وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوازنگ - زنجان

پوشش ریسک چندکی در بازارهای مالی

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

عین اله میرزائی

استاد راهنما: دکتر حسن داداشی

استاد مشاور: دکتر منوچهر ذاکر

مهر ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به:

نگاه مهربان پدر و چشمان منتظر مادرم

که الفبای زندگی را به من آموختند

و همسر عزیزم

به پاس زحمات فراوان والطاف بی‌پایانش...

قدردانی و تشکر

منت خدای را عز و وجل، که طاعتش موجب قربت است و به شکر اندرش مزید نعمت.

شکر و سپاس خدای مهربان را که توفیق علم آموختن به من عطا فرمود تا راه پر گشودن اندیشه‌هایم را با بال قلم نمایان سازم.

در ابتدا بر خود لازم می‌دانم از زحمات و راهنماییهای استاد ارجمندم جناب آقای دکتر حسن داداشی تشکر کنم واز خداوند متعال برای ایشان آرزوی توفیق روزافزون دارم. همچنین از اساتید ارجمندم در طول دوره، دکتر علی فروش باستانی، دکتر آرش فهیم و دکتر علی آقامحمدی که در پیمودن این راه مرا یاری نمودند تقدیر و تشکر می‌کنم.

از زحمات خانواده‌ام که در این مدت همواره پشتیبان من بوده‌اند و از تمام دوستان وهمکلاسی‌های مهربانم مجتبی شاکری، زانیار احمدی، شهاب نانکلی، علی صادقی،منصور عیوضی، زهرا احمدی و بهناز قربانلو تشکر وقدردانی می‌کنم.

در نهایت از جناب آقای پروفسور ثبوتی به خاطر فراهم کردن محیط علمی مناسب در دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه‌ی زنجان تقدیر و تشکر می‌کنم وبرای ایشان آرزوی سلامتی دارم.

عین‌اله میرزایی

مهر ۹۰

چکیده

در بازارهای مالی یک سرمایه‌گذار با مطالبات مشروط روبرو است که می‌خواهد این ریسک را پوشش دهد و این پوشش ریسک برای سرمایه‌گذار غالباً هزینه زیادی به همراه دارد. در بازار کامل، اندازه مارتینگل یکتاست و هر مطالبه‌ی مشروطی قابل دسترسی است و می‌توان آن را با یک استراتژی خودتأمین جایگزین کرد. اما در بازار ناکامل، اندازه مارتینگل یکتا نیست وهر مطالبه‌ی مشروط قابل دسترسی نیست، بنابراین باید از ابر–پوشش استفاده کرد که برای این کار سرمایه اولیه‌ی بیشتری مورد نیاز است.

در این پایان نامه برای پوشش ریسک مطالبات مشروط از روش پوشش ریسک چندکی استفاده می‌کنیم که یک موضوع مهم در ریاضیات مالی به حساب می‌آید و زمانی که پوشش ریسک به‌طور کامل امکان‌پذیر نیست این روش نقش مهمی در بازارهای ناکامل ایفا می‌کند. در پوشش ریسک چندکی هدف این است که با سرمایه‌ی کمتری، ریسک را کاهش داده و احتمال موفقیت پوشش ریسک ماکسیمم شود. در پایان، پوشش ریسک کارا و قیمت گذاری قراردادهای بیمه‌ی عمر وابسته به دارایی را مطرح می‌کنیم که پرداخت نهایی این بیمه‌نامه‌ها به چندین کالای ریسکی وابسته است و در ادامه از پوشش ریسک کارا برای مینیمم کردن ریسک ریزش استفاده می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: پوشش ریسک، ابر–پوشش، لم نیمن– پیرسن، ارزش در معرض خطر، ریسک ریزش.

فهرست

۳ پوشش ریسک کارا

۴ پوشش ریسک و قیمت گذاری قراردادهای بیمه عمر وابسته به دارایی

مقدمه

مسئله‌ی قیمت گذاری و پوشش ریسک مطالبات مشروط [۱] در بازارهای کامل به خوبی قابل فهم است و هر مطالبه‌ی مشروط به عنوان یک متغیر تصادفی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ در نظر گرفته می‌شود. در حالتی که بازار کامل است هر مطالبه‌ی مشروطی قابل دسترسی است و آن را می‌توان با یک استراتژی تجاری خودتأمین [۲] جایگزین کرد. هزینه این جایگزینی برابر قیمت مطالبه است که آن را می‌توان به عنوان مطالبه مورد انتظار تحت اندازه مارتینگل هم‌ارز یکتا محاسبه کرد.

در بازارهای ناکامل اندازه مارتینگل هم‌ارز یکتا نیست و هر مطالبه‌ی مشروطی قابل دسترسی نیست و با خود ریسک ذاتی به همراه دارد. یک بازه از قیمت‌های بدون آربیتراژ وجود دارد که با مقادیر مورد انتظار تحت اندازه‌های مارتینگل هم‌ارز مختلف داده شده است. در بازار ناکامل ممکن است یک سرمایه‌گذار با استفاده از استراتژی ابر–پوشش [۳] روی خط امن بماند که این روش توسط ال کاروئی [۴] و کیونیز[۵] در سال ۱۹۹۵ و کاراتزاس [۶] در سال ۱۹۹۷ بیان شد [۱] و [۲]. از نقطه نظر علمی هزینه‌ی پوشش ریسک فوق‌العاده غالباً زیاد است و با سوپریمم مقادیر مورد انتظار روی همه اندازه‌های مارتینگل هم‌ارز داده شده است. در بازار مالی کامل هم تعداد زیادی از سرمایه‌گذاران نمی‌خواهند به‌طور کامل پوشش ریسک انجام دهند زیرا این امر به‌طور کامل فرصت ساختن یک سود توأم با خطر ضرر را می‌گیرد و همچنین مقدار سرمایه‌ی قابل دسترس برای یک سرمایه‌گذار اغلب محدود است به‌همین خاطر سرمایه‌گذار به دنبال تخصیص کارایی از سرمایه، برای شرکت کردن در فرصت‌های شغلی زیادی است که می خواهد مجموع ریسک تجارت را هم کنترل کند.

فرض کنید سرمایه‌گذار برای بالا بردن سرمایه اولیه مورد نیاز برای پوشش کامل یا ابر–پوشش ناراضی است و آماده است مقداری ریسک بپذیرد. بیشترین احتمال موفقیت پوشش ریسک که سرمایه‌گذار می‌تواند با یک

[۱] Contingent Claim

[۲] Self-financing

[۳] Superhedging

[۴] El Karoui

[۵] Quenez

[۶] Karatzas

مقدار کمتر به آن نائل شود چیست؟ یا به‌طور معادل، یک سرمایه‌گذار با قبول یک احتمال ریزش[۷] قطعی، چه مقدار سرمایه اولیه بایستی کنار بگذارد؟

در این پایان نامه هدف ساختن یک استراتژی پوشش ریسک است که احتمال موفقیت پوشش تحت اندازه P و قید داده شده روی هزینه مورد نیاز، ماکسیمم شود. به‌طور معادل می‌توان یک کران ϵ ثابت برای احتمال ریزش در نظر گرفت و هزینه‌ی استراتژی‌های پوشش ریسک را مینیمم کرد به‌طوری که احتمال پوشش مطالبات حداقل $\epsilon - ۱$ باشد. این مفهوم «پوشش ریسک چندکی[۸]» است که می‌توان آن را به عنوان یک نسخه دینامیکی از خانواده «ارزش در معرض خطر[۹]» در نظر گرفت. زمانی که در VaR یک سطح اطمینان ۹۹٪ انتخاب می‌شود مقدار سرمایه‌ی مورد نیاز برای رسیدن به این سطح در روش استاتیکی VaR کمتر است زیرا استراتژی‌های دینامیکی اجازه دارند برای تغییرات قیمت کالای ضمیمه واکنش نشان دهند. در زمینه مدل بلک– شولز[۱۰] ایده‌ی پوشش ریسک چندکی اولین بار در مارس ۱۹۹۵ در مؤسسه ایزاک نیوتن توسط دیوید هیت[۱۱] مطرح شد [۳].

درفصل اول به بیان مفاهیم و مقدمات مورد نیاز در این پایان‌نامه از قبیل مارتینگل زمان گسسته و پیوسته، فرآیند وینر، لم نیمن–پیرسن، بازارهای مالی، قراردادهای اختیار و سبد خود تأمین می‌پردازیم.

در فصل دوم بازار کامل را در نظر می‌گیریم که اندازه مارتینگل هم‌ارز P^* یکتاست و مسئله‌ی پوشش ریسک چندکی به‌طور سرراست حل شده است. برای سادگی روش کالدورف[۱۲] را به کار می‌بریم. در گام اول یک مجموعه با بیشترین احتمال تعیین می‌کنیم تحت قیدی که هزینه پوشش ریسک مطالبات داده شده روی مجموعه در یک کران داده شده صدق می‌کند. با استفاده از لم نیمن– پیرسن[۱۳] این مجموعه به عنوان یک آزمون بهینه در نظر گرفته شده، که با اندازه P داده شده است. در گام دوم تمام مدل را برای جایگزین کردن اختیار برخورد– خروج[۱۴] به کار می‌بریم که با مطالبات منحصر به این مجموعه به‌دست آمده است. این استراتژی احتمال موفقیت پوشش ریسک را ماکسیمم می‌کند.

[۷] Shortfall
[۸] Quantile hedging
[۹] Value at risk
[۱۰] Black-Scholes
[۱۱] David Heath
[۱۲] Kulldorf
[۱۳] Neyman-Pearson
[۱۴] Knock-out option

در ادامه فصل دوم بازار ناکامل را در نظر می‌گیریم و استراتژی پوشش فوق‌العاده را به کار می‌بریم که با لم نیمن– پیرسن برای فرضیه‌های مرکب، ترکیب شده است یعنی برای مطالبه داده شده H، استراتژی بهینه در پوشش ریسک فوق‌العاده مطالبات اصلاح شده $H\varphi$ شامل شده است که در آن φ آزمون بهینه تصادفی است که با لم نیمن– پیرسن توضیح داده شده است. برای روشن ساختن رویکردمان، استراتژی پوشش ریسک چندکی را برای یک اختیار خرید[۱۵] در مدل‌های مختلف که قیمت کالای ضمیمه نوسان دارد محاسبه می‌کنیم.

در بازار کامل حرکت براونی هندسی[۱۶] با نوسان معلوم، و در بازار ناکامل، مدل بلک شولز که در آن نوسان تابعی از پرش تصادفی است مورد استفاده قرار می‌گیرد. روش استاتیک VaR، مفهوم دینامیکی پوشش ریسک چندکی را مورد انتقاد قرار می‌دهد زیرا آن اندازه ریزش را به حساب نیاورده، فقط احتمال اتفاق افتادن را مشخص می‌کند. به عبارت دیگر ما ریزش را در شرایط خیلی ساده برای تابع‌های ضرر ارزیابی می‌کنیم. در ادامه اشاره می‌کنیم چگونه این روش می‌تواند برای تابع‌های ضرر در حالت کلی گسترش یابد. یک بحث سیستماتیک از حالت گسترش یافته در حالت کامل و ناکامل در فولمر و لو کرت[۱۷] [۴] مورد مطالعه قرار گرفته است. در پایان هدف این است که این روش را به شکل ساده بیان کنیم.

در فصل سوم استراتژیهایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که ریسک ریزش را مینیمم کرده و طرز برخورد سرمایه‌گذار نسبت به ریزش را برحسب تابع ضرر L توضیح می‌دهند. هدف این است که خطر ریزش با توجه به قید سرمایه مینیمم شود. به جای مینیمم کردن خطر ریزش می توان یک کران روی خطر ریزش در نظر گرفت و هزینه را مینیمم کرد. به عبارت دیگر استراتژی پوشش ریسکی را جستجو می کنیم که کارا هستند و توسط ریسک ریزش و سرمایه اولیه تعریف شده‌اند. پوشش ریسک کارا به سرمایه گذار اجازه می‌دهد که بین پوشش ریسک کامل و بدون پوشش ریسک یک روش اصولی برای سطح قابل قبول ریسک ریزش انتخاب کند. در ادامه مسئله بهینه‌سازی را برای مطالبه مشروط H در حالت کلی تعریف می‌کنیم. استراتژی بهینه در پوشش ریسک مطالبات اصلاح شده $\widetilde{H} = H\widetilde{\varphi}$ شامل می شود که درآن $\widetilde{\varphi}$ آزمون تصادفی و مقداری بین $[\circ, ۱]$ است.

در فصل چهارم، پوشش ریسک کارا[۱۸] برای قراردادهای بیمه عمر وابسته به دارایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که در دهه گذشته با گسترش بازارهای جدید در اروپا و آسیا رشد کرده است. پرداخت نهایی چنین

[۱۵] Call option

[۱۶] Geometric Brownian motion

[۱۷] Follmer and- Leu Kert

[۱۸] Efficient hedging

بیمه نامه‌هایی به دو عامل وابسته است: یکی ارزش اسناد مالی و دیگری پیشامد نوع بیمه در زندگی دارنده‌ی قرارداد (فوت، بازنشستگی و...). به این ترتیب پرداخت نهایی شامل کالاهای مالی و عناصرریسک بیمه است که باید قیمت گذاری شود، بنابراین حق بیمه برای خریدار و فروشنده‌ی قرارداد منصفانه است.

دراین فصل هدف این است که چگونه پوشش ریسک کارا را برای مینیمم کردن ریسک ریزش مورد استفاده قرار دهیم، زمانی که قراردادهای بیمه‌ی عمر وابسته به دارایی روی چندین کالای ریسکی نوشته شده است. ریسک ریزش که بر حسب تابع ضرر وزن دهی شده است ترجیحات ریسک پوشش دهنده را منعکس می‌کند و عبارتهای ترجیحات ریسک و تابع ضرر طرز برخورد پوشش دهنده‌ی ریسک را نسبت به ریسک بازار مالی نشان می‌دهد. در ادامه این فصل کاربرد پوشش ریسک کارا در زمینه بیمه را گسترش داده و نشان می‌دهیم این روش سودمند بوده وامکاناتی برای مدیریت ریسک فراهم می‌آورد که نه تنها برای دانشگاهیان بلکه برای شاغلین در صنعت بیمه نیز قابل فهم و قابل توجیه هستند و شرکت‌های بیمه می‌توانند ریسک‌های مالی ناشی از نوسانات بازار و مرگ و میر مشتریان را ارزیابی و مدیریت کنند.

در پایان مثال‌های عددی روشنی از پوشش ریسک کارا برای ترجیحات مختلف ریسک (ریسک‌پذیر، ریسک‌گریز و ریسک خنثی) آورده شده است.

فصل اول

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ مفاهیم احتمالاتی

در این قسمت به تعریف برخی از مفاهیم احتمالاتی مورد نیاز در این پایان نامه می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱.۱ در فضای ناتهی Ω، کلاس F از زیرمجموعه‌های Ω، را میدان[۱] گوییم اگر شامل Ω باشد و تحت عمل مکمل‌گیری[۲] و اجتماع متناهی[۳] بسته باشد.

تعریف ۲.۱.۱ کلاس F از زیرمجموعه‌های Ω را سیگما– میدان[۴] گوییم هرگاه F میدان باشد و علاوه بر آن تحت عمل اجتماع شمارش‌پذیر بسته باشد.

تعریف ۳.۱.۱ تابع P روی F را تابع اندازه احتمال[۵] گوییم اگر شرایط زیر برای آن برقرار باشد:

---

[۱] field

[۲] formation of complements

[۳] finite unions

[۴] σ-field

[۵] probability measure

۱) برای هر $A \in F$، $0 \leq P(A) \leq 1$ باشد،

۲) $P(\varnothing) = 0$ و $P(\Omega) = 1$ باشد.

۳) اگر $\{A_1, A_2, \dots\} \in F$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های مجزا از هم باشند به‌طوری که اگر $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in F$ باشد، آن‌گاه داشته باشیم

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k),$$

حال اگر P تابع اندازه احتمال و F سیگما- میدان روی فضای ناتهی Ω باشد در این صورت سه‌تایی (Ω, F, P) را یک فضای احتمال می‌نامیم[۶].

تعریف ۴.۱.۱ تابع حقیقی مقدار f روی Ω را اندازه‌پذیر[۷] ($F-$ اندازه‌پذیر) گوییم هرگاه برای هر $A \in \mathbb{R}$ تساوی $f^{-1}(A) = \{w : f(w) \in A\} \in F$ برقرار باشد.

تابع حقیقی اندازه‌پذیر روی (Ω, F, P) را یک متغیر تصادفی می‌گوییم فرض می‌کنیم X یک متغیر تصادفی روی فضای احتمالاتی (Ω, F, P) و $\mathcal{G}$ سیگما- میدان داده شده در F باشد.

تعریف ۵.۱.۱ امید ریاضی متغیر تصادفی X، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$E[X] = \int_{\Omega} X dP,$$

همچنین متغیر تصادفی $E[X|\mathcal{G}]$ با خصوصیات زیر وجود دارد:

* $E[X|\mathcal{G}]$، $\mathcal{G}$ اندازه‌پذیر است.

* $E[X|\mathcal{G}]$ برای هر $G \in \mathcal{G}$ در تساوی $\int_G E[X|\mathcal{G}]dP = \int_G X dP$ صدق می‌کند.

---

[۶] probability space

[۷] measurable

تعریف ۶.۱.۱ متغیر تصادفی $E[X|\mathcal{G}]$ را امید شرطی X به شرط $\mathcal{G}$ می‌گوییم.

فرض کنید T مجموعه‌ای از نقطه‌های زمانی باشد، در این صورت مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی به صورت

$$\{X(t),\ t \in T\} = \{X(t,w),\ t \in T,\ w \in \Omega\}$$

را یک فرآیند تصادفی روی Ω می‌نامیم.

تعریف ۷.۱.۱ مجموعه‌ی $\{F_t, t \geq ۰\}$ را یک فیلتر[۸] می‌نامیم هرگاه برای هر $t \geq s \geq ۰$ رابطه $F_s \subseteq F_t$ برقرار باشد.

تعریف ۸.۱.۱ فرآیند تصادفی $(X(t), t \geq ۰)$ مارتینگل زمان پیوسته[۹] نسبت به فیلتر F_t است اگر در شرایط زیر صدق کند:

۱) برای هر $t \geq ۰$، $E[|X(t)|] < \infty$.

۲) $X(t)$، F_t- اندازه‌پذیر باشد.

۳) برای هر $t \geq s \geq ۰$، $E[X(t) \mid F_s] = X(s)$.

تعریف ۹.۱.۱ فرآیند تصادفی $\{X(n),\ n = ۰, ۱, \ldots\}$ مارتینگل زمان گسسته[۱۰] نسبت به فیلتر $\{F_n,\ n = ۰, ۱, \ldots\}$ است اگر در شرایط زیر صدق کند:

۱) برای هر $n = ۰, ۱, \ldots$، $E[|X(n)|] < \infty$.

۲) $X(n)$، F_n- اندازه‌پذیر باشد.

---

[۸] filtration

[۹] continuous-time Martingale

[۱۰] discrete-time Martingale

۳) برای هر $n = 0, 1, \ldots$، $E[X(n+1) \mid F_n] = X(n)$.

تعریف ۱۰.۱.۱ فرآیند تصادفی $\{W(t),\ t \geq 0\}$ را حرکت براونی[11] یا فرآیند وینر[12] گوییم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱) با احتمال یک $W(0) = 0$.

۲) $W(t) - W(s)$ برای هر $t \geq s \geq 0$ دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $\sigma^2(t-s)$ باشد.

۳) برای هر $t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n$ تفاضلات

$$W(t_2) - W(t_1),\ W(t_3) - W(t_2), \ldots, W(t_n) - W(t_{n-1})$$

از هم مستقل باشند.

فرآیند $\gamma(t) = \mu t + \sigma W(t)$ را حرکت براونی بارانش[13] می‌نامیم.

تعریف ۱۱.۱.۱ فرآیند $S(t) = e^{\mu t + \sigma W(t)}$ را حرکت براونی هندسی می‌نامیم و آن را با نماد $\mathrm{GBM}(\mu, \sigma)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۲.۱.۱ فرآیند تصادفی $\{X(n),\ n = 0, 1, \ldots\}$ سوپر مارتینگل[14] است اگر در شرایط زیر صدق کند:

$$E\left[X(n+1) \mid X(1), X(2), \ldots, X(n)\right] \leq X(n).$$

---

[11] Brownian motion
[12] Wiener process
[13] drift
[14] super Martingale

تعریف ۱۳.۱.۱ اگر X یک متغیر تصادفی و φ تابعی محدب باشد در این صورت نامساوی ینسن[۱۵] به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\varphi(E[X]) \leq E[\varphi(X)].$$

تعریف ۱۴.۱.۱ فرآیند حقیقی مقدار X را روی فضای احتمال (Ω, F, P) شبه مارتینگل[۱۶] گوییم اگر آن را بتوان به صورت مجموع یک مارتینگل موضعی و یک فرآیند سازگار با تغییر متناهی نوشت:

$$X_t = M_t + A_t.$$

قضیه ۱۵.۱.۱ قضیه تجزیه اختیاری[۱۷]:

فرض کنیم $V = (V_t)_{t\geq \circ}$ یک فرآیند مثبت باش‌د. در این صورت V یک سوپر مارتینگل است اگر و فقط اگر یک فرآیند قابل پیش‌بینی ξ و یک فرآیند صعودی سازگار C وجود داشته باشد که:

$$V_t = V_\circ + \int_\circ^t \xi_s dX_s - C_t, \qquad t \geq \circ$$

برهان. برای اثبات رجوع شود به [۵].

آزمون فرضهای آماری

فرض آماری گزاره‌ای درباره‌ی پارامتر θ است که ممکن است درست یا نادرست باشد. فرضی که می خواهیم آن را آزمون کنیم فرض صفر می‌نامیم و آن را با $H_\circ$ نشان می‌دهیم و فرضی را که در برابر $H_\circ$ باشد فرض مقابل می‌نامیم و آن را با $H_۱$ نشان می‌دهیم.

آزمون یک فرض آماری عبارت از به کار گرفتن مجموعه قواعد صریحی است که تصمیم بگیریم آیا فرض صفر

---

[۱۵] Jensen's inequality

[۱۶] semi martingale

[۱۷] optional decom position

را بپذیریم یا آن را به نفع فرض مقابل رد کنیم. به عنوان مثال فرض کنید آماردانی می‌خواهد فرض صفر $H_0 : \theta = \theta'$ را در برابر فرض مقابل $H_1 : \theta = \theta''$ آزمون کند. برای این کار وی به تولید داده‌های نمونه‌ای از طریق ترتیب دادن یک آزمایش و سپس محاسبه‌ی مقدار یک آماره‌ی آزمون θ دست می‌زند که این آماره به او خواهد گفت که به ازای هر برآمد ممکن فضای نمونه‌ای چه اقدامی بکند. بنابراین روش آزمون، فضای نمونه ای را به دو مجموعه افراز می‌کند: یک ناحیه قبول برای H_0 و یک ناحیه رد برای H_0 .

روش بالا ممکن است به دو نوع خطا منجر شود:

۱. اگر H_0 درست باشد و آن را به ناحق رد کنیم مرتکب خطایی می‌شویم که آن را خطای نوع اول نامیده و با α نشان می‌دهیم.

۲. اگر H_1 درست باشد و آن را به ناحق رد کنیم مرتکب خطای نوع دوم می‌شویم که آن را با β نشان می‌دهیم.

معمولاً به ناحیه رد H_0 ناحیه بحرانی آزمون، و به احتمال بدست آوردن مقداری برای آماره آزمون در داخل ناحیه بحرانی، وقتی که H_0 درست باشد اندازه ناحیه بحرانی می‌گوییم. بدین ترتیب، اندازه یک ناحیه بحرانی صرفاً احتمال مرتکب شدن خطای نوع اول است. این احتمال، سطح معنی‌دار بودن آزمون هم نامیده می‌شود.

در نظریه آزمون فرض که امروزه با عنوان نظریه کلاسیک یعنی نظریه لم نیمن– پیرسن از آن یاد می‌شود، مشکل وابستگی بین احتمالهای خطای نوع اول و دوم را با محدود کردن خود به ناحیه‌های بحرانی که برای آنها احتمال خطای نوع اول کمتر از یا مساوی α است چاره می‌کنیم. به عبارت دیگر خود را به ناحیه های بحرانی با اندازه‌های کمتر از یا مساوی α محدود می‌کنیم. در این صورت، احتمال خطای نوع اول را ثابت نگه می‌داریم و به دنبال ناحیه بحرانی می‌گردیم که احتمال خطای نوع دوم، یا معادل آن، کمیت $1-\beta$ را ماکسیمم کند. در موقع آزمون فرض صفر $H_0 : \theta = \theta'$ در برابر فرض مقابل $H_1 : \theta = \theta''$ کمیت $1-\beta$ را توان آزمون می‌نامیم. یک ناحیه بحرانی آزمون فرض ساده $H_0 : \theta = \theta'$ در مقابل فرض $H_1 : \theta = \theta''$ را بهترین یا تواناترین می‌نامند هرگاه توان آزمون در $H_1 : \theta = \theta''$ ماکسیمم باشد.

لم نیمن–پیرسن

فرض کنید می‌خواهیم فرض ساده $H_0 : \theta = \theta'$ را در مقابل فرض دیگر $H_1 : \theta = \theta''$ آزمون کنیم که در آن θ پارامتر مورد علاقه و θ' و θ'' مقادیر ویژه از θ هستند.

نمونه‌های تصادفی $(X_1,\ldots,X_n)$ را در نظر می‌گیریم که دارای تابع چگالی $f(x,\theta)$ هستند. فرض H_0 رد می‌شود اگر $(X_1,\ldots,X_n)\in C$ که در آن C یک ناحیه n بعدی است و ناحیه بحرانی[18] نامیده می‌شود می‌گوییم ناحیه بحرانی C از اندازه α است اگر احتمال خطای نوع I، α باشد:

$$P[(X_1,\ldots,X_n)\in C : H_0]=\alpha$$

گوییم C بهترین ناحیه بحرانی از اندازه α است اگر برای هر زیرمجموعه A از فضای نمونه داشته باشیم:

$$P[(X_1,\ldots,X_n)\in C : H_1]\geq P[(X_1,\ldots,X_n)\in A : H_1]$$

تابع چگالی احتمال مشترک X_1، ... X_n را با L نشان می‌دهیم که تابع درست نمایی[19] نامیده می‌شود:

$$L(\theta)=f(x_1,\theta)f(x_2,\theta)\cdots f(x_n,\theta)$$

و نسبت درست نمایی را به صورت $\frac{L(\theta')}{L(\theta'')}$ تعریف می‌کنیم که به عنوان اندازه احتمال H_0 نسبت به H_1 است. با استفاده از لم نیمن– پیرسن[20] می‌توانیم بهترین ناحیه بحرانی را پیدا کنیم.

لم ۱.۱.۱۶ اگر $k>0$ و C یک زیرمجموعه از فضای نمونه باشد به‌طوری که

$$\frac{L(\theta')}{L(\theta'')}\leq k,\qquad (x_1,\ldots,x_n)\in C \tag{۱.۱}$$

$$\frac{L(\theta')}{L(\theta'')}\geq k,\qquad (x_1,\ldots,x_n)\in C' \tag{۲.۱}$$

$$\alpha=P[(X_1,\ldots,X_n)\in C : H_0] \tag{۳.۱}$$

در این صورت C بهترین ناحیه بحرانی با اندازه α برای آزمون فرض ساده $H_0 : \ \theta=\theta'$ در برابر فرض مقابل $H_1 : \ \theta=\theta''$ است.

مثال. فرض کنید $X_1,\ldots,X_n$ نمونه تصادفی از یک توزیع برنولی با احتمال موفقیت p باشد و می‌خواهیم آزمون فرض $H_0 : p=p_0$ را در مقابل فرض $H_1 : p=p_1$ انجام دهیم.

[18] critical region

[19] likelihood function

[20] Neyman-Pearson Lemma

برای این کار قرار می‌دهیم: $T = X_۱ + X_۲ + \ldots + X_n$. در این صورت داریم:

$$\Lambda = \frac{L(p_\circ)}{L(p_۱)} = \frac{\prod_{i=۱}^{n} p_\circ^{X_i}(۱-p_\circ)^{۱-X_i}}{\prod_{i=۱}^{n} p_۱^{X_i}(۱-p_۱)^{۱-X_i}} = \frac{p_\circ^{\sum_{i=۱}^{n} X_i}(۱-p_\circ)^{n-\sum_{i=۱}^{n} X_i}}{p_۱^{\sum_{i=۱}^{n} X_i}(۱-p_۱)^{n-\sum_{i=۱}^{n} X_i}} = \frac{p_\circ^T(۱-p_\circ)^{n-T}}{p_۱^T(۱-p_۱)^{n-T}}$$

$$= (\frac{p_\circ}{p_۱})^T(\frac{۱-p_\circ}{۱-p_۱})^{n-T} = (\frac{۱-p_\circ}{۱-p_۱})^n(\frac{p_\circ(۱-p_۱)}{p_۱(۱-p_\circ)})^T$$

با توجه به رابطه بالا دو حالت وجود دارد:

۱. اگر $p_\circ < p_۱$ باشد در این صورت $۱-p_\circ > ۱-p_۱$ و درنتیجه داریم: $۰ < \frac{p_\circ(۱-p_۱)}{p_۱(۱-p_\circ)} < ۱$ و شرط $\Lambda \leq k$ برای تعدادی k^* با شرط $T \geq k^*$ معادل است. بنابراین بهترین معیار برای رد فرض $H_\circ$ زمانی است که $T \geq k^*$ و k^* به نحوی انتخاب شود که احتمال $P(T \geq k^* | p = p_\circ)$ سطح مطلوب معناداری شود.

۲. اگر $p_\circ > p_۱$ باشد در این صورت $۱-p_\circ < ۱-p_۱$ و درنتیجه داریم: $\frac{p_\circ(۱-p_۱)}{p_۱(۱-p_\circ)} > ۱$ و شرط $\Lambda \leq k$ برای تعدادی k^* با شرط $T \leq k^*$ معادل است. بنابراین بهترین معیار برای رد فرض $H_\circ$ زمانی است که $T \leq k^*$ و k^* به نحوی انتخاب شود که احتمال $P(T \leq k^* | p = p_\circ)$ سطح مطلوب معناداری شود.

۲.۱ مفاهیم و ابزارهای مالی

با تقسیم کل سیستم اقتصاد یک کشور به دو بخش واقعی و مالی، بخش مالی را می‌توان به عنوان زیر مجموعه‌ای از نظام اقتصادی تعریف کرد که در آن وجوه، اعتبارات و سرمایه در چارچوب قوانین و مقررات مشخص از طرف پس‌اندازکنندگان و صاحبان پول و سرمایه به طرف متقاضیان، جریان می‌یابد.

بازارهای مالی نیز بازارهایی هستند که در آنها دارایی‌های مالی مبادله می‌شوند. دارایی‌های مالی مثل سهام و اوراق قرضه هستند که ارزش آنها به ارزش تولیدات و خدمات ارائه شده توسط شرکتهای منتشر کننده آنها وابسته است و یکی از راههای سرمایه‌گذاری خرید همین دارایی های مالی است. چند نوع از دارایی های مالی عبارتند از: سپرده‌های سرمایه‌گذاری در بانکها، طرح‌های بازنشستگی که توسط صندوق‌های بازنشستگی ارائه می‌شود، انواع بیمه‌نامه‌های شرکتهای بیمه و اوراق بهادار قابل داد و ستد در بورس که توسط کارگزاران خرید و