بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی

نمایش های ماتریسی مثلثی توسیع های یک حلقه

دانشجو:
مریم رباط سرپوشی

استاد راهنما:
جناب دکتر ابراهیم هاشمی
جناب دکتر احمد زیره

استاد مشاور:
جناب دکتر میرحیدر جعفری

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

آبان 1388

تقدیم به ...

تقدیم به پدرم ، بزرگ معلم زندگیم که استقامت را به من آموخت و مادرم که وجودش برایم همه عشق است و وجودم برایش همه رنج ، توانش رفت تا به توانایی برسم ، مویش سپیدی گرفت تا روی سپید بمانم. او که فروغ نگاهش ، گرمی کلامش و روشنایی رویش سرمایه زندگانی من است. در برابر وجود گرامیش زانوی ادب بر زمین می نهم و با دلی مالامال از عشق و محبت ، بر دستانش بوسه می زنم و تقدیم به بهترین دوست زندگیم که چون پرستویی پر کشید و رفت. او که محبت صمیمانه اش همراه من است و یاد و خاطرش تا ابد در ذهن من جاری است.

موفقیت و نیکبختی شان آرزویم

تشکر و قدردانی

با توجه به عنایت خداوند متعال و راهنمایی و مساعدت اساتید بزرگوار و دوستان عزیـزم ، اکنـون که پایان نامه خود را به پایان رسانده ام بر خود لازم می دانم تا تشکر خود را ابراز نمایم.

از جناب آقای دکتر هاشمی استاد بزرگوارم که در تمامی مراحل این پایان نامه با صـبر و حوصـله، این جانب را یاری نمودند کمال تشکر را دارم. از جناب آقای دکتر احمد زیره که با راهنمایی شان این جانب را مورد لطف قرار دادند صمیمانه تشکر و قدردانی می کنم. مراتب تشکر خود را از جنـاب آقـای دکتر میرحیدر جعفری به خاطر کمک ایشان ابراز مـی دارم. همچنـین از کمـک هـای اسـتاد گرامـی جناب آقای سید رضا موسوی و دوست عزیزم خانم الهام حاجی شمسائی تقدیر و تشکر می کنم.

حمایت ها و دعاهای پدر و مادر عزیزم در تمامی مراحل زندگی شامل حال من بوده ، ضمن تشکر و قدردانی از آنها ، سلامتی شان را از درگاه خداوند متعال خواستارم.

چکیده

در این پایان نامه ابتدا مفهوم مجموعه خودتوان های مثلثی چپ برای یک حلقه را بیان می کنیم و رابطه بین خودتوان های مثلثی چپ یک حلقه و برخی از توسیع های آن حلقه را بررسی می کنیم. این خودتوان ها یک نمایش ماتریسی مثلثی تعمیم یافته برای یک حلقه تعیین می کنند. سپس حلقه های PWP را مورد مطالعه قرار می دهیم. این خانواده شامل حلقه های PWD (و بنابرین شامل همه حلقه های موروثی که نیم ابتدائی یا نوتری راست هستند) می باشد. برای یک حلقه PWP ، توسیع هایی از آن را که یک نمایش ماتریسی مثلثی تعمیم یافته دارند به طوری که حلقه های روی قطر اصلی آنها اول هستند را مورد بررسی قرار می دهیم.

کلمات کلیدی: نمایش ماتریسی مثلثی تعمیم یافته، توسیع یک حلقه، توسیع مرکزی، توسیع نرمالگر، توسیع شبه نرمالگر، PWD ، PWP ، حلقه شبه بئر اصلی، حلقه شبه بئر، خودتوان نیم مرکزی، بعد مثلثی، خودتوان مثلثی، حلقه u.p- منوئیدی

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

[1] M. Robat Sarpooshi and E. Hashemi, Triangular matrix representations of ring extensions, Tarbiat moallem university, 20th Seminar on algebra, 2-3 Ordibehesht, 1388 (Apr. 22-23, 2009).

فهرست مطالب

فهرست علائم

$A.C.C$	شرط زنجیر افزایشی
$ann_l(x)$	پوچساز چپ عنصر x
$ann_r(x)$	پوچساز راست عنصر x
C	میدان اعداد مختلط
$card\ (A)$ ، $\|A\|$	کاردینال مجموعه A
$char(R)$	مشخصه حلقه R
$D.C.C$	شرط زنجیر کاهشی
D_∞	گروه دووجهی نامتناهی
$\deg\ f(x)$	درجه چند جمله ای $f(x)$
$\dim(V)$	بعد فضای برداری V
E_{ij}	ماتریسی که درایه $(i.j)$ آن یک و سایر درایه های آن صفر است
$End_R(M)$	حلقه $R-$همریختی ها روی M
$I+J$	مجموع ایده ال های I و J
M_R	R- مدول راست M
$Mat_n(R)$	حلقه ماتریس های $n\times n$ روی R
$R\oplus S$	مجموع مستقیم حلقه های R و S
R/I	حلقه خارج قسمتی R بر I
$o(x)$	مرتبه عنصر x

$P(R)$	رادیکال اول حلقه R
$\sum_{i\in I} R_i$	مجموع یک خانواده از حلقه ها
$\prod_{i\in I} R_i$	ضرب مستقیم یک خانواده از حلقه ها
$\oplus_{i\in I}\ R_i$	جمع مستقیم یک خانواده از حلقه ها
$\mathbb{Q}$	میدان اعداد گویا
R	میدان اعداد حقیقی
$R[G]$	حلقه گروهی
$R[X]$	حلقه چندجمله ایها روی R با متغیرهایی از X
$R[[X]]$	حلقه سریهای توانی روی R با متغیرهایی از X
$R[x, x^{-1}]$	حلقه چندجمله ای های لوران روی R
$R[[x, x^{-1}]]$	حلقه سری های توانی لوران روی R
$rad(R)$	رادیکال ژاکوبسن حلقه R
$< x >$	ایده ال اصلی تولید شده توسط x
Z	حلقه اعداد صحیح
$Z_n = Z/nZ$	حلقه اعداد صحیح به پیمانه n
δ_{ij}	دلتای کرونکر

فصل اول

تعاریف و خلاصه ای از پایان نامه

تمام حلقه ها را شرکت پذیر و یکدار در نظر می گیریم. یک توسیع از حلقه R یعنی توسیعی که همان عضو همانی را دارد. اگر S یک زیر مجموعه ناتهی از R باشد پوچساز راست و پوچساز چپ را به ترتیب با $r_R(S)$ و $l_R(S)$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم $r_R(S)=\{a\in R|Sa=\circ\}$ و $l_R(S)=\{a\in R|aS=\circ\}$.

1-1 تعریف: حلقه R را بئر[1] *(شبه بئر)*[2] می نامند اگر پوچساز راست هر زیر مجموعه ناتهی (ایده ال راست) آن ، به عنوان یک ایده ال راست ، توسط یک عنصر خودتوان تولید شود. برای مطالعه بیشتر در مورد حلقه های شبه بئر می توانید به [5]،[7]،[15]،[16]،[24]، [32] مراجعه کنید.

تعمیم دیگری از حلقه های بئر ، حلقه های pp هستند.

---

[1] - Baer

[2] - quasi-Baer

2-1 تعریف: حلقه R را pp *راست*[1] (چپ) می نامند اگر پوچساز راست (چپ) هر عنصر R ، به عنوان یک ایده ال راست (چپ) ، توسط یک خودتوان تولید شود. حلقه R را pp می نامند اگر هم pp راست و هم pp چپ باشد.

3-1 تعریف: حلقه R را *شبه بئر اصلی راست*[2] می نامند اگر پوچساز راست هر ایده ال راست اصلی آن ، به عنوان یک ایده ال ، توسط یک خودتوان تولید شود. حلقه های شبه بئر اصلی چپ به طور مشابه تعریف می شوند. یک حلقه را شبه بئر اصلی می نامند اگر هم شبه بئر اصلی راست و هم شبه بئر اصلی چپ باشد. هر حلقه شبه بئر ، شبه بئر اصلی است.

4-1 تعریف: حلقه R را *تقلیل یافته*[3] گوییم اگر هیچ عنصر پوچ توان ناصفر نداشته باشد.

5-1 تعریف: عنصر خودتوان $e \in R$ را *نیم مرکزی چپ*[4] می نامند اگر برای هر $x \in R$ ، $exe = xe$. خود توان نیم مرکزی راست به صورت مشابه تعریف می شود. به طور معادل $e = e^2 \in R$ نیم مرکزی چپ است اگر eR یک ایده ال R باشد. چون پوچساز راست یک ایده ال راست ، یک ایده ال است لذا در یک حلقه شبه بئر ، پوچساز راست یک ایده ال راست توسط یک خودتوان نیم مرکزی تولید می شود. $S_l(R)$ و $S_r(R)$ به ترتیب نمایانگر مجموعه تمام خودتوان های نیم مرکزی چپ و راست حلقه R می باشند. خودتوان e از حلقه R را *نیم مرکزی تقلیل یافته*[5] می نامند اگر $S_l(e\mathrm{Re}) = \{\circ, e\}$. توجه داریم که $S_l(e\mathrm{Re}) = \{\circ, e\}$ اگر و فقط اگر $S_r(e\mathrm{Re}) = \{\circ, e\}$. هرگاه 1 تقلیل یافته نیم مرکزی باشد حلقه R را *تقلیل یافته نیم مرکزی* می نامیم. اگر $\mathrm{B}(R)$ مجموعه تمام خودتوان های مرکزی R باشد می توان نشان داد که $S_l(R) \cap S_r(R) = \mathrm{B}(R)$.

---

1 - right pp

2 - right principally quasi-Baer (or simply right p.q-Baer)

3 - reduced

4 - left semi central

5 - reduced semicentral

6-1 تعریف: گوییم حلقه R *نمایش ماتریسی مثلثی تعمیم یافته*[1] دارد هر گاه یکریختی حلقه ای

$$\theta : R \to \begin{pmatrix} R_1 & R_{12} & . & . & . & R_{1n} \\ \circ & R_2 & . & . & . & R_{2n} \\ . & \circ & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ \circ & \circ & . & . & . & R_n \end{pmatrix}$$

وجود داشته باشد که در آن هر R_i یک حلقه یکدار و برای هر $i < j$ ، R_{ij} یک R_i - مدول چپ و R_j - مدول راست است. اگر هر R_i یک حلقه تقلیل یافته نیم مرکزی باشد در این صورت گوییم R یک نمایش ماتریسی مثلثی تعمیم یافته کامل از بعد مثلثی n دارد.

7-1 تعریف: خودتوان های $\alpha, \beta \in R$ را متعامد[2] نامیم اگر $\alpha\beta = \beta\alpha = \circ$.

8-1 تعریف: خودتوان ناصفر $e \in R$ را *ابتدائی*[3] گوییم اگر e را نتوان به صورت ترکیبی به فرم $\alpha + \beta$ نوشت که α و β خودتوان های متعامد ناصفر در R باشند.

گوردون[4] و اسمال[5] در [22] مفهوم یک حلقه PWD را معرفی کردند.

9-1 تعریف: حلقه R را PWD[6] (PWP)[7] می نامند هر گاه یک مجموعه کامل از خودتوان های ابتدایی (مجموعه کامل از خودتوان های مثلثی) مانند $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $1 \leq i, j, k \leq n$ و هر $x \in e_i \mathrm{R} e_j$ و $y \in e_j \mathrm{R} e_k$ اگر $xy = \circ$ $(xRy = \circ)$ آنگاه $x = \circ$ یا $y = \circ$.

---

1 - generalized triangular matrix representation

2 - orthogonal

3 - primitive

4 - Gordon

5 - Small

6 - piecewise domain

7 - piecewise prime ring

10-1 تعریف: فرض کنید K یک حلقه و X یک مجموعه از متغیر های مستقل روی K باشد. *حلقه چند جمله ا ی ها*[1] روی K را با $R=K[X]$ نمایش می دهیم. عناصر آن به صورت چند جمله ای هستند و جمع و ضرب روی R به طور طبیعی تعریف می شود.

11-1 تعریف: فرض کنید K یک حلقه و $X=\{x_i | i\in I\}$ یک مجموعه از متغیر های مستقل روی K باشد. *حلقه سریهای توانی*[2] روی K را با علامت $R=K[[X]]$ نمایش می دهیم. عناصر آن به فرم $f_\circ+f_1+f_2+\ldots$ هستند که هر f_i یک چند جمله ای همگن از درجه i بر اساس متغیر های $X=\{x_i | i\in I\}$ است. جمع و ضرب روی R به طور طبیعی تعریف می شود.

12-1 تعریف : فرض کنید K یک حلقه و x یک متغیر مستقل رو ی K باشد. *حلقه سریهای توانی لوران*[3] روی K را با علامت $R=K((x))$ نمایش می دهیم. عناصر آن به فرم $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i x^i$ هستند که تعداد متناهی از ضرایب توان های منفی x مخالف صفر هستند. جمع و ضرب روی R به طور طبیعی تعریف می شود و بوضوح داریم $K[[x]]\subseteq K((x))$.

13-1 تعریف : فرض کنید K یک حلقه و $\sigma : K\rightarrow K$ یک همریختی باشد. *حلقه چند جمله ای های اریب*[4] روی K را با علامت $R=K[x;\sigma]$ نمایش می دهیم. عناصر آن همان چند جملا ای های به فرم $a_\circ+a_1x+\ldots+a_nx^n$ هستند. جمع روی R به طور طبیعی تعریف می شود اما ضرب از قانون $xb=\sigma(b)x$ پیروی می کند. یعنی در حالت کلی ضرب به صورت زیر تعریف می شود :

$$\left(\sum_{i=\circ}^{n} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=\circ}^{m} b_j x^j\right)=\sum\sum a_i\sigma^j(b_j)x^{i+j}.$$

---

[1] - polynomials ring

[2] - power series ring

[3] - Laurent power series ring

[4] - Skew polynomials ring

1-14 تعریف : مشابه تعریف بالا ، *حلقه سری های توانی اریب*[1] نیز تعریف می شود و آن را با علامت $R=K[[x;\sigma]]$ نمایش می دهیم: $R=K[[x;\sigma]]=\{a_\circ+a_1x+\ldots \mid a_i\in K\}$.

1-15 تعریف : فرض کنید K یک حلقه و $\sigma:K\to K$ یک خودریختی باشد. حلقه سری های توانی اریب لوران را با علامت $R=K((x;\sigma))$ نشان می دهیم. عناصر آن به فرم $\sum_{i=-\infty}^{+\infty}a_ix^i$ است به طوری که برای $i<\circ$ ، تعداد متناهی از a_i ها مخالف صفر هستند. جمع روی R به طور طبیعی تعریف می شود اما ضرب از قانون $xb=\sigma(b)x$ و $x^{-1}b=\sigma^{-1}(b)x^{-1}$ پیروی می کند. بوضوح $K[[x;\sigma]]$ زیر حلقه ای از $K((x;\sigma))$ است.

1-16 تعریف : فرض کنید K یک حلقه و $\sigma:K\to K$ یک خودریختی باشد. مشابه تعریف بالا ، می توان حلقه سری های توانی $R=K[[x;\sigma]]$ را تشکیل داد. حال زیر مجموعه $\left\{\sum_{i=m}^{n}a_ix^i \mid m\le n, m\in Z, n\in Z, a_i\in K\right\}$ از حلقه $R=K[[x;\sigma]]$ را در نظرمی گیریم. بوضوح مجموعه فوق یک زیر حلقه از $K[[x;\sigma]]$ است که ان را با علامت $K[x,x^{-1};\sigma]$ نمایش می دهیم و به آن حلقه چند جمله ای های اریب لوران می گوییم.

G نمایانگر یک منوئید و μ عضو همانی آن می باشد.

1-17 تعریف: منوئید G را $u.p$-*منوئید*[2] می نامند اگر برای هر دو زیر مجموعه ناتهی متناهی $A,B\subseteq G$ ، عنصر $x\in G$ وجود داشته باشد که به طور یکتا به فرم ab نوشته شود که $a\in A$ و $b\in B$.

کلاس $u.p$-منوئید ها بسیار بزرگ و از اهمیت خاصی برخوردار است. برای مثال این کلاس شامل همه منوئیدهای مرتب چپ یا راست ، زیرمنوئید های یک گروه آزاد و گروه های پوچ توان فارغ از تاب است. هر u.p– منوئید G حذف پذیر است و عنصر غیر همانی از مرتبه متناهی ندارد.

---

1 - skew power series ring

2 - unique product monoid

18-1 تعریف : فرض کنید R حلقه و G یک گروه باشد. R –مدول آزاد تولید شده توسط G را *حلقه گروهی*[1] می نامیم و با علامت $R[G]$ نمایش می دهیم.

نشان می دهیم یک حلقه PWP یک حلقه شبه بئر با بعد مثلثی متناهی است. هر حلقه PWP یک نمایش ماتریسی مثلثی تعمیم یافته کامل دارد که حلقه های روی قطر اصلی آن اول هستند. حلقه ماتریس های $n\times n$ و حلقه چند جمله ای ها روی حلقه های PWD همچنان PWD هستند.

همچنین نشان می دهیم اگر R یک حلقه PWP باشد توسیع های زیر نیز PWP هستند (و بنابراین یک نمایش ماتریسی مثلثی تعمیم یافته کامل دارند): 1- حلقه منوئیدی $R[G]$ که G یک $u.p$ - منوئید است ، 2- $R[X]$ و $R[[X]]$ که X یک مجموعه ناتهی از متغیرهای نه لزوما جابجائی است ، 3- حلقه چند جمله ای های لوران $R[x,x^{-1}]$ و حلقه سری های توانی لوران $R[[x,x^{-1}]]$ ، 4- حلقه چند جمله ای های اریب $R[x;\alpha]$ و حلقه سری های توانی اریب $R[[x;\alpha]]$ که α یک خودریختی از R است ، 5- حلقه ماتریس های مربعی $Mat_n(R)$ و حلقه ماتریس های بالا مثلثی $T_n(R)$.

در فصل 2 رابطه شبه بئر بودن حلقه R و حلقه منوئیدی $R[G]$ را بررسی می کنیم. همچنین یک شرط لازم و کافی برای شبه بئر بودن یک جبر گروهی نیم اول پیدا می کنیم. از آن نتیجه می گیریم که هر جبر گروهی نوتری راست نیم اول یک مجموع مستقیم متناهی از حلقه های اول است.

در فصل 3 خودتوان های نیم مرکزی توسیع های R را بر حسب خود توان های نیم مرکزی R مشخص می کنیم.

در فصل 4 مفاهیم یک مجموعه از خودتوان های مثلثی و بعد مثلثی را بیان می کنیم. همچنین نشان می دهیم که اگر R شبه بئر باشد آنگاه R از بعد مثلثی n است اگر و فقط اگر دقیقا n ایده ال اول مینیمال داشته باشد.

---

[1] - group ring

در فصل 5 نمایش ماتریسی مثلثی تعمیم یافته کامل برای انواع توسیع های R را تعیین می کنیم.

1-19 تعریف: فرض کنید N توسیعی از R باشد و $n \in N$. n را یک *عنصر* R- *شبه نرمالگر چپ*[1] می نامند اگر $nR \subseteq Rn$. اگر $n = n^2$ آنگاه $nRn = nR$ (یعنی n به فرم نیم مرکزی راست روی R عمل می کند).

به عنوان مثال اگر R حلقه ماتریس های بالا مثلثی 2×2 روی اعداد صحیح و N حلقه ماتریس های مربعی 2×2 روی میدان اعداد گویا باشد آنگاه $n = \begin{pmatrix} \circ & q \\ \circ & 1 \end{pmatrix}$ یک عنصر خودتوان R-شبه نرمالگر چپ از N است. اگر q یک عدد صحیح نباشد آنگاه n نرمالگر نیست. گوئیم N یک *توسیع شبه نرمالگر چپ*[2] از R است اگر N به عنوان یک R- مدول چپ توسط یک مجموعه از عناصر R- شبه نرمالگر چپ تولید شود. به عنوان مثال هر توسیع نرمالگر و حلقه $R[x;\sigma]$ ، که σ یک همریختی است ، توسیع هایی شبه نرمالگر چپ از R هستند. توجه داریم که $R[x;\sigma]$ یک توسیع نرمالگر از R است که توسط مجموعه $\{1, x, x^2, \ldots\}$ تولید می شود اگر و فقط اگر σ پوشا باشد.

1-20 تعریف الف: حلقه R را *ساده*[3] گوییم اگر $R \neq \circ$ و $(\circ)$ و R تنها ایده ال های آن باشند.

ب: گوییم حلقه R *نیم ساده*[4] است هر گاه هر ایده ال آن یک جمعوند مستقیم از R باشد یا به طور معادل R با مجموع مستقیمی از ایده ال های مینیمال خود برابر باشد.

1-21 تعریف الف: فرض کنید R یک حلقه جابجایی و P ایده الی از R باشد. ایده ال P را *اول*[5] نامیم هر گاه $P \neq R$ و برای ایده ال های $I, J \subseteq R$ ، اگر $IJ \subseteq P$ آنگاه $I \subseteq P$ یا $J \subseteq P$.

---

1 - left R-quasi normalizing element

2 - left quasi normalizing extension

3 - simple ring

4 - semi simple ring

5 - prime ideal

ب: ایده ال Q از حلقه R را *نیم اول*[1] نامیم هر گاه برای هر ایده ال I از R ، اگر $I^2 \subseteq Q$ آنگاه $I \subseteq Q$. برای مثال هر ایده ال اول ، نیم اول است.

22-1 تعریف: گوییم حلقه R *اول*[2] (*نیم اول*[3]) است هر گاه ایده ال $(\circ)$ یک ایده ال اول (نیم اول) باشد. برای مثال هر دامنه یک حلقه اول و هر حلقه تقلیل یافته یک حلقه یک نیم اول است.

23-1 تعریف: فرض کنید $\{C_i : i \in I\}$ یک خانواده از زیر مجموعه های مجموعه C باشد. گوییم این خانواده در *شرط زنجیر افزایشی*[4] (به طور خلاصه $A.C.C$) صدق می کند هر گاه یک زنجیر افزایشی نامتناهی مانند $C_{i_1} \subset C_{i_2} \subset \dots$ در این خانواده وجود نداشته باشد. دو گزاره زیر معادل با این شرط هستند:

(1) برای هر زنجیر صعودی در این خانواده مانند $C_{i_1} \subseteq C_{i_2} \subseteq \dots$ ، یک عدد صحیح n وجود داشته باشد به طوری که $C_{i_n} = C_{i_{n+1}} = C_{i_{n+2}} = \dots$.

(2) هر مجموعه ناتهی از این خانواده تحت رابطه شمول یک عضو ماکزیمال داشته باشد.

به طور مشابه *شرط زنجیر کاهشی*[5] (به طور خلاصه $D.C.C$) برای یک خانواده از زیر مجموعه های مجموعه C تعریف می شود و می توان دو شرط معادل بالا را برای این شرط نیز بیان کرد.

24-1 تعریف: فرض کنید R یک حلقه و M یک R- مدول باشد. M را *نوتری*[6] (*آرتینی*[7]) می نامیم اگر خانواده همه زیر مدول های M در شرط $A.C.C$ $(D.C.C)$ صدق کند. حلقه R را نوتری (آرتینی) نامیم اگر R به عنوان یک R- مدول ، نوتری (آرتینی) باشد. به طور مثال هر میدان هم

---

[1] - semi prime ideal

[2] - prime ring

[3] - semi prime ring

[4] - ascending chain condition

[5] - decending chain condition

[6] - noetherian

[7] - artinian

نوتری و هم آرتینی است و حلقه اعداد صحیح یک حلقه نوتری است.

25-1 قضیه پایه هیلبرت[1] : اگر حلقه R نوتری باشد آنگاه حلقه چند جمله ای های $R[x_1, x_2, ..., x_n]$ نوتری است.

فرض کنید K یک حلقه و $\{x_i : i \in I\}$ یک مجموعه مستقل از متغیر های ناجابجایی باشد. می توانیم $K-$حلقه آزاد تولید شده توسط $\{x_i : i \in I\}$ را تشکیل دهیم و آن را با $R = K\langle x_i : i \in I\rangle$ نمایش می دهیم. عناصر R به صورت چند جمله ای هایی با متغیر های ناجابجایی $\{x_i\}$ و ضرایب از K هستند. در اینجا فرض می کنیم که ضرایب با هر x_i جابجا می شود. حال فرض کنید K و R مانند بالا باشند و $F = \{f_j : j \in J\} \subseteq R$. ایده ال تولید شده توسط F در R را با (F) نمایش می دهیم و حلقه خارج قسمتی $\overline{R} = R/(F)$ را تشکیل می دهیم.

26-1 تعریف : اگر $R = K\langle x, y\rangle$ و $F = \{xy. - yx - 1\}$ ، آنگاه $\overline{R} = R/(F)$ را *اولین جبر ویل*[2] می نامند و با $A_1(K)$ نمایش می دهند. با استفاده از $A_1(K)$ ، جبرهای ویل بالاتر را به صورت زیر تعریف می کنیم $A_n(K) = A_1(A_{n-1}(K))$. به طور معال $A_n(K)$ توسط یک مجموعه از عناصر $\{x_1, y_1, ..., x_n, y_n\}$ تولید می شود ، هر کدام از این ها با عناصر K جابجا می شوند ، و با روابط $x_i y_i - y_i x_i = 1$ وقتی $1 \le i \le n$ ، $x_i y_j - y_j x_i = \circ$ برای $i \ne j$ ، $x_i x_j - x_j x_i = \circ$ برای $i \ne j$ و $y_i y_j - y_j y_i = \circ$ برای $i \ne j$.

27-1 تعریف : فرض کنید C دسته ای از R- مدولها باشد. برای هر دو عضو از C مانند M و N ، مجموعه $Hom(M, N)$ را در نظر می گیریم که هر عضو از $Hom(M, N)$ یک همریختی از M به N است و معمولا با $f : M \to N$ نمایش می دهیم. برای هر M و N و P تابعی به نام $o_{M,N,P}$ به صورت زیر وجود دارد : $o_{M,N,P} : Hom(N, P) \times Hom(M, N) \to Hom(M, P)$ که برای هر g و

---

[1] - Hilbert basis theorem

[2] - the first weyl algebra

f ، معمولا $o_{M,N,P}(g,f)$ را با نماد $g \circ f$ نمایش می دهیم. C همراه با توابع Hom و o را که در شرایط زیر صدق می کند را یک *کاتگوری از* R- *مدولها*[1] می نامیم:

(1) برای هر f و g و h که ترکیب های متناظر آنها با معنی باشد ، $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

(2) برای هر عضو از C مانند M ، $Hom(M,M)$ شامل عضوی مانند 1_M باشد که:

(الف) برای هر $N \in C$ و برای هر $g \in Hom(M,N)$ داشته باشیم $g \circ 1_M = g$.

(ب) برای هر $P \in C$ و برای هر $f \in Hom(P,M)$ داشته باشیم $1_M \circ f = f$.

28-1 تعریف : فرض کنید R یک حلقه و P یک $R-$مدول باشد. P را *پروژکتیو*[2] می نامیم هر گاه برای هر همریختی پوشای $f: A \to B$ بین $R-$مدولهای A و B و همریختی $g: P \to B$ ، یک همریختی $h: P \to A$ وجود داشته باشد به طوری که $f \circ h = g$.

29-1 تعریف : $R-$مدول چپ I را *انژکتیو*[3] می نامیم هر گاه برای هر همریختی یک به یک $f: A \to B$ بین $R-$مدولهای A و B و هر همریختی $g: A \to I$ ، یک همریختی $h: B \to I$ وجود داشته باشد به طوری که $h \circ f = g$.

30-1 تعریف: حلقه R را *خود انژکتیو*[4] می نامیم هر گاه R به عنوان R- مدول چپ ، انژکتیو باشد.

---

[1] - category of R-modules

[2] - projective

[3] - injective

[4] - self injective

فصل دوم

حلقه های منوئیدی

در این فصل نشان می دهیم که اگر G یک u.p– منوئید باشد آنگاه حلقه منوئیدی $R[G]$ شبه بئر (شبه بئر اصلی راست) است اگر و فقط اگر حلقه R شبه بئر (شبه بئر اصلی راست) باشد. همچنین شرط شبه بئر اصلی راست را برای جبرهای گروهی نیم اول بررسی می کنیم. در ادامه شرایطی را که تحت آن یک جبر گروهی نیم اول با یک مجموع مستقیم متناهی از حلقه های اول برابر است را بیان می کنیم.

2-1 لم: فرض کنید G یک $u.p$-منوئید باشد. در این صورت G حذف پذیر است ، یعنی برای هر $g,h,x \in G$ اگر $gx = hx$ یا $xg = xh$ آنگاه $g = h$.

برهان: فرض کنید $gx = hx$. مجموعه های $A = \{g,h\}$ و $B = \{x\}$ را در نظر بگیرید. اگر gx به صورت یکتا نوشته شده باشد آنگاه از $gx = hx$ خواهیم داشت $g = h$. اگر hx یکتا باشد مشابها نتیجه می گیریم $g = h$. ■

2-2 قضیه: فرض کنید G یک $u.p$- منوئید و $R[G]$ حلقه منوئیدی باشد. در این صورت:

(1) R یک حلقه شبه بئر اصلی راست است اگر و فقط اگر $R[G]$ یک حلقه شبه بئر اصلی راست باشد.

(2) R یک حلقه شبه بئر است اگر و فقط اگر $R[G]$ یک حلقه شبه بئر باشد.