بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تهران

دانشکده علوم

مدولهای ضربی در جبر جابجایی

نگارش :

قنبر پورنکی

استاد راهنما :

دکتر سیامک یاسمی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در

رشته ریاضی محض

تیرماه ۷۹

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

جمهوری اسلامی ایران

دانشگاه تهران

دانشکده علوم

بسمه تعالی

اداره کل تحصیلات تکمیلی دانشگاه

احتراماً به اطلاع میرساند که جلسه دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی محض آقای قنبر پورنکی تحت عنوان :

مدولهای ضربی در جبر جابجایی

در تاریخ ۷۹/۵/۳ دانشکده علوم دانشگاه تهران برگزار گردید.

هیأت داوران براساس کیفیت پایان نامه، مقالات انتشار یافته، استماع دفاعیه و نحوه پاسخ به سؤالات، پایان نامه ایشان را برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض معادل با ۶ واحد با نمره ۱۹/— نوزده تمام با درجه عالی مورد ارزشیابی قرار داد.

هیأت داوران

سمت	نام و نام خانوادگی	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر سیامک یاسمی	دانشیار	تهران	
۲ - استاد داور	دکتر حبیب الله انصاری	دانشیار	گیلان	
۳- استاد داور	دکتر رحیم زارع نهندی	استاد	تهران	

سرپرست تحصیلات تکمیلی گروه	مدیر گروه	سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده
رحیم زارع نهندی	حمید رسولیان	رسول احروی

پیشگفتار

رساله را به‌چهار فصل تقسیم کرده‌ایم. در فصلِ اول، خواصِ بنیادیِ مدولهای ضربی را بیان می‌کنیم و یک قضیهٔ بسیار مهم را برای این نوع از مدولها اثبات می‌کنیم (قضیه ۱.۵). در فصلِ دوم به‌زیر مدولهایِ اول و ماکسیمالِ مدولهای ضربی و همچنین مدولهای متناهی‌ـمولد می‌پردازیم و در این فصل قضیهٔ آندرسون را برای مدولهای ضربی ثابت می‌کنیم. در فصلِ سوم رابطهٔ بین مدولهای ضربی و ایده‌آلهای حلقهٔ زمینه را بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که در برخی موارد، هر Rـمدولِ ضربی با ایده‌آلی معکوس‌پذیر از حلقه یکریخت است و بعضاً هم‌چنین نیست. بالاخره در فصل چهارم مدولهایِ ضربی تعمیم یافته را بررسی می‌کنیم.

من از آقای دکتر سیامک یاسمی، استادِ راهنمایم، بی‌نهایت سپاسگزارم که در طولِ نگارشِ این رساله با راهنمایی‌ها و ایده‌هایِ گرانبهای خویش، مرا کمک کرده و در نحوهٔ نوشتن و روشِ کار سلیقهٔ خود را بر من تحمیل نکرد. از راهنمایی‌های ارزندهٔ آقای دکتر رحیم زارع نهندی نیز که استادِ مشاورِ من بودند قدردانی می‌کنم. سپاسگزاری از آقای دکتر حبیب‌اله انصاری را نیز که بعنوانِ استاد مدعو، تقبل زحمت کرده و برای جلسهٔ دفاعیه از دانشگاه گیلان تشریف آوردند برخود لازم می‌دانم. همچنین از آقای تیرداد شریف نیز به‌دلیل راهنمایی‌ها و کمک‌های دوستانهٔ و بسیار مفیدش متشکرم. از خانمِ آناهیتا سمیع نیز تشکر می‌کنم که زحمتِ تایپ این رساله را با کمالِ دقت و حوصله تقبل کرد. در موردِ موضوع این پایان‌نامه (مدولهایِ ضربی) حرفهایِ ناگفته‌ای زیادی هست که امیدوارم دانشجویانِ عزیز به‌تحقیق و بررسی آنها بپردازند.

سپاسگزارِ تمام اساتید و دانشجویان و دوستانی هستم که وقتِ با ارزش خود را صرفِ مطالعهٔ این رساله می‌کنند و برای تک تکِ آنها آرزوی موفقیت و سلامتی می‌کنم.

فهرست مطالب

نمادها و پیشنیازها

در تمامِ قسمتهای این رساله، R را یک حلقهٔ جابجایی و یکدار در نظر می‌گیریم. هرجا کلمهٔ «مدول» را ذکر می‌کنیم منظورمان ($R-$) مدولِ چپِ یکانی است. در بعضی موارد بجای Rـمدول، مدول می‌نویسیم.

سعی می‌کنیم حلقهٔ R را صراحتاً ذکر کنیم، اما در بعضی موارد مانند $Hom(M,N)$ که همان $\mathbf{Hom}_R(M,N)$ است از نوشتنِ R صرفنظر می‌کنیم.

منظورمان از $\varphi : M \to N$؛ به همان Rـهمریختی از M در N است، یعنی $\varphi \in \mathbf{Hom}_R(M,N)$. در برخی موارد که احساس می‌کنیم نیاز به یادآوریِ تعریفی داریم، سریعاً آنرا بیان می‌کنیم. مثلاً پوچساز یک زیر مدول (یا یک ایده‌آل) و ... را که تقریباً همهٔ خواننده‌های محترم با آنها آشنایی کافی دارند (برای احتیاط) می‌آوریم.

در فصلِ چهارم به نوعی یکریختی، بنام «یکریختیِ مشبکه‌ای» اشاره می‌کنیم که به‌دلیلِ عدم نیاز به آن از تعریف و توضیح اضافی در مورد آن خودداری می‌کنیم. اطلاعاتِ دقیق‌تر و کامل‌تر در این رابطه را می‌توان در کتابهایِ مربوط به مشبکه‌ها بدست آورد.

تسامحاً هم مدولِ صفر و هم عضو صفر هر مدول را با "0" نشان می‌دهیم. اگر در رابطه‌های شمول به نامساوی بودن تکیه داشته باشیم (مثلاً از $A \subsetneq B$ استفاده می‌کنیم.

برای مطالعهٔ این رساله، آگاهی از «جبر پیشرفته» و «جبر جابجایی یک» در حدِّ کتابهایِ [Matsumura]، [Sharp] و [Atiyah. Macdonald] کافی است.

تعاریف

در اینجا تعریفها و مفاهیمی را معرفی می‌کنیم که تقریباً در سراسر پایان‌نامه مکرراً از آنها استفاده کرده‌ایم.

در کلیهٔ تعاریف زیر R یک حلقهٔ جابجایی و یکدار و M یک $R-$ مدول در نظر گرفته می‌شود. $\max(R)$ همان مجموعهٔ ایده‌آلهای ماکسیمال R است.

۱ـ پوچساز یک $R-$ مدول: $\mathrm{ann}_R(M)$ را پوچساز M روی R می‌نامیم و آن را بصورتِ مجموعهٔ $\mathrm{ann}_R(M) = \{r \in R | rM = 0\}$ در نظر می‌گیریم.

۲ـ مدولِ باوفا: M را باوفا می‌نامیم هرگاه $\mathrm{ann}_R(M) = 0$.

۳ـ مدولِ ضربی: M را ضربی می‌نامیم هرگاه برای هر زیرمدولِ M مانند N؛ ایده‌آلی مانند I موجود باشد که $N = IM$.

۴ـ ایده‌آل ضربی: I را یک ایده‌آل ضربی می‌نامیم هرگاه برای هر ایده‌آل J که مشمول I است، ایده‌آل دیگری مانند K وجود داشته باشد بطوریکه $J = IK$.

۵ـ ایده‌آلِ معکوسپذیر: فرض کنید Q حلقهٔ کامل خارج قسمتی حلقهٔ R و $I \trianglelefteq R$. I را معکوسپذیر می‌نامیم هرگاه $I^* I = R$؛ که در آن $I^* = \{q \in Q : qI \subseteq R\}$

۶ـ حوزهٔ دِدِکیند: حوزهٔ صحیح D را یک حوزهٔ دِدِکیند می‌نامیم هرگاه هر ایده‌آل غیرصفر آن معکوسپذیر باشد.

۷ـ $R-$ مدولِ $P-$ تابدار: برای $P \in max(R)$ می‌گوییم M، $P-$ تابدار است هرگاه، برای هر $m \in M$، $p \in P$ای موجود باشد بطوریکه $(1 - p)m = 0$

۸ـ $R-$ مدولِ $P-$ دوری: برای $P \in max(R)$ می‌گوییم M، $P-$ دوری است هرگاه عناصرِ $m \in M$ و

$p \in P$ چنان موجود باشند که $(1-p)M \subseteq R_m =< m >$

۹- زیرمدولِ اول: زیرمدول N از M را اول می‌نامیم هرگاه برای هر $r \in R$ و $m \in M$ که $rm \in N$؛ داشته باشیم $m \in N$ یا $r \in (N :_R M) = \{r \in R : rM \subseteq N\}$

۱۰- جیکوبسُن رادیکال یک مدول: جیکوبسن رادیکال M را با $J(M)$ نشان داده و بصورت اشتراکِ تمام زیرمدولهای ماکسیمال M در نظر می‌گیریم.

۱۱- رادیکالِ یک زیرمدول: برای زیرمدولِ سرهٔ N از M رادیکال N را با $\text{rad}\,(N)$ نشان داده و بصورت اشتراک تمام زیرمدلهای اول M که شامل N هستند در نظر می‌گیریم.

۱۲- R مدولِ تابدار و بی‌تاب: M را تابدار می‌نامیم هرگاه برای هر $m \in M$؛ $\text{ann}_R(m) \neq 0$ و در غیر اینصورت آن را بی‌تاب خواهیم گفت.

۱۳- زیرمدولِ ضربی: $N \leq M$ را یک زیرمدول ضربی می‌نامیم هرگاه N بعنوان یک $R-$ مدول، ضربی باشد.

۱۴- $R-$ مدولِ کاملاً ضربی: M را کاملاً ضربی می‌نامیم و هرگاه زیرمدول آن، ضربی باشد.

۱۵- $R-$ مدولِ ضربی تعمیم یافته: M را ضربی تعمیم‌یافته می‌نامیم هرگاه هر زیر مدولِ سرهٔ M ضربی باشد.

۱۶- $R-$ مدولِ تقریباً ضربی: M را تقریباً ضربی می‌نامیم هرگاه برای هر ایده‌آلِ اولِ P از R M_P یک R_P- مدول کاملاً ضربی باشد.

۱۷- زیرمدول حذفیِ ضعیف و حذفی: $N \leq M$ را حذفیِ ضعیف (حذفی) می‌نامیم هرگاه برای هر دو ایده‌آل A و B از R که $AN \subseteq BN$، داشته باشیم $(A \subseteq B)A \subseteq N + \text{ann}_R(M)$

۱۸- $R-$ مدولِ موضعاً دوری: M را موضعاً دوری می‌نامیم هرگاه برای هر ایده‌آل اولِ P از R، M_P یک R_P- مدول دوری باشد.

۱۹ـ بُعد یک R− مدول: می‌گوییم M دارای بُعد $n \in \mathbf{N}$ است هرگاه $N_0 < N_1 < N_2 < \cdots < N_n$ طولانی‌ترین زنجیری باشد که از زیرمدولهای اول M ساخته می‌شود.

۲۰ـ R− مدولِ ضربی ضعیف: M را ضربیِ ضعیف می‌نامیم هرگاه هر زیرمدول اول آن، ضربی باشد.

۲۱ـ PC− مدول: M را یک PC− مدول می‌نامیم هرگاه برای هر ایده‌آل سرهٔ A، $AM \lneq M$.

۲۲ـ R− مدولِ شبه‌موضعی و موضعی: M را شبه‌موضعی می‌نامیم هرگاه M تنها یک زیرمدولِ ماکسیمال داشته باشد که تمام زیرمدولهای سرهٔ آن را دربر می‌گیرد. R− مدولِ شبه‌موضعیِ نوتری را موضعی می‌نامیم.

مقدمه

از همان ابتدا که حلقه -با تعریف کنونی- بعنوانِ یک ساختار جبری معرفی شد و زیرمجموعه‌های خاصی از آن را ایده‌آل نامیدند، معلوم بود که هر ایده‌آل را می‌توانیم بصورت ضربِ خود آن ایده‌آل در حلقه بنویسیم. (البته واضح است که این عمل زمانی انجام می‌گرفت که ضربِ دو ایده‌آل را تعریف کرده بودند.) به زبانِ ریاضی، یعنی برای هر $I \trianglelefteq R$، $I = IR$. بنابه‌تعریف، Rـمدولِ M، ضربی است هرگاه هر زیر مدولِ آن برای ایده‌آلِ Iای از R بصورتِ IM باشد. همچنین ایده‌آلِ I را ضربی می‌نامیم هرگاه I بعنوانِ یک Rـمدول، ضربی باشد. (تعریف دقیق‌تر را در فصلِ اولِ رساله می‌آوریم.) سپس در دههٔ ۶۰ میلادی مطالبِ متعددی راجع به ایده‌آلهای ضربی بیان شد. مثلاً J.L. Mott در سالِ ۱۹۶۵ طی قضیه‌ای ثابت کرد که اگر در حلقهٔ R تنها ایده‌آلهای اول ضربی باشند در اینصورت تمام ایده‌آلهای آن ضربی خواهند بود. (این مطلب، قضیه Cohen را برای ما تداعی می‌کند.) بعد از آن در سالِ ۱۹۸۰، D.D. Anderson، اثباتی به‌مراتب کوتاهتر برای قضیهٔ Mott ارائه کرد.

از سالِ ۱۹۷۰ میلادی به بعد، که طبیعتاً مدولها نیز تا آنزمان شناسایی و معرفی شده بودند، تعدادی از جبردانان که در نظریهٔ مدولها سررشته داشتند، مدولهایِ ضربی را با تعریف شُسته رُفته‌ای مطرح کرده و شروع به مطالعه در مورد آنها کردند. D.D.Anderson یکی از این افراد بود که در سالِ ۱۹۷۶، ایده‌آلهایِ ضربی را طی مقاله‌ای - که در فهرستِ مقالات در انتهای رساله با [Anderson 1] مشخص کرده‌ایم - مورد بررسی قرار داد. پس از آن، مقالات متعددی در موردِ ایده‌آلهایِ ضربی و مدولهایِ ضربی بوسیلهٔ افرادی چون P.F.Smith و A.G.Naoum و ... نوشته شده و در سالهایِ اخیر افراد دیگری نیز به تحقیق و بررسی در مورد این نوع از مدولها روی آورده‌اند؛ بطوریکه در سال ۱۹۹۶، یکی از دانشجویان دوره دکتریِ A.G.Naoum بنامِ AL-Alwan در رسالهٔ خود به نوع

خاصی از زیر مدولهایِ مدولِ ضربی با عنوانِ زیر مدولهای چگال پرداخته است.

همانگونه که گفتیم هر حلقه بعنوانِ یک R- مدول ضربی است و در بحث مدولهای ضربی- که در واقع تعمیمی از حلقه‌هاست - سعی بر آن است که خواصِ حلقه‌ها را برای این مدولها تعمیم دهند و در این میان بر مدولهایِ متناهی - مولد نیز در حد لازم روی می‌آورند. احکامی را که برای مدولهای متناهی - مولد برقرار است، در موردِ این نوع از مدولها بررسی می‌کنند که طبیعی است، بعضی از آنها برای ضربی‌ها برقرار است و برخی نیست. P.F.Smith یکی از این اشخاص است که در چندین مقالهٔ خود همواره کوشیده، چنین نتایجی را برای مدولهای ضربی بدست آورد. در برخی موارد نیز شرطِ متناهی - مولد بودن را با ضربی ترکیب کرده است؛ که تعدادی از چنین احکام را ما در این رساله بیان می‌کنیم.

همانطور که در فصلِ ۱ از رساله اثبات می‌کنیم، هر مدولِ دوری، ضربی است. همچنین ایده‌آلهایِ معکوسپذیر و پروژکتیو نیز ضربی هستند. از طرفی می‌دانیم پروژکتیوها در جبر نقشِ مهمی را ایفا کرده و مورد توجه افرادِ متخصص می‌باشند. در سالِ ۱۹۹۴، P.F.Smith، پنج شرط معادل برای ضربی بودنِ یک R- مدولِ پروژکتیو ارائه کرد که مهمترین آنها جابجایی بودنِ حلقهٔ $End_R(M)$ (مجموعهٔ تمامِ R- همریختی‌هایِ از M در M) و موضعاً دوری بودن M (یعنی برایِ هر $P \in \max(R)$، M_P یک R_P- مدولِ دوری باشد.) بود.

در حالت کلی، هر زیر مدولِ یک مدولِ ضربی، ضربی نیست. (مثال آنرا در فصلِ ۱ می‌آوریم.) Rـمدولِ غیر صفر و نوتریِ M ضربی است اگر و تنها اگر ایده‌آلهای A و B از R با شرطِ $A \subsetneq B$ موجود باشند بطوریکه $M \cong B/A$ و $\frac{B}{A}$ یک ایده‌ال معکوسپذیر از حلقهٔ $\frac{R}{A}$ است.

عناصرِ خودتوانِ حلقه ($e^2 = e$) نیز در ضربی‌ها مورد توجه هستند، بطوریکه Rـمدولِ ضربی و متناهی مولد M، پروژکتیو است هرگاه برای عنصر خود توانی مانند $e \in R$، $\operatorname{ann}_R(M) = Re$ باشد. گفتیم که ایده‌آلهایِ پروژکتیو، ضربی هستند، ولی این مطلب در مورد مدولها برقرار نیست؛ یعنی همهٔ مدولهایِ پروژکتیو، ضربی نیستند. زیرا مثلاً فضاهایِ برداری دوبعدی، بعنوانِ Rـمدول (که R در اینجا میدان است) ضربی نیستند. ([Smith] را ببینید)

همچنین R در واقع تنها مدولِ ضربیِ آزاد است.

در این رساله ما کوشیده‌ایم تا در حد توانِ خود مطالبی را از مدولهایِ ضربی بیان کرده و بعضاً آنها را تعمیم دهیم، و طبیعتاً نمی‌توانیم تمامِ مطالب در مورد چنین مدولهایی را در یک رساله بطور کامل مورد بحث و بررسی قرار دهیم.

فصل اول

مدولهایِ ضربی: تعاریف و خواص اساسی

مقدمه بر تعاریف: همانطور که در مقدمهٔ رساله به تفصیل گفتیم، مدولهایِ ضربی تعمیمی از حلقه‌هاست. بنابراین در صدد آنیم تا تعریفی ارائه دهیم که اولاً بطور طبیعی بیانگر واژهٔ ضربی برای یک Rـمدول باشد (یعنی بتوانیم کلمهٔ ضربی را به راحتی لمس کنیم) و ثانیاً هر حلقهٔ جابجایی و یکدار در این تعریف صدق کند. بعد از تعریف Rـ مدولِ ضربی، به‌زودی ایده‌آلِ ضربی را تعریف خواهیم کرد تا ذهنمان از حلقه، که زمینهٔ بوجود آمدن مدولِ ضربی است دور نیافتد.

یادآوری می‌کنیم که در سراسرِ این رساله، R یک حلقهٔ جابجایی و یکدار فرض می‌شود (در کلیهٔ تعریفها، گزاره‌ها و قضایا و ...) مگر اینکه غیر از آن بطور صریح بیان شود.

تعریف ۱. فرض کنید M یک Rـمدول باشد. M را «ضربی» (یا بطور دقیقتر، «Rـ مدولِ ضربی») می‌نامیم هرگاه برای هر زیر مدولِ M مانند N؛ ایده‌آلی مانند I از حلقهٔ R موجود باشد که

$$N = IM$$

از این تعریف بلافاصله نتیجه می‌گیریم که هر حلقهٔ R، بعنوان یک Rـمدول، ضربی است (که باید هم همینطور

می‌شد) و همچنین مدولهای دوری (Rـمدولی که با یک عنصر تولید می‌شود و بصورتِ $M = Rm$ که در آن $m \in M$ است نشان داده می‌شود.) نیز ضربی هستند. بنابراین دوردهٔ شناخته شده و مهم از Rـمدولهایِ ضربی در همان ابتدای کار معین می‌شوند که اولی مستقیماً از تعریف نتیجه می‌شود و دومی را تحت عنوانِ اولین گزارهٔ این رساله بیان و ثابت می‌کنیم.

گزارهٔ ۱.۱. هر Rـمدولِ دوری، ضربی است.

اثبات. فرض کنید $M = Rm$ یک Rـمدولِ دوری باشد و N را یک زیر مدولِ دلخواه از آن بگیرید. درنتیجه برای هر $x \in N \subseteq M$، $r \in R$ای موجود است که $x = rm$. اما چون M دوری است پس $r \in (N :_R M)$. (زیرا برای هر $sm \in M$ که در آن $s \in R$ است؛ $r(sm) = s(rm) = sx \in N$.) بنابراین $N \subseteq (N :_R M)M$. از طرفی واضح است که $(N :_R M)M \subseteq N$. بنابراین $N = (N :_R M)M$. و می‌دانیم که $(N :_R M)$ایده‌آلی از R است. پس Rـمدولِ دوریِ M؛ ضربی است. ■

تعریف ۲. ایده‌آلِ I از حلقهٔ R را یک «ایده‌آلِ ضربی» می‌نامیم، هرگاه برای هر ایده‌آلِ J از R که مشمولِ I است $(J \subseteq I)$؛ ایده‌آلی مانند K از R موجود باشد بطوریکه $J = IK$.

این تعریف را به خاطر بسپارید تا بعد از بیانِ چند گزاره و لم، دوباره به آن بازگردیم.

با توجه به تعریفِ Rـمدولِ ضربی، برای هر زیر مدولِ N از M، ایده‌آلی از حلقهٔ R مانند I موجود است بطوریکه $N = IM$. اما این ایده‌آلِ I منحصر بفرد نیست. یعنی ممکن است ایده‌آل دیگری مانند J از R موجود باشد بطوریکه $N = JM$ نیز برقرار باشد. در گزارهٔ بعد می‌خواهیم یکی از این ایده‌آلها را بطور دقیق، مشخص کنیم.