضعیف) از M را با $Coass_R(M)$ (یا$W.Coass_R(M)$) نشان می دهند.

تعریف ۱.۱.۱۷. (ر.ک. [13]) یک R–مدول مخالف صفر مانند M ثانویه [۱۱] است اگر به ازای هر $r\in R$، $rM=M$ یا یک عدد صحیح مثبت مانند n چنان موجود باشد که $r^nM=\circ$. بدیهی است اگر M یک R–مدول ثانویه باشد، آنگاه ایده‌آل $\mathfrak{p}=Rad(Ann_R(M))$ یک ایده‌آل اول از R است. در این صورت R–مدول M را $\mathfrak{p}$–ثانویه می نامیم.

تعریف ۱.۱.۱۸. (ر.ک. [13]) فرض کنید M یک R–مدول باشد. گوییم M دارای یک نمایش ثانویه[۱۲] است اگر M با مجموع تعداد متناهی از زیرمدول‌های ثانویه خود برابر باشد. فرض کنید، $M=N_1+N_2+\ldots+N_k$ یک نمایش ثانویه از M باشد که در آن به ازای هر $1\leq i\leq k$، N_i یک زیرمدول $\mathfrak{p}_i$– ثانویه از M است. این نمایش ثانویه را کمین گویند اگر

۱) $\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2,\ldots,\mathfrak{p}_k$ دوبدو متمایز باشند و

---

[۸] essential extension
[۹] injective envelop
[۱۰] cocyclic
[۱۱] secondary
[۱۲] secondary representation

۲) $N_j \nsubseteq \sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} N_i$ بازای هر $j = 1, 2, \dots, n$.

تعریف ۱.۱.۱۹. (ر.ک. [13]) فرض کنید $M = N_1 + N_2 + \dots + N_k$، یک نمایش ثانویهٔ کمین از R-مدول M باشد که در آن به ازای هر $1 \leq i \leq k$، N_i یک زیرمدول $\mathfrak{p}_i$- ثانویه از M است. دراین صورت ایده‌آل‌های اول $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_k$ را ایده‌آل‌های اول ضمیمه[13] از M می نامیم و مجموعه تمام ایده‌آل‌های اول ضمیمه از M را با $Att_R(M)$ نشان می دهیم.

قضیه ۱.۱.۲۰. (ر.ک. [32, 3.1]) فرض کنید که R-مدول M دارای یک نمایش ثانویه است و فرض کنید، $M = N_1 + N_2 + \dots + N_k$ یک نمایش ثانویهٔ کمین از M باشد که در آن به ازای هر $1 \leq i \leq k$، N_i یک زیرمدول $\mathfrak{p}_i$- ثانویه از M است. در این صورت

$$W.Coass_R(M) = \{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_n\} = Att_R(M).$$

لم ۱.۱.۲۱. (ر.ک. [31, 1.19]) فرض کنید که R یک حلقه نوتری و M یک R-مدول باشد. فرض کنید، F یک R-مدول هموار باشد. در این صورت

$$Ass_R(M \otimes_R F) = \{\mathfrak{p} \in Ass_R(M) : \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}, \mathfrak{q} \in Coass_R(F) \text{ به ازای یک } \}$$

قضیه ۱.۱.۲۲. (ر.ک. [31, 1.20]) فرض کنید که R یک حلقه نوتری و M یک R-مدول با تولید متناهی باشد. بعلاوه، فرض کنید که F یک R-مدول هموار باشد. در این صورت به ازای هر ایده‌آل I از R دنباله‌های

$$(Ass_R((M/I^nM) \otimes_R F))_{n\in\mathbb{N}}$$

و

$$(Ass_R((I^nM/I^{n+1}M) \otimes_R F))_{n\in\mathbb{N}}.$$

از مجموعه‌ها نهایتاً ایستا[14] می باشند.

لم ۱.۱.۲۳. (ر.ک. [10, 1.4]) فرض کنید که P یک R-مدول پروژکتیو و M هم یک R-مدول نوتری باشد. در این صورت زیر مدول صفر $Hom_R(P, M)$ دارای یک تجزیه اولیهٔ کمین است و

$$\begin{aligned} Ass_R(Hom_R(P,M)) &= \{\mathfrak{p} \in Ass_R(M) : \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q} \text{ ،} \mathfrak{q} \in W.Ass_R(P) \text{ به ازای یک } \} \\ &= Supp_R(P) \cap Ass_R(M) \end{aligned}$$

[13] attached prime ideals

[14] ultimately constant

قضیه ۱.۱.۲۴. (ر.ک. [33, 1.17]) فرض کنید که S یک حلقه جابجایی با عضو واحد مخالف صفر باشد. فرض کنید، $\phi : R \to S$ یک همریختی حلقه باشد (یادآوری می کنیم که R یک حلقه‌جابجایی با عضو واحد مخالف صفر است). فرض کنید که M یک S–مدول است که $W.Ass_S(M) = Ass_S(M)$. بعلاوه، فرض کنید که زیر مدول صفر M دارای یک تجزیه اولیه است. در این صورت به ازای هر R–مدول پروژکتیو P داریم

$$Ass_R(Hom_R(P,M)) = \{\mathfrak{p} \in Ass_R(M) : \mathfrak{p}^c \supseteq \mathfrak{q} \text{ ،} \mathfrak{q} \in W.Ass_R(P) \text{ به ازای یک} \}$$

که در آن $\mathfrak{p}^c$ حاصل تحدید ایده‌آل $\mathfrak{p}$ تحت همریختی حلقه $\phi : R \to S$ است.

قضیه ۱.۱.۲۵. (ر.ک. [3, 3.1]) فرض کنید که M یک R–مدول است که زیر مدول صفر آن دارای یک تجزیه اولیه است. بعلاوه، فرض کنید E یک R–مدول است که نسبت به M انژکتیو است و $W.Ass_R(E) = Ass_R(E)$. در این صورت $Hom_R(M,E)$ دارای یک نمایش ثانویه است و

$$Att_R(Hom_R(M,E)) = \{\mathfrak{p} \in W.Ass_R(M) : \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}, \mathfrak{q} \in Ass_R(E) \text{ به ازای یک} \}$$

قرارداد ۱.۱.۲۶. فرض کنید M یک R–مدول و $\mathfrak{m}$ یک ایده‌آل بیشین از R باشد. از این به بعد $Hom_R(M, E(R/\mathfrak{m}))$ را با $D_{\mathfrak{m}}(M)$ نشان می دهیم.

قضیه ۱.۱.۲۷. (ر.ک. [32]) فرض کنید که $M, M_1.M_2, ..., M_n$ ، R–مدول‌هایی باشند. در این صورت داریم

۱) $\mathfrak{p} \in Coass_R(M)$ اگر و تنها اگر ایده‌آل $\mathfrak{m} \in Max(R) \cap V(\mathfrak{p})$ چنان موجود باشد که $\mathfrak{p} \in Ass_R(D_{\mathfrak{m}}(M))$؛

۲) $\mathfrak{p} \in W.Coass_R(M)$ اگر و تنها اگر ایده‌آل $\mathfrak{m} \in Max(R) \cap V(\mathfrak{p})$ چنان موجود باشد که $\mathfrak{p} \in W.Ass_R(D_{\mathfrak{m}}(M))$؛

۳) اگر $\mathfrak{p} \in Ass_R(M)$، آنگاه $\mathfrak{p} \in Coass_R(D_{\mathfrak{m}}(M))$ به ازای هر $\mathfrak{m} \in Max(R) \cap V(\mathfrak{p})$؛

۴) اگر $\mathfrak{p} \in W.Ass_R(M)$، آنگاه $\mathfrak{p} \in W.Coass_R(D_{\mathfrak{m}}(M))$ به ازای هر $\mathfrak{m} \in Max(R) \cap V(\mathfrak{p})$؛

۵) $W.Coass_R(\bigoplus_{i=1}^{n} M_i) = \bigcup_{i=1}^{n} W.Coass_R(M_i)$.

لم ۱.۱.۲۸. فرض کنید که R یک حلقه نوتری و $\mathfrak{p}$ یک ایده‌آل اول از R باشد. بعلاوه، فرض کنید که M یک R–مدول و $M^{\vee} = Hom_R(M,E)$ باشد که در آن $E = \bigoplus_{\mathfrak{m} \in Max(R)} E(R/\mathfrak{m})$. در این صورت $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ به ازای یک $\mathfrak{q} \in Coass_R(M)$ ، اگر و تنها اگر $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}'$ به ازای یک $\mathfrak{q}' \in Ass_R(M^{\vee})$.

اثبات. فرض کنید $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ که در آن $\mathfrak{q} \in Coass_R(M)$. از ۱.۱.۲۷(۱) نتیجه می گیریم که یک ایده‌آل بیشین $\mathfrak{m}$ از R چنان موجود است که $\mathfrak{q} \in Ass_R(D_{\mathfrak{m}}(M))$. بدیهی است که $D_{\mathfrak{m}}(M) = Hom_R(M, E(R/\mathfrak{m})) \subseteq M^{\vee}$. از این رو $\mathfrak{q} \in Ass_R(M^{\vee})$.

اکنون فرض کنید که به ازای یک $\mathfrak{q}' \in Ass_R(M^\vee)$، $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}'$. در این صورت یک $\phi \in M^\vee$ چنان موجود است که $Ann_R(\phi) = \mathfrak{q}'$. قرار دهید

$$\Omega = \{Ann_R(f) : \mathfrak{p} \subseteq Ann_R(f) \text{ و } f \neq 0, f \in M^\vee\}.$$

در این صورت $\Omega \neq \emptyset$، زیرا $Ann_R(\phi) \in \Omega$. چون R یک حلقه نوتری است، Ω یک عضو بیشین مانند $\mathfrak{q} = Ann_R(g)$ دارد که در آن $g \in M^\vee$ و $g \neq 0$. بدیهی است که $\mathfrak{q}$ یک ایده‌آل اول حلقه R است. از آنجا که $g \neq 0$، یک ایده‌آل اول بیشین مانند $\mathfrak{m} \in Max(R)$ چنان موجود است که $g_\mathfrak{m} = \pi_\mathfrak{m} \circ g \neq 0$. اکنون $g_\mathfrak{m} \in Hom_R(M, E(R/\mathfrak{m}))$ و

$$\mathfrak{p} \subseteq Ann_R(g) \subseteq Ann_R(g_\mathfrak{m})$$

ایجاب می کنند که $Ann_R(g_\mathfrak{m}) \in \Omega$ و در نتیجه با توجه به انتخاب $\mathfrak{q}$ داریم

$$Ann_R(g_\mathfrak{m}) = Ann_R(g) = \mathfrak{q}.$$

از این که $\mathfrak{q} = Ann_R(Im(g_\mathfrak{m}))$، داریم $\mathfrak{q} \in Coass_R(M)$ و اثبات کامل است. □

لم ۱.۱.۲۹. فرض کنید که R یک حلقه شبه نیم موضعی[۱۵] با ایده‌آل‌های بیشین $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, ..., \mathfrak{m}_n$ باشد و فرض کنید، $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E(R/\mathfrak{m}_i)$. همچنین فرض کنید که M یک R–مدول و $M^\vee = Hom_R(M, E)$ باشد. در این صورت

۱) $Coass_R(M) = Ass_R(M^\vee)$؛

۲) $Ass_R(M) \subseteq Coass_R(M^\vee)$.

اثبات. اثبات مشابه [31, 3.1] می باشد. □

لم ۱.۱.۳۰. فرض کنید که R یک حلقه شبه نیم موضعی با ایده‌آل‌های بیشین $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, ..., \mathfrak{m}_n$ باشد و فرض کنید، $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E(R/\mathfrak{m}_i)$. بعلاوه، فرض کنید که M یک R–مدول و $M^\vee = Hom_R(M, E)$ باشد. در این صورت

۱) $W.Coass_R(M) = W.Ass_R(M^\vee)$؛

۲) $W.Ass_R(M) \subseteq W.Coass_R(M^\vee)$ و اگر زیر مدول صفر M دارای یک تجزیه اولیه باشد آنگاه تساوی برقرار است.

اثبات. (۱) فرض کنید که $\mathfrak{p} \in W.Coass_R(M)$. بنابر ۱.۱.۲۷(۲)، ایده‌آل اول بیشینی مانند $\mathfrak{m}_i \in Max(R)$ چنان موجود است که $\mathfrak{p} \in W.Ass_R(D_{\mathfrak{m}_i}(M))$. لذا $\mathfrak{p} \in W.Ass_R(M^\vee)$ و در نتیجه

[۱۵] quasi semi-local

$W.Coass_R(M) \subseteq W.Ass_R(M^\vee)$. برای اثبات شمول عکس فرض کنید که $\mathfrak{p} \in W.Ass_R(M^\vee)$. بنابر ۷.۱.۱، $\mathfrak{p} \in W.Ass_R(D_{\mathfrak{m}_i}(M))$ به ازای یک i که $1 \leq i \leq n$. اکنون از ۲۷.۱.۱(۲)، نتیجه می شود که $\mathfrak{p} \in W.Coass_R(M)$.

(۲) فرض کنید که $\mathfrak{p} \in W.Ass_R(M)$. بنابر ۲۷.۱.۱(۴)، ایده‌آل اول بیشینی مانند $\mathfrak{m}_i \in Max(R)$ وجود دارد به طوری که $\mathfrak{p} \in W.Coass_R(D_{\mathfrak{m}_i}(M))$. بنابر ۲۷.۱.۱(۵)، داریم $W.Coass_R(M^\vee) = \bigcup_{i=1}^{n} W.Coass_R(D_{\mathfrak{m}_i}(M))$ و از آنجا، $\mathfrak{p} \in W.Coass_R(M^\vee)$. حال اگر زیر مدول صفر M دارای یک تجزیه اولیه باشد، آنگاه بنابر ۲۵.۱.۱، $Hom_R(M, E)$ دارای یک نمایش ثانویه است. از این رو، با توجه به ۲۰.۱.۱ داریم

$$\mathfrak{p} \in W.Coass_R(M^\vee) = Att_R(Hom_R(M, E)).$$

اکنون بیدرنگ از ۲۵.۱.۱ نتیجه می گیریم که $\mathfrak{p} \in W.Ass_R(M)$ و اثبات کامل می شود. □

لم ۳۱.۱.۱. فرض کنید که M یک R-مدول با تولید متناهی باشد. بعلاوه، فرض کنید که $E = \bigoplus_{\mathfrak{m} \in Max(R)} E(R/\mathfrak{m})$ و $M^\vee = Hom_R(M, E)$. در این صورت

(۱) $W.Coass_R(M) = W.Ass_R(M^\vee)$؛

(۲) $Coass_R(M) = Ass_R(M^\vee)$.

اثبات. (۱) از آنجا که M با تولید متناهی است، با توجه به [1, Exe. 16.3] داریم $M^\vee = \bigoplus_{\mathfrak{m} \in Max(R)} D_{\mathfrak{m}}(M)$. اکنون این لم با استفاده از ۷.۱.۱ مشابه لم ۳۰.۱.۱(۱)، ثابت می شود.

(۲) با توجه به اینکه $M^\vee = \bigoplus_{\mathfrak{m} \in Max(R)} D_{\mathfrak{m}}(M)$ و $Ass_R(\bigoplus_{i \in I} M_i) = \bigcup_{i \in I} Ass_R(M_i)$ مشابه لم ۳۰.۱.۱(۱) ثابت می شود. □

لم ۳۲.۱.۱. فرض کنید که S یک حلقه جابجایی مخالف صفر باشد. در این صورت

$$W.Coass_S(S) = Coass_S(S) = Max(S).$$

اثبات. فرض کنید، $E = \bigoplus_{\mathfrak{m} \in Max(S)} E(S/\mathfrak{m})$. در این صورت به ازای هر ایده‌آل بیشین $\mathfrak{m} \in Max(S)$ داریم (ر.ک. [34])

$$W.Ass_S(E(S/\mathfrak{m})) = Ass_S(E(S/\mathfrak{m})) = \{\mathfrak{m}\}.$$

با استفاده از ۷.۱.۱ و ۳۱.۱.۱ داریم

$$W.Coass_S(S) = W.Ass_S(S^\vee) = W.Ass_S(E)$$
$$= \bigcup_{\mathfrak{m} \in Max(S)} W.Ass_S(E(S/\mathfrak{m})) = Max(S)$$

و

$$Coass_S(S) = Ass_S(S^\vee) = Ass_S(E)$$
$$= \bigcup_{\mathfrak{m}\in Max(S)} Ass_S(E(S/\mathfrak{m})) = Max(S).$$

در نتیجه

$$W.Coass_S(M) = Coass_S(M) = Max(S).$$

□

لم ۱.۱.۳۳. (ر.ک. [15, 1.4, 1.5]) فرض کنید که R یک حلقه نوتری و فرض کنید که I یک ایده‌آل از حلقه R باشد. در این صورت دنباله‌های

$$(Ass_R(R/I^n))_{n\in\mathbb{N}}$$

و

$$(Ass_R(I^{n-1}/I^n))_{n\in\mathbb{N}}$$

از مجموعه‌ها نهایتاً ایستا می باشند. مقدار نهایی این دنباله‌ها را به ترتیب با $A^*(I)$ و $B^*(I)$ نشان می دهیم.

قضیه ۱.۱.۳۴. (ر.ک. [16, 3.2]) فرض کنید که S یک حلقه جابجایی نوتری است و فرض کنید که $\phi : R \to S$ یک همریختی حلقه است. بعلاوه، فرض کنید که $\phi^* : Spec(S) \to Spec(R)$ نگاشت القاء شده توسط ϕ باشد. در این صورت به ازای هر S–مدول M داریم

$$Ass_R(M) = \phi^* Ass_S(M)$$

قضیه ۱.۱.۳۵. (ر.ک. [11, 3.1]) فرض کنید که R یک حلقه نوتری و M یک R–مدول آرتینی باشد. بعلاوه، فرض کنید که Ω یک زیر مجموعه متناهی $Max(R)$ است به طوری که $Ass_R(M) \subseteq \Omega$. اگر $E = \bigoplus_{\mathfrak{p}\in\Omega} E(R/\mathfrak{p})$ و $D(.) = Hom_R(., E)$، آنگاه $D(D(M)) = M$.

قضیه ۱.۱.۳۶. (ر.ک. [4, 3.3]) فرض کنید که R یک حلقه نوتری و M یک R–مدول آرتینی باشد. فرض کنید که P یک R–مدول باشد به طوری که نسبت به M پروژکتیو است. در این صورت $Hom_R(P, M)$ دارای نمایش ثانویه است و داریم

$$Att_R(Hom_R(P,M)) = \{\mathfrak{p} \in Att_R(M) : \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q} \text{ ،} \mathfrak{q} \in Coass_R(P) \text{ به ازای یک } \}.$$

تعریف ۱.۱.۳۷. (ر.ک. [25, 1.1]) فرض کنید که R یک حلقه نوتری و I یک ایده‌آل از R است. $x \in R$ را روی I وابستهٔ صحیح [16] گوییم اگر $n \in \mathbb{N}$ و $c_1, c_2, ..., c_n \in R$ که $c_i \in I^i$ به ازای هر $1 \le i \le n$، چنان موجود باشند که

[16] integrally dependent

$$x^n + c_1 x^{n-1} + ... + c_{n-1} x + c_n = 0.$$

مجموعه تمام عضوهایی از R که وابستهٔ صحیح روی I می باشند یک ایده‌آل از R است. این ایده‌آل را با I^- نمایش می دهیم و آن را بستار صحیح[17] I گوییم.

فرض کنید که I و J ایده‌آل‌های R باشند. I را یک کاهش[18] J گویند اگر $I \subseteq J$ و بعلاوه یک $n \in \mathbb{N}$، چنان موجود باشد که $IJ^n = J^{n+1}$. مجموعهٔ تمام ایده‌آل‌های شامل I که I یک کاهش آنها می باشد، دارای یک عضو بیشین منحصر به فرد است. این عضو بیشین منحصر به فرد، برابر I^- می باشد.

قضیه ۳۸.۱.۱. (ر.ک. [22, 2.7]) فرض کنید که R یک حلقه نوتری و I یک ایده‌آل R باشد. در این صورت دنباله‌های

$$(Ass_R(R/(I^n)^-))_{n \in \mathbb{N}}$$

و

$$(Ass_R((I^{n-1})^-/(I^n)^-))_{n \in \mathbb{N}}$$

از مجموعه‌ها صعودی و نهایتاً ایستا می باشند. مقدار نهایی این دنباله‌ها را به ترتیب با $AS^-(I,R)$ و $BS^-(I,R)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۳۹.۱.۱. (ر.ک. [29, 1.2]) فرض کنید که M یک R–مدول نوتری باشد. فرض کنید که I و J ایده‌آل‌های از R باشند. در این صورت I را یک کاهش J وابسته به مدول نوتری M گوییم اگر $I \subseteq J$ و بعلاوه یک $n \in \mathbb{N}$، چنان موجود باشد که $IJ^nM = J^{n+1}M$.

$x \in R$ را روی I نسبت به مدول نوتری M وابستهٔ صحیح گوییم. $n \in \mathbb{N}$، چنان موجود باشد که

$$x^n M \subseteq \sum_{i=1}^{n} x^{n-i} I^i M.$$

همچنین مجموعه تمام عضوهایی از R که روی I نسبت به M وابستهٔ صحیح می باشند یک ایده‌آل از R است. این ایده‌آل را با $I^{-(M)}$ نشان داده و آن را بستار صحیح وابسته به مدول نوتری M از I می نامیم. $I^{-(M)}$ بزرگترین ایده‌آل شامل I است که I یک کاهش وابسته به M از آن می باشد.

تذکر ۴۰.۱.۱. (ر.ک. [29, 1.6]) فرض کنید که M یک R–مدول نوتری باشد. فرض کنید برای هر ایده‌آل I از حلقه R، $\overline{I}$ ایده‌آل $(I + (0 :_R M))/(0 :_R M)$ از حلقه $\overline{R} = R/(0 :_R M)$ را نشان دهد. در این صورت

$$I^{-(M)} \supseteq (0 :_R M) \quad \text{و} \quad (\overline{I})^- = I^{-(M)}/(0 :_R M)$$

[17] integral closure
[18] reduction

قرار داد ۴۱.۱.۱. (ر.ک. [2, 1.1, 2.5]) فرض کنید که R یک حلقه نوتری است و فرض کنید I یک ایده‌آل از حلقه R باشد. فرض کنید $T \subseteq Spec(R)$. اگر I یک ایده‌آل سره از R باشد، آنگاه $I(T)$ برابر اشتراک تمام جملاتی از یک تجزیه اولیهٔ کمین[۱۹] I است که هر یک از آنها مشمول در حداقل یک عضو از T می باشند. اشتراک یک خانواده تهی از ایده‌آل‌های R، خود R فرض شده و اگر $I = R$ آنگاه $I(T)$، برابر R تعریف می شود. این تعریف از انتخاب تجزیه اولیهٔ کمین I مستقل است. $I(\{\mathfrak{p}\})$ را با $I(\mathfrak{p})$ نشان می دهند. بدیهی است که $I(\mathfrak{p}) = (IR_{\mathfrak{p}})^c$ که در آن $(IR_{\mathfrak{p}})^c$ حاصل تحدید $(IR_{\mathfrak{p}})$ تحت همریختی طبیعی $R \to R_{\mathfrak{p}}$ است. به راحتی می توان دید که برای هر ایده‌آل I و J از حلقه R، $I(T) = \bigcap\limits_{\mathfrak{p} \in T} I(\mathfrak{p})$ و $(I \cap J)(T) = I(T) \cap J(T)$.

تذکر ۴۲.۱.۱. (ر.ک. [2, 1.4]) فرض کنید که R یک حلقه نوتری است. فرض کنید، $\mathfrak{p} \in Spec(R)$ و $E = E(R/\mathfrak{p})$. در این صورت

۱) R–مدول E دارای یک ساختار $R_{\mathfrak{p}}$–مدولی است؛

۲) اگر I یک ایده‌آل از R باشد، آنگاه $(\circ :_E I) = (\circ :_E I^e) = (\circ :_E I^{ec})$، که I^e توسیع I و I^{ec} تحدید I^e تحت همریختی طبیعی $R \to R_{\mathfrak{p}}$ می باشند.

اثبات. (۱) بنابر [14, 3.2(2)]، به ازای هر $s \in R\backslash\mathfrak{p}$ همریختی $s : E \to E$ یک خود ریختی بر E است. به ازای هر $r \in R$ و $s \in R\backslash\mathfrak{p}$، $(r/s)e = e'$ که در آن e' عضو منحصر بفردی از E است و $re = se'$. بدینوسیله E یک ساختار $R_{\mathfrak{p}}$–مدولی می پذیرد.

(۲) فرض کنید که $x \in (\circ :_E I)$ و $a \in I^e = IR_{\mathfrak{p}}$. در این صورت به ازای یک $r \in I$ و $s \in R\backslash\mathfrak{p}$، $a = r/s$. از این رو، $(r/s)x = (\text{۱}/s)(rx) = \circ$ و در نتیجه $x \in (\circ :_E I^e)$. بنابر این $(\circ :_E I) \subseteq (\circ :_E I^e)$. اثبات عکس این شمول بدیهی است و لذا $(\circ :_E I) = (\circ :_E I^e)$. برای اثبات $(\circ :_E I^e) = (\circ :_E I^{ec})$ کافی است توجه کنیم که

$$(\circ :_E I^{ec}) = (\circ :_E I^{ece}) = (\circ :_E I^e).$$

□

لم ۴۳.۱.۱. (ر.ک. [2, 1.6]) فرض کنید که R یک حلقه نوتری است و فرض کنید، I و J ایده‌آل‌های R باشند. فرض کنید، $\mathfrak{p} \in Spec(R)$ و $E = E(R/\mathfrak{p})$. در این صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند.

۱) $(\circ :_E J) \subseteq (\circ :_E I)$؛

۲) $IR_{\mathfrak{p}} \subseteq JR_{\mathfrak{p}}$؛

۳) $I(\mathfrak{p}) \subseteq J(\mathfrak{p})$.

---

[۱۹] minimal primary decomposition