دانشگاه آزاد اسلامی

واحد تهران مرکزی

دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی و آمار

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض، گرایش آنالیز ریاضی

عنوان

فریم های (قاب های) تعمیم یافته دقیق در فضاهای هیلبرت

استاد راهنما

دکتر محمد صادق عسگری

استاد مشاور

دکتر امین محمودی کبریا

پژوهشگر

لیلا رستمی

شهریور ماه ۱۳۹۱

نام و نام خانوادگی دانشجو: لیلا رستمی سال و نیمسال اخذ پایان نامه: ۲-۹۱
کد شناسایی پایان نامه: ۳۳۳۴۴ شماره دانشجویی: ۸۹۰۶۴۷۸۳۲۰۰

عنوان پایان نامه: فریم های (قاب های) تعمیم یافته دقیق در فضاهای هیلبرت

استاد راهنما: دکتر محمد صادق عسگری
استاد مشاور: دکتر امین محمودی کبریا

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته تحصیلی: ریاضی محض
گرایش: آنالیز ریاضی

نام واحد دانشگاهی: تهران مرکزی تاریخ فارغ‌التحصیلی: شهریور ماه ۱۳۹۱
کد واحد: ۱۰۱

واژگان کلیدی: G -فریم، g -فریم دقیق، G - پایه ریس، آشفتگی، سوپر فضای هیلبرت

چکیده
اخیرا g- فریم ها به عنوان یک تعمیم از فریم ها در فضاهای هیلبرت معرفی شده اند. g-فریم ها دارای تعداد زیادی خواص مشابه با فریم ها هستند ولی تمام خواص آن با فریم ها مشابهت ندارد. مثلا فریم های دقیق در فضاهای هیلبرت هم ارز پایه های ریس هستند ولی g-فریم های دقیق در این فضاها با پایه های g-ریس هم ارز نیستند.
در این پایان نامه ما ابتدا یک مشخص سازی از یک g-فریم دقیق را ارائه می دهیم و سپس تحت چندین شرایط یک رابطه هم ارزی بین یک g-فریم دقیق و یک پایه g-ریس پیدا می کنیم. در بخش دیگر پایان نامه ما پایایی یک g-فریم دقیق را تحت آشفتگی های کوچک مورد بررسی قرار می دهیم و نشان می دهیم که g -فریم های دقیق تحت آشفتگی های کوچک پایا هستند. این خاصیت از

g -فریم های دقیق با خاصیت مشابه آن برای فریم های دقیق هم ارز نیست. در بخش دیگر این پایان نامه ما رابطه بین یک فریم را در فضای سوپر هیلبرت $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ و یک g -فریم را در $\mathcal{H}$ نسبت به $\mathbb{C}^2$ مورد بررسی قرار می دهیم. ما ثابت می کنیم که یک g -فریم به دست آمده از یک فریم دقیق یک g -فریم دقیق می باشد.

تقدیم به مادر دلسوز و صبورم

و

همسر عزیز و فرزند دلبندم

سپاس‌گزاری

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

با استعانت از ایزد منان، بزرگ پروردگار جهانیان و سپاس بی پایان از تمام کسانی که مرا در این مسیر یاری نمودند.

به ویژه استاد گرانقدر و فرزانه جناب آقای دکتر محمد صادق عسگری که با راهنمایی های ارزنده و بجایشان مرا در گردآوری این اثر هدایت فرمودند.

همچنین از جناب آقای دکتر محمودی کبریا که مرا در مشاوره این پایان نامه یاری نمودند کمال تشکر را دارم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان مهربان مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس ایشان را و تشکر می‌کنم از همسر عزیز و فرزند دلبندم که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

لیلا رستمی

شهریورماه ۱۳۹۱

فهرست مطالب

فصل ۱

پایه ها وفریم ها(قاب ها) در فضاهای هیلبرت

۱.۱ مقدمه

فریم ها در فضاهای هیلبرت اولین بار توسط دافین و شیفر [۱] [۲۰] در مطالعه سریهای فوریه غیر هارمونیک در سال ۱۹۵۲ معرفی شدند. دوباره فریم ها در سال ۱۹۸۶ توسط دابیچیس، گراسمن و مایر [۲] [۱۸] مورد مطالعه قرار گرفتند. فریم ها تعمیمی از پایه های متعامد یکه در فضاهای هیلبرت هستند. یکی از مزیت های اصلی فریم ها آن است که با در نظر گرفتن یک فریم می توان خواص یک تابع را به کمک ضرایب فریم که یک دنباله از اعداد مختلط می باشد بازسازی کرد. از آنجا که پایه های ریس تعمیم پایه های متعامد یکه در فضاهای هیلبرت هستند بنابراین فریم ها را می توان تعمیم پایه های ریس نیز در نظر گرفت. فرض کنید J یک زیر مجموعه از $\mathbb{Z}$ باشد. در این صورت دنباله $\{\varphi_j\}_{j\in J}$ را در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ یک فریم می نامند. هرگاه دو عدد مثبت $0<A\leq B<\infty$ باشند به طوری که

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j\in J} |\langle f,\varphi_j\rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \qquad \forall f\in\mathcal{H}$$

A و B را به ترتیب کران های پایین و بالای فریم می گویند. فریمی که با حذف یک عضو از آن خاصیت فریم بودن خود را از دست دهد فریم دقیق نامیده می شود. فرض کنید $\{\varphi_j\}_{j\in J}$ یک فریم برای $\mathcal{H}$ باشد. در این صورت برای هر $f\in\mathcal{H}$ وجود دارد $\{c_j\}_{j\in J}\in\ell^2(J)$ به طوری که $f=\sum_{j\in J} c_j\varphi_j$ چون یک فریم در حالت کلی یک پایه نیست بنابراین ضرایب بسط فوق معمولا

[۱] Duffin , schaeffer
[۲] Grasman,maier

یکتا نیستند. افزونی یک دنباله در یک فضای هیلبرت بزرگترین عدد اعضایی است که با برداشته شدن آن فضای خطی بسته تولید شده به وسیله دنباله تغییر نکند. برای یک مجموعه فریم، با کم کردن فراوانی فریم مجموعه باقی مانده ممکن است یک فریم نباشد. با این حال فریم ها خواص بسیار خوبی دارند که از آن ها بسیار در آنالیزموجک، نظریه نمونه گیری تصادفی و پردازش سیگنال استفاده می شود. به جهت گسترش حوزه های کاربردی، اخیراً تعمیم های مختلفی از نظریه فریم ها پیشنهاد شده است. برای مثال شبه فریم ها و فریم ها از زیر فضاها(فیوژن فریم ها) و غیره.

مطالب این پایان نامه از مراجع [۳۵]و[۳۸] و[۳۹] گرفته شده است.

۲.۱ پایه ها در فضای هیلبرت

در سرتاسر این فصل $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت جدایی پذیر است.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید $\{f_j\}_{j\in J}$ یک دنباله در $\mathcal{H}$ باشد و فرض کنید Λ خانواده تمام زیرمجموعه های متناهی و ناتهی از J باشد. به ازای هر $F\in\Lambda$ قرار دهید $S_F=\sum_{i\in F} f_i$. دراین صورت $\{S_F\}_{F\in\Lambda}$ یک تور در $\mathcal{H}$ است. سری $\sum_{j\in J} f_j$ را همگرا به $s\in\mathcal{H}$ می گویند و می نویسند $s=\sum_{j\in J} f_j$، هرگاه تور $\{S_F\}_{F\in\Lambda}$ در $\mathcal{H}$ همگرا به $s\in\mathcal{H}$ باشد. یعنی

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists G\in\Lambda\ \ \forall F\in\Lambda\ \ \big(F\supseteq G\Longrightarrow \|S_F-s\|<\varepsilon\big)$$

سری را همگرای نامشروط می گویند هرگاه هر تجدید آرایش سری به یک عضو $\mathcal{H}$ همگرا باشد.

تعریف ۲.۲.۱. دنباله $\{e_j\}_{j\in J}$ را یک پایه در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ می نامند، هرگاه به ازای هر $f\in\mathcal{H}$ ضرایب اسکالر یکتای $\{c_j\}_{j\in J}$ موجود باشند به طوری که $f=\sum_{j\in J} c_j e_j$

تعریف ۳.۲.۱. دنباله $\{\varphi_j\}_{j\in J}$ را درفضای هیلبرت $\mathcal{H}$ یک دنباله کامل می نامند، هرگاه تساوی $\overline{Span}\{\varphi_j\}_{j\in J}=\mathcal{H}$ برقرار باشد. به عبارت دیگر به ازای هر $f\in\mathcal{H}$ دنباله اسکالرهای $\{c_j\}_{j\in J}$ وجود داشته باشد به طوری که

$$f=\sum_{j\in J} c_j\varphi_j$$

قضیه ۴.۲.۱. *یک خانواده کامل از بردارهای ناصفر $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ در $\mathcal{H}$ یک پایه برای $\mathcal{H}$ است اگر وتنها اگر عدد ثابت ومثبت K موجود باشد به طوری که به ازای هر دنباله $\{c_j\}_{j=1}^{\infty}$ ازاسکالرها و به ازای هر $m,n\in\mathbb{N}$ با شرط $m<n$ داشته باشیم*

$$\|\sum_{j=1}^{m} c_j e_j\|\le K\|\sum_{j=1}^{n} c_j e_j\|. \qquad (۱.۱)$$

برهان. فرض کنید $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک پایه باشد در این صورت هر $f \in \mathcal{H}$ دارای بسط یکتایی به صورت $f = \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j$ می باشد بنابراین

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \Big\| \sum_{j=1}^{n} c_j e_j \Big\| < \infty.$$

اگر تابع $|||.||| : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطه $|||f||| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \| \sum_{j=1}^{n} c_j e_j \|$ تعریف کنید آنگاه $|||.|||$ یک نرم روی $\mathcal{H}$ است و به ازای هر $f \in \mathcal{H}$ داریم $\|f\| \leq |||f|||$ یعنی عملگر همانی $I : (\mathcal{H}, |||.|||) \longrightarrow (\mathcal{H}, \|.\|)$ یک عملگر یک به یک و پیوسته و پوشاست. بنا به قضیه نگاشت باز نتیجه می شود که این عملگر دارای معکوس پیوسته است یعنی وجود دارد $K > 0$ به طوری که به ازای هر $f \in \mathcal{H}$ داریم $|||f||| \leq K\|f\|$. حال فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ دلخواه و از این به بعد ثابت باشد و $f = \sum_{j=1}^{n} c_j e_j$ چون داریم $|||f||| \leq K\|f\|$ در نتیجه داریم

$$\sup_{m<n} \Big\| \sum_{j=1}^{m} c_j e_j \Big\| \leq K \Big\| \sum_{j=1}^{n} c_j e_j \Big\|.$$

از این نتیجه می شود به ازای هر $m < n$

$$\Big\| \sum_{j=1}^{m} c_j e_j \Big\| \leq K \Big\| \sum_{j=1}^{n} c_j e_j \Big\|.$$

برای بالعکس فرض کنید $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک دنباله کامل از بردارهای ناصفر باشد که در شرط (۱.۱) صدق کند. برای آنکه $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک پایه برای $\mathcal{H}$ باشد باید نشان دهیم اگر $\sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j = 0$ آنگاه به ازای هر $j \in \mathbb{N}$ نتیجه می شود $c_j = 0$. حال فرض کنید $\sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j = 0$ در این صورت به ازای هر $j \in \mathbb{N}$ و هر $n \geq j$ از شرط (۱.۱) نتیجه می شود

$$|c_j|\|e_j\| \leq K \Big\| \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \Big\|.$$

با میل دادن $n \to \infty$ نتیجه می شود $|c_j| = 0$ در نتیجه $c_j = 0$. □

نتیجه ۵.۲.۱. *تابعک های خطی ضریبی $\{c_j\}_{j=1}^{\infty}$ مربوط به پایه $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ برای $\mathcal{H}$ پیوسته اند و می توان آنها را به عنوان اعضای دوگان $\mathcal{H} = \mathcal{H}^*$ درنظر گرفت.*

برهان. این نتیجه مستقیم قضیه ۴.۲.۱ است. □

۳.۱ پایه نامشروط

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید $\{e_j\}_{j\in J}$ یک پایه برای $\mathcal{H}$ باشد. اگر هر سری همگرا به شکل $\sum_{j\in J} c_j e_j$ همگرای نامشروط نیز باشد آنگاه $\{e_j\}_{j\in J}$ را یک پایه نامشروط می نامند.

لم ۲.۳.۱. *دنباله $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک پایه نامشروط است اگر وتنها اگر به ازای هر جایگشت σ از $\mathbb{N}$ دنباله $\{e_{\sigma(j)}\}_{j=1}^{\infty}$ یک پایه برای $\mathcal{H}$ باشد.*

برهان. به مرجع [14] مراجعه شود. $\square$

قضیه ۳.۳.۱. *فرض کنید $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک دنباله در $\mathcal{H}$ باشد دراین صورت گزاره های زیر معادلند.*

(۱) *سری $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ همگرای نامشروط است.*

(۲) *به ازای هر جایگشت σ از $\mathbb{N}$ سری $\sum_{j=1}^{\infty} f_{\sigma(j)}$ در $\mathcal{H}$ همگرا است.*

(۳) *به ازای هر $\varepsilon > 0$ یک زیر مجموعه متناهی $A_\varepsilon \subseteq \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که به ازای هر زیرمجموعه متناهی $B \subseteq \mathbb{N}$ اگر $A_\varepsilon \cap B = \emptyset$ آنگاه $\|\sum_{j\in B} f_j\| < \varepsilon$*

برهان. (۲) $\Rightarrow$ (۱) بنا به تعریف برقرار است. برای اثبات (۳) $\Rightarrow$ (۲) از برهان خلف استفاده می کنیم. فرض کنید برقرار نباشد، در این صورت $\varepsilon > 0$ می توان یافت به طوری که به ازای هر زیرمجموعه متناهی $A \subseteq \mathbb{N}$ یک مجموعه متناهی $B_A \subseteq \mathbb{N}$ یافت می شود به طوری که $A \cap B_A = \emptyset$ و $\|\sum_{j\in B_A} f_j\| \geq \varepsilon$. حال به ازای $A_1 = \{1\}$ وجود دارد $B_1 = B_{\{1\}}$ و به ازای $A_2 = \{1, 2, \cdots, \max B_1\}$ وجود دارد $B_2 = B_{A_2}$ و با ادامه این روند دنباله $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$ یافت می شود به طوری که به ازای هر $j \geq 1$ رابطه $\max B_j < \min B_{j+1}$ برقرار است. حال جایگشت σ از $\mathbb{N}$ را چنان در نظر بگیرید به طوری که به ازای هر $j \geq 1$ داشته باشیم $B_j = \{\sigma(r_j), \sigma(r_{j+1}), \cdots, \sigma(s_j)\}$ از این نتیجه می شود

$$\varepsilon \leq \|\sum_{j\in B_j} f_j\| = \|\sum_{j=r_j}^{s_j} f_{\sigma(j)}\|$$

که این تناقض با همگرایی $\sum_{j=1}^{\infty} f_{\sigma(j)}$ دارد.

(۱) $\Rightarrow$ (۲) فرض کنید σ یک جایگشت دلخواه از $\mathbb{N}$ و $\varepsilon > 0$ نیز دلخواه و از این به بعد ثابت باشند، در این صورت بنا به فرض زیرمجموعه متناهی $A_\varepsilon \subseteq \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که در شرط قضیه صدق می کند. فرض کنید $\mathbb{N}_\varepsilon > 0$ باشد به طوری که اگر $j \geq \mathbb{N}_\varepsilon$ آنگاه $\sigma(j) \notin A_\varepsilon$ و $\sigma^{-1}(j) \notin A_\varepsilon$ و $j \notin A_\varepsilon$. حال به ازای $N_\varepsilon \leq r < s$ قرار دهید $B = \{\sigma(j) : r \leq j \leq s\}$ و $C = \{j : r \leq j \leq s\}$ در این صورت B و C متناهی اند و $B \cap A_\varepsilon = C \cap A_\varepsilon = \emptyset$ بنا به فرض داریم

$$\|\sum_{j=r}^{s} f_{\sigma(j)}\| = \|\sum_{j\in B} f_j\| < \varepsilon \quad , \quad \|\sum_{j=r}^{s} f_j\| = \|\sum_{j\in C} f_j\| < \varepsilon$$

اکنون قرار دهید $x=\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ و $y=\sum_{j=1}^{\infty} f_{\sigma(j)}$ و

$$K=\{j: \quad 1\leq j\leq N_\varepsilon : \sigma(j)<N_\varepsilon\}$$

و

$$L=\{\sigma(j): \quad 1\leq j\leq N_\varepsilon, \sigma(j)>N_\varepsilon\}$$

در این صورت $K\cap A_\varepsilon=\emptyset$ و $L\cap A_\varepsilon=\emptyset$ در نتیجه

$$\|\sum_{j=1}^{N_\varepsilon} f_j-\sum_{j=1}^{N_\varepsilon} f_{\sigma(j)}\|=\|\sum_{j\in K} f_j-\sum_{j\in L} f_j\|<2\varepsilon$$

که نشان می دهد $\|x-y\|\leq 4\varepsilon$ که این (1) را نتیجه می دهد. □

۴.۱ دنباله های بسل

تعریف ۱.۴.۱. یک دنباله $\{f_j\}_{j\in J}$ در $\mathcal{H}$ را یک دنباله بسل می گویند هرگاه عدد حقیقی مثبت وثابت $B>0$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $f\in\mathcal{H}$ داشته باشیم

$$\sum_{j\in J}|<f,f_j>|^2\leq B\|f\|^2 \tag{۲.۱}$$

عدد ثابت $B>0$ که در نامساوی (۲.۱) صدق می کند رایک کران بسل برای دنباله $\{f_j\}_{j\in J}$ می گویند.

قضیه ۲.۴.۱. *فرض کنید $\{f_j\}_{j\in J}$ یک دنباله در $\mathcal{H}$ باشد دراین صورت $\{f_j\}_{j\in J}$ یک دنباله بسل با کران بسل B است اگروتنها اگرنگاشت $T:\ell^2(J)\longrightarrow\mathcal{H}$ با ضابطه $T(\{c_j\}_{j\in J})=\sum_{j\in J} c_jf_j$ یک عملگر خوش تعریف کران دار باشد و $\|T\|\leq\sqrt{B}$*

برهان. ابتدا فرض کنید $\{f_j\}_{j\in J}$ یک دنباله بسل با کران بسل B باشد فرض کنید $\{c_j\}_{j\in J}\in\ell^2(J)$ ابتدا باید نشان داد $T(\{c_j\}_{j\in J})$ خوش تعریف است یعنی $\sum_{j\in J} c_jf_j$ همگرا است. به ازای هر زیرمجموعه متناهی $I\subseteq J$ داریم

$$\begin{aligned}\|\sum_{j\in I} c_jf_j\|&=\sup_{\|g\|=1}|\langle\sum_{j\in I} c_jf_j,g\rangle|\leq\sup_{\|g\|=1}\sum_{j\in I}|c_j\langle f_j,g\rangle|\\&\leq\Big(\sum_{j\in I}|c_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\sup_{\|g\|=1}\Big(\sum_{j\in I}|\langle f_j,g\rangle|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\\&\leq\sqrt{B}\Big(\sum_{j\in I}|c_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

چون $\{c_j\}_{j\in J}\in \ell^2(J)$ در نتیجه $\sum_{j\in J}|c_j|^2_{j\in J}$ همگرا در $\mathbb{C}$ است. اکنون محاسبات بالا نشان می دهد که تور $\left\{\sum_{j\in I}c_jf_j\right\}_{I\in\Lambda}$ یک تور کوشی در $\mathcal{H}$ است و بنابراین همگرا است. بنابراین $T(\{c_j\}_{j\in J})$ خوش تعریف است به وضوح T خطی است چون

$$\|T(\{c_j\}_{j\in J})\|\leq \sqrt{B}\|\{c_j\}_{j\in J}\|$$

در نتیجه T کران دار است و $\|T\|=\sqrt{B}$

□

۵.۱ پایه متعامد یکه

تعریف ۱.۵.۱. فرض کنید $\{e_j\}_{j\in J}$ یک دنباله در $\mathcal{H}$ باشد دراین صورت دنباله $\{e_j\}_{j\in J}$ را یک دستگاه متعامد یکه در $\mathcal{H}$ می گویند هرگاه به ازای هر $i,j\in\mathbb{N}$ بتوان نوشت

$$< e_i,e_j >=\delta_{ij} \tag{۳.۱}$$

تعریف ۲.۵.۱. فرض کنید $\{f_i\}_{i\in J}$ و $\{g_j\}_{j\in J}$ دو دنباله در $\mathcal{H}$ باشند در این صورت دنباله $\{g_j\}_{j\in J}$ را یک دنباله جفت متعامد برای $\{f_j\}_{j\in J}$ می گویند هرگاه به ازای هر $i,j\in J$

$$< f_i,g_j >=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases} \tag{۴.۱}$$

قضیه ۳.۵.۱. *برای هر دستگاه متعامد یکه $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ گزاره های زیر معادل هستند.*

(۱) $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک پایه متعامد یکه است

(۲) به ازای $f\in\mathcal{H}$ همواره $f=\sum_{j=1}^{\infty}\langle f,e_j\rangle e_j$ برقرار است

(۳) به ازای هر $f,g\in\mathcal{H}$ می توان نوشت $< f,g >=\sum_{j=1}^{\infty}< f,e_j >< e_j,g >$

(۴) به ازای هر $f\in\mathcal{H}$ همواره $\|f\|^2=\sum_{j=1}^{\infty}|< f,e_j >|^2$ برقرار است

(۵) $\overline{span}\{e_j\}_{j=1}^{\infty}=\mathcal{H}$

(۶) اگر $f\in\mathcal{H}$ وبه ازای هر $j\in\mathbb{N}$ رابطه $< f,e_j >=0$ برقرار باشد آنگاه $f=0$

برهان. (۱) $\Leftarrow$ (۲) فرض کنید $f\in\mathcal{H}$ اگر $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک پایه متعامد یکه برای $f\in\mathcal{H}$ باشد دراین صورت ضرایب $\{c_j\}_{j=1}^{\infty}$ وجوددارد به طوری که $f=\sum_{j=1}^{\infty}c_je_j$ حال فرض کنید $k\in\mathbb{N}$ دلخواه

در این صورت داریم $< f, e_k >= \sum_{j=1}^{\infty} c_j \delta_{jk} = c_k$ بنابراین $f = \sum_{j=1}^{\infty} < f, e_j > e_j$ یعنی (۲) نتیجه می شود

(۳) $\Leftarrow$ (۲) فرض کنید $f, g \in \mathcal{H}$ بنا به فرض داریم $f = \sum_{j=1}^{\infty} < f, e_j > e_j$ درنتیجه

$$< f, g >=< \sum_{j=1}^{\infty} < f, e_j > e_j, g >= \sum_{j=1}^{\infty} < f, e_j >< e_j, g >$$

(۴) حالت خاصی از (۳) است زیرا

$$\|f\|^2 =< f, f >= \sum_{j=1}^{\infty} < f, e_j >< e_j, f >= \sum_{j=1}^{\infty} | < f, e_j > |^2$$

(۵) $\Leftarrow$ (۴) فرض کنید $W = \overline{span}\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ در این صورت داریم $\mathcal{H} = W \oplus W^{\perp}$ حال ثابت می کنیم $W^{\perp} = \{0\}$ فرض کنید $f \in \mathrm{W}^{\perp}$ درنتیجه به ازای هر $k \in \mathbb{N}$ داریم $< f, e_k >= 0$ چون داریم

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} | < f, e_k > |^2 = 0$$

در نتیجه $\|f\|^2 = 0$ بنابراین $\|f\| = 0$ لذا $f = 0$ بنابراین $\mathcal{H} = W$ یا $\mathcal{H} = \overline{span}\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$

(۶) $\Leftarrow$ (۵) فرض کنید $f \in \mathcal{H}$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $k \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $< f, e_k >= 0$ ولی $f \neq 0$ در این صورت $f \notin \overline{span}\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ بنابراین $\mathcal{H} \neq \overline{span}\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ و این خلاف فرض است بنابراین (۶) ثابت می شود

(۱) $\Leftarrow$ (۶) فرض کنید $f \in \mathcal{H}$ نشان می دهیم $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک دنباله بسل است. به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$\|f - \sum_{j=1}^{\infty} < f, e_j > e_j\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{j=1}^{n} | < f, e_j > |^2$$

در نتیجه

$$\|f\|^2 - \sum_{j=1}^{n} | < f, e_j > |^2 \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} | < f, e_j > |^2 \leq \|f\|$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} | < f, e_j > |^2 \leq \|f\|$$

بنابراین $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک دنباله بسل است درنتیجه سری $\sum_{j=1}^{\infty} | < f, e_j > |^2$ همگرا است. بنابراین سری $g = \sum_{j=1}^{\infty} < f, e_j > e_j$ همگرا است. حال به ازای هر $k \in \mathbb{N}$ داریم

$$< f - g, e_k >=< f, e_k > - < g, e_k >=< f, e_k > - < f, e_k >= 0$$

در نتیجه $< f-g, e_k >= 0$ بنابراین $f-g=0$ پس $f=g$ بنابراین $f=\sum_{j=1}^{\infty} < f, e_j > e_j$
برای آنکه ثابت شود $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک پایه برای $\mathcal{H}$ است ثابت می کنیم $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ مستقل خطی است
فرض کنید $\sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j = 0$ در این صورت به ازای هر $j \in \mathbb{N}$ داریم

$$0 =< 0, e_j >=< \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k, e_j >= \sum_{k=1}^{\infty} c_k < e_k, e_j >= c_k$$

بنابراین $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ مستقل خطی است در نتیجه یک پایه برای $\mathcal{H}$ است. □

نتیجه ۴.۵.۱. *اگر $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک پایه متعامد یکه برای $\mathcal{H}$ باشد دراین صورت به ازای هر $f \in \mathcal{H}$ بسط $f=\sum_{j=1}^{\infty} < f, e_j > e_j$ همگرای نامشروط است بالاخص پایه دوگان آن مساوی خود پایه $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ می باشد.*

برهان. به مرجع [14] رجوع شود. □

قضیه ۵.۵.۱. *هرفضای جدایی پذیر هیلبرت دارای یک پایه متعامد یکه است.*

برهان. به مرجع [14] رجوع شود. □

مثال ۶.۵.۱. فرض کنید $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک دنباله در $\ell^2(\mathbb{N})$ باشد که j -امین درآیه آن یک وبقیه درآیه های دیگر صفر باشند در این صورت $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک پایه متعامد یکه برای $\ell^2(\mathbb{N})$ است که آن را پایه متعامدیکه استانده $\ell^2(\mathbb{N})$ می گویند که معمولا پایه استانده را به صورت $\{\delta_j\}_{j=1}^{\infty}$ نشان می دهند.

برهان. به مرجع [14] رجوع شود. □

۶.۱ پایه ریس

تعریف ۱.۶.۱. یک پایه ریس برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ عبارت است از یک دنباله $\{Te_j\}_{j=1}^{\infty}$ که در آن $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک پایه متعامد یکه برای $\mathcal{H}$ است و $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ یک عملگر خطی وکران دار و دو سویی است.

لم ۲.۶.۱. *دنباله $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک پایه ریس برای $\mathcal{H}$ است اگروتنها اگر یک پایه نامشروط برای $\mathcal{H}$ باشد و*

$$0 < \inf_{j\in\mathbb{N}} \|f_j\| \leq \sup_{j\in\mathbb{N}} \|f_j\| < \infty$$

برهان. به مرجع [14] رجوع شود. □

قضیه ۳.۶.۱. *فرض کنید $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک پایه ریس برای $\mathcal{H}$ باشد در این صورت یک دنباله یکتای $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ در $\mathcal{H}$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $f \in \mathcal{H}$ داریم*

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} < f, g_j > f_j \tag{۵.۱}$$

همچنین دنباله $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ نیز یک پایه ریس برای $\mathcal{H}$ است و $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ و $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ دو دنباله جفت متعامدیکه هستند وبه علاوه به ازای هر $f \in \mathcal{H}$ سری (۵.۱) همگرای نا مشروط است.

برهان. به مرجع [14] رجوع شود. □

۷.۱ فریم ها در فضاهای هیلبرت

تعریف ۱.۷.۱. یک دنباله $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ از عناصر در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ یک فریم برای $\mathcal{H}$ است. اگر ثابت های مثبت $0 < A \leq B < \infty$ وجود داشته باشند به طوری که به ازای هر $f \in \mathcal{H}$ داشته باشیم

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} | < f, f_j > |^2 \leq B\|f\|^2$$

اعداد A و B را کران های پایین و بالای فریم می گویند این اعداد یکتا نیستند. کران بالای بهینه فریم عبارت است از اینفیموم روی تمام کران های بالای فریم و کران پایین بهینه فریم عبارت است از سوپریموم روی تمام کران های پایین فریم. توجه کنید کران های بهینه در واقع همان کران های فریم نیز می نامند.
الف) $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ را یک فریم بی رخنه می نامند هرگاه $A = B$ ب) اگر در یک فریم عنصر دلخواه خاصیت فریم بودن آن خاتمه بیابد آن را یک فریم دقیق می گویند. تعریف نشان می دهد که اگر $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک فریم برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد آنگاه $\overline{span}\{f_j\}_{j=1}^{\infty} = \mathcal{H}$ ما اغلب نیاز داریم دنباله هایی که در $\mathcal{H}$ کامل نیستند را در نظر بگیریم. آنها نمی توانند تشکیل یک فریم برای $\mathcal{H}$ را بدهند. اما آنها می توانند خیلی خوب تشکیل یک فریم برای فضای بسته خطی تولید شده به وسیله عناصرشان را بدهند.

تعریف ۲.۷.۱. فرض کنید $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک دنباله در $\mathcal{H}$ باشد. $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک دنباله فریم است هرگاه آن یک فریم برای $\overline{span}\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ باشد.

مثال ۳.۷.۱. فرض کنید $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک پایه متعامد یکه برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. به وسیله

دوبار تکرار هر عضو در $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ ما داریم

$$\{f_j\}_{j=1}^{\infty} = \{e_1, e_1, e_2, e_2, \ldots, e_j, e_j, \ldots\}$$

که یک فریم بی رخنه با کران فریم $A = 2$ است. اگر فقط e_1 تکرار شود ما داریم

$$\{f_j\}_{j=1}^{\infty} = \{e_1, e_1, e_2, e_3, e_4, \ldots\}$$

که یک فریم با کران های $A = 1$ و $B = 2$ است.

مثال ۴.۷.۱. فرض کنید

$$\{f_j\}_{j=1}^{\infty} = \{e_1, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \ldots\}$$

یعنی $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ دنباله ایی است که هر بردار $\frac{1}{\sqrt{j}}e_j$ به تعداد j بار تکرار می شود در این صورت به ازای هر $f \in \mathcal{H}$ داریم

$$\sum_{j=1}^{\infty} | < f, f_j > |^2 = \sum_{j=1}^{\infty} j| < f, \frac{1}{\sqrt{j}}e_j > |^2 = \sum_{j=1}^{\infty} | < f, e_j > |^2 = \|f\|^2$$

بنابراین $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک فریم بی رخنه برای $\mathcal{H}$ با کران فریم $A = 1$ است.

مثال ۵.۷.۱. فرض کنید $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک پایه متعامد یکه برای $\mathcal{H}$ باشد و $J \subsetneqq \mathbb{N}$ یک زیر مجموعه ناسره از $\mathbb{N}$ باشد در این صورت دنباله $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ در $\mathcal{H}$ کامل نیست و در نتیجه نمی تواند یک فریم باشد. با این وجود دنباله $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک فریم برای فضای $\overline{span}\{e_j\}_{j\in I}$ می باشد بنابراین این یک دنباله فریم است.

تعریف ۶.۷.۱. فرض کنید $\mathcal{F} = \{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک فریم برای $\mathcal{H}$ باشد چون هر فریم $\mathcal{F} = \{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک دنباله بسل در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ است در نتیجه بنابه قضیه ۲.۴.۱ عملگر

$$T_{\mathcal{F}} : \ell^2(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathcal{H}$$

$$T_{\mathcal{F}}(\{c_j\}_{j=1}^{\infty}) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j f_j$$

یک عملگر کران دار می باشد عملگر $T_{\mathcal{F}}$ را عملگر پیش فریم می گویند. بنا به لم ۲.۲.۱ در [۱۴] عملگر الحاقی آن به صورت زیر ارائه می شود

$$T_{\mathcal{F}}^{\star} : \mathcal{H} \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N}) \quad , \quad T_{\mathcal{F}}^{\star}f = \{\langle f, f_j\rangle\}_{j\in\mathbb{N}}$$

$T_{\mathcal{F}}^{\star}$ را عملگر تجزیه نیز می نامند. به وسیله ترکیب کردن عملگرهای $T_{\mathcal{F}}^{\star}$ و $T_{\mathcal{F}}$ عملگر فریم بدست می آید.

$$S_{\mathcal{F}} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \quad , \quad S_{\mathcal{F}}f = T_{\mathcal{F}}T_{\mathcal{F}}^{*}f = \sum_{j=1}^{\infty}\langle f, f_j\rangle f_j$$

در مرجع [۱۴] ثابت شده است که عملگر فریم $S_{\mathcal{F}}$ یک عملگر خطی و کران دار و معکوس پذیر و خودالحاق است. و

$$AI_{\mathcal{H}} \leq S_{\mathcal{F}} \leq BI_{\mathcal{H}} \quad , \quad \frac{1}{B}I_{\mathcal{H}} \leq S_{\mathcal{F}}^{-1} \leq \frac{1}{A}I_{\mathcal{H}}$$

لم ۱.۷.۷. *دنباله $\mathcal{F} = \{f_j\}_{j\in J}$ یک پایه ریس برای $\mathcal{H}$ است اگروتنهااگر $\mathcal{F}$ یک فریم دقیق برای $\mathcal{H}$ باشد. به علاوه اگر $\mathcal{F}$ یک فریم دقیق برای $\mathcal{H}$ باشد آنگاه $\{f_j\}_{j\in J}$ و $\{S_{\mathcal{F}}^{-1}f_j\}_{j\in J}$ دنباله های زوج متعامد هستند.*

برهان. به [۱۴] رجوع شود. $\square$

فصل ۲

g-فریم ها (g- قاب ها)در فضاهای هیلبرت

۱.۲ g-فریم در فضاهای هیلبرت

در سرتاسر این فصل $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$ فضاهای هیلبرت جدایی پذیر و $\{V_j\}_{j\in J}$ یک خانواده از زیرفضاهای بسته $\mathcal{K}$ هستند و $\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ را خانواده تمام عملگرهای خطی و کران دار در نظر می گیرند.

تعریف ۱.۱.۲. (بنا به [۳۲]) به ازای هر $j\in J$ فرض کنید $\Lambda_j\in\mathcal{L}(\mathcal{H},V_j)$ در این صورت $\Lambda=\{\Lambda_j\}_{j\in J}$ را یک فریم تعمیم یافته یا به طور خلاصه یک g -فریم برای $\mathcal{H}$ نسبت به $\{V_j\}_{j\in J}$ می گویند هرگاه اعداد حقیقی مثبت $0<A\leq B<\infty$ موجود باشند به طوری که به ازای هر $f\in\mathcal{H}$ رابطه زیر برقرار باشد

$$A\|f\|^2\leq\sum_{j\in J}\|\Lambda_j f\|^2\leq B\|f\|^2$$

اعداد A و B را به ترتیب کران های پایین و بالای g-فریم می نامند. Λ را یک g-فریم بی رخنه می نامند هرگاه $A=B$ و آن را یک g -فریم پارسوال می نامند هرگاه $A=B=1$ همچنین آن را یک g -فریم دقیق گویند هرگاه با حذف هر عضو از دنباله Λ خاصیت g - فریم بودن از بین برود. یا دنباله $\{\Lambda_j\}_{j\in J}$ حداقل عضو را برای g -فریم بودن داشته باشد. اگر به ازای هر $j\in J$ داشته باشیم $V_j=K$ آنگاه $\{\Lambda_j\}_{j\in J}$ یک g -فریم برای $\mathcal{H}$ نسبت به $\mathcal{K}$ می نامند.

مثال ۲.۱.۲. هر فریم یک g -فریم تولید می کند.

برهان. فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت جدایی پذیر باشد و $\{f_j\}_{j\in J}$ یک فریم برای $\mathcal{H}$ باشد در

نتیجه اعداد حقیقی و مثبت $0 < A \leq B < \infty$ وجود دارند به طوری که به ازای هر $f \in \mathcal{H}$

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j\in J} | < f, f_j > |^2 \leq B\|f\|^2 \qquad (۱.۲)$$

اگر به ازای هر $j \in J$ قرار دهید: $\Lambda_j f =< f, f_j >$ در این صورت $\|\Lambda_j f\|^2 = | < f, f_j > |^2$ و در نتیجه

$$\sum_{j\in J} \|\Lambda_j f\|^2 = \sum_{j\in J} | < f, f_j > |^2 \qquad (۲.۲)$$

اکنون از روابط (۲.۲) و (۱.۲) نتیجه می شود

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j\in J} \|\Lambda_j f\|^2 \leq B\|f\|^2$$

در نتیجه $\{\Lambda_j\}_{j\in J}$ یک g-فریم برای $\mathcal{H}$ نسبت به $\mathbb{C}$ است. g-فریم بالا را g-فریم تولید شده به وسیله فریم $\{f_j\}_{j\in J}$ می گویند این مثال نشان می دهد که هر g فریم تعمیم یک فریم است. $\square$

لم ۳.۱.۲. *فرض کنید $\Lambda = \{\Lambda_j\}_{j\in J}$ یک g-فریم برای $\mathcal{H}$ نسبت به $\{V_j\}_{j\in J}$ باشد اگر به ازای هر $j \in J$ داشته باشیم $V_j = \mathbb{C}$ آنگاه Λ هم ارز یک فریم برای $\mathcal{H}$ است.*

برهان. چون به ازای هر $j \in J$ عملگر $\Lambda_j : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ یک عملگر خطی و کران دار می باشد. بنا به قضیه نمایش ریس عنصر $f_j \in \mathcal{H}$ وجود دارد به طوری که

$$\Lambda_j f =< f, f_j > \qquad (۳.۲)$$

نشان می دهیم $\{f_j\}_{j\in J}$ یک فریم برای $\mathcal{H}$ است بنا به فرض چون $\{\Lambda_j\}_{j\in J}$ یک g-فریم برای $\mathcal{H}$ نسبت به $\mathbb{C}$ است پس وجود دارد $0 < A \leq B < \infty$ به طوری که به ازای هر $f \in \mathcal{H}$

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j\in J} |\Lambda_j f|^2 \leq B\|f\|^2 \qquad (۴.۲)$$

بنا به روابط (۳.۲) و (۴.۲) داریم

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j\in J} |\langle f, f_j\rangle|^2 \leq B\|f\|^2$$

بنابراین $\{f_j\}_{j\in J}$ یک فریم برای $\mathcal{H}$ است. $\square$

مثال ۴.۱.۲. فرض کنید $\mathcal{H}_0$ یک زیر فضای بسته از $\mathcal{H}$، $\{f_j\}_{j\in J} \subseteq \mathcal{H}_0$ و $\{g_j\}_{j\in J} \subseteq \mathcal{H}$ به ترتیب دنباله های بسل در $\mathcal{H}_0$ و $\mathcal{H}$ باشند در این صورت دنباله $\{f_j\}_{j\in J} \subseteq \mathcal{H}_0$ را یک شبه فریم برای $\mathcal{H}_0$ می نامند هرگاه به ازای هر $f \in \mathcal{H}_0$ داشته باشیم

$$f = \sum_{j\in J} < f, f_j > g_j$$