بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه آزاد اسلامی

واحد تهران مرکزی

دانشکده علوم پایه، گروه فیزیک

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد (M.Sc)

گرایش : ذرات بنیادی و نظریه میدان ها

عنوان :

تک قطبی های مغناطیسی در کرومودینامیک کوانتومی

استاد راهنما :

دکتر شهنوش رفیع بخش

استاد مشاور :

دکتر ناهید احمدی

پژوهشگر :

مجتبی اشراقی

تابستان ۱۳۹۱

بسمه تعالی

تعهد اصالت پایان نامه کارشناسی ارشد

اینجانب **مجتبی اشراقی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **فیزیک ذرات بنیادی و نظریه میدان ها** با شماره دانشجویی **۸۹۰۶۷۰۱۵۸۰۰** اعلام می نمایم که کلیه مطالب مندرج در این پایان نامه با عنوان : **تک قطبی های مغناطیسی در کرومودینامیک کوانتومی**، حاصل کار پژوهشی خود بوده و چنانچه دستاوردهای پژوهشی دیگران را مورد استفاده قرارداده باشم، طبق ضوابط و رویه های جاری، آن را ارجاع داده و در فهرست منابع و مآخذ ذکر نموده ام. علاوه بر آن تاکید می نمایم که این پایان نامه قبلا برای احراز هیچ مدرک هم سطح، پایین تر و یا بالاتر ارائه نشده و چنانچه در هر زمان خلاف آن ثابت شود، بدینوسیله متعهد می شوم در صورت ابطال مدرک تحصیلی ام توسط دانشگاه، بدون کوچکترین اعتراض آن را بپذیرم.

تاریخ و امضاء

بسمه تعالی

در تاریخ : **۱۳۹۱/۰٦/۰۲**

دانشجوی کارشناسی ارشد آقای **مجتبی اشراقی** از پایان نامه خود دفاع نموده و با نمره **۱۸/۵** به حروف **هجده و نیم** و با درجه **عالی** مورد تصویب قرار گرفت.

امضاء استاد راهنما

تقدیم به

همسر مهربانم

که تمامی موفقیت ها و لحظات به یادماندنی ام را مدیون او هستم

تشکر و قدردانی:

با تشکر فراوان از استاد بزرگوارم سرکار خانم دکتر رفیع بخش

که در طی تمامی مراحل نگارش این پایان نامه از هیچ کوششی دریغ ننمودند

و با سپاس از استاد ارجمند سرکار خانم دکتر احمدی

فهرست

۱ – مقدمه

۱-۱ دستاوردهای دیراک درزمینه تک قطبی مغناطیسی

زمانی که القای الکترومغناطیسی کشف گردید و این مفهوم بنا نهاده شد که مغناطیس از حرکت بارهای الکتریکی ایجاد می گردند، میدان های الکتریکی و مغناطیسی به عنوان اولین مثال های مهم یکپارچگی در فیزیک مطرح گردیدند. رفتار کامل میدان الکترومغناطیسی توسط جمیز کلارک ماکسول[۱] در سال ۱۸٦٤، در ٤ معادله اساسی خلاصه گردید که بعدها به معادلات ماکسول مشهور شدند:

$$\nabla . \boldsymbol{E} = \rho \,, \quad \nabla . \boldsymbol{B} = 0, \quad \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \boldsymbol{B} = j + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \qquad (۱-۱)$$

که در آن ρ و $\boldsymbol{j}$ به ترتیب چگالی بار الکتریکی و جریان الکتریکی هستند. در این معادلات به دلیل عدم وجود چگالی بار مغناطیسی و جریان مغناطیسی یک عدم تقارن بد شکلی وجود دارد. این برابر آن است که بگوییم هیچ ذراتی وجود ندارند که منشا میدان مغناطیسی باشند. البته بسیار طبیعی است که وجود آن ها برای ما یک سوال باشد حتی اگر هیچ گاه آن ها را نیابیم.

[1] James Clerk Maxwell

اولین شخصی که به موضوع وجود و یا عدم وجود تک قطبی مغناطیسی [۲]پرداخت پائول دیراک[۳] در سال ۱۹۳۱ بود. سپس تک قطبی به عنوان انتهای یک سولونوئید با شعاع بسیار کوچک و بسط یافته تا بی نهایت در نظر گرفته شد. اولین مشکل زمانی پدیدار گشت که تک قطبی در نظریه الکترومغناطیس قرارگرفت یعنی $\nabla.\boldsymbol{B} = \rho_m$ (که ρ_m چگالی بار مغناطیسی است)، در این حالت میدان مغناطیسی نمی تواند به صورت چرخش کل پتانسیل برداری A توصیف گردد ($\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$). دیراک دریافت که به منظور تعریف هر دوی بار مغناطیسی و پتانسیل برداری در نظریه، پتانسیل برداری مجبور است که در یک جهت نامتنهای باشد، بنابراین میدان مغناطیسی به شکل زیر تعریف می گردد:

$$\boldsymbol{B} = (\nabla \times \boldsymbol{A}) - 2\pi\delta^{(3)}(\hat{x} - \hat{n}) \qquad (۲-۱)$$

تکینگی در یک جهت عموما به عنوان ریسمان دیراک[۴] شناخته می شود و می تواند به طور فیزیکی با سولونوئید نامتناهی از تک قطبی تا بی نهایت، مشارکت یابد. شایان ذکر است که اگرچه پتانسیل برداری به طور یکتا تعریف نشده است، ممکن است جهت تکینگی توسط اعمال یک تبدیل پیمانه ای میدان تغییر کند که در این صورت فیزیک آن ناوردا باقی می ماند. بنابراین، ریسمان دیراک یک خاصیت ناوردای پیمانه ای نیست و نمی تواند به طور تجربی رصد گردد.

از آنجایی که ریسمان دیراک قابل مشاهده نمی باشد، دیراک نشان داد [۱] که اگر تک قطبی مغناطیسی وجود داشته باشد، بار الکتریکی می بایست کوانتیزه باشد، یعنی تمامی بارهای الکتریکی می بایست مضرب صحیحی از واحد بنیادی e باشند.

---

[2] Magnetic Monopole
[3] Paul Dirac
[4] Dirac String

شرط کوانتش دیراک[5] به شکل زیر تعریف می گردد:

$$qg = 2\pi\hbar n \tag{۱-۳}$$

که در آن q و g به ترتیب بار الکتریکی و مغناطیسی هستند که در طبیعت وجود دارد.

در حقیقت کوانتش بار الکتریکی در طبیعت مشاهده شده است ولی تا کنون هیچ کس نتوانسته توجیه مناسبی برای آن بیابد. این مباحث باعث گردیده که بسیاری از فیزیکدانان مطرح، اعتقادی قوی به وجود تک قطبی مغناطیسی داشته باشند. البته مشهورترین جمله در این ارتباط بی شک سخن دیراک بوده است:

«تنها چیزهایی در این جهان باعث تعجب هستند که خداوند هیچ استفاده ای برای آن ها قرار نداده باشد»

۱-۲ مشاهده تک قطبی مغناطیسی

تا به امروز هیچ کس موفق به دیدن تک قطبی های مغناطیسی نشده است. هرچند، معضلات زیادی در این چنین مشاهده ای وجود دارد، اما از آن جایی که در تمامی مدل های یکپارچگی که خصوصیات تک قطبی با جزئیات مورد محاسبه قرار می گیرد، می توانیم بفهمیم که دارای جرم بسیار زیادی می باشد که به طور خاص، برخی مدل ها جرمی از مرتبه $10^{16} Gev$ را برای آن تخمین میزنند.

دو ابزار اصلی انسان برای رصد کردن یک ذره جدید، شتاب دهنده های ذرات مانند برخورد دهنده[6] بزرگ هادرونی و پرتوهای کیهانی هستند که ضرورتا ذراتی با محدوده ی بزرگی از انرژی می باشند

[5] Dirac's Quantization Condition

که به طور طبیعی در کیهان شتاب گرفته اند. این ها به طور ثابت به زمین برخورد می کنند و می توانند در مشاهدات فضایی رصد گردند.

شتاب دهنده های ذرات دارای حوزه محدودی از انرژی هستند و بنابراین جای تعجبی ندارد که هیچ کس تا کنون موفق به دیدن تک قطبی ها نشده است. تمامی کاری که می تواند با این فناوری انجام داد، اعمال یک قید پایین به جرم تک قطبی است.[۲] از این رو امید به دیدن تک قطبی های مغناطیسی معطوف به پرتوهای کیهانی گردیده است.

حرارت کیهان کنونی خیلی کمتر از آن است که منجر به خلق تک قطبی شود. با این وجود سناریو کیهان شناختی استاندارد بیان می کند که تک قطبی ها در مراحل اولیه کیهان ما خلق شده اند و بنابراین ما انتظار وجود یک شار هرچند کوچک از تک قطبی های مغناطیسی را داریم. [۲]

این حقیقت که ما تا کنون تک قطبی های مغناطیسی را مشاهده نکرده ایم می تواند از دو منظر برداشت شود: یا مدل ما از تاریخچه کیهان اشتباه است و باید دوباره ساختارسازی شود و یا از آنجایی که معضلات تجربی زیادی در مشاهده تک قطبی ها به دلیل کندی و کم تعدادی آن ها در پرتوهای کیهانی وجود دارد از این رو تک قطبی های مغناطیسی همچنان چالشی عظیم برای فیزیکدانان هستند که تلاش می کنند تا آن ها را مشاهده کنند.

اگر روزی تک قطبی های مغناطیسی به صراحت دیده شوند، این مطلب را پوشش می دهد که یک نظریه بزرگ یکپارچه متضمن مدل استاندارد باشد.

---

[6] Collider

۱-۳ کرومودینامیک کوانتومی[۷] (QCD)

در فیزیک نظری کرومودینامیک کوانتومی یک نظریه برای برهم کنش های قوی است، یک نیروی بنیادی برهم کنش میان کوارک ها[۸] و گلئون ها[۹] را که به تولید هادرون می انجامد، توصیف می کند. کرومودینامیک کوانتومی به نوعی مطالعه نظریه یانگ – میلز در $SU(3)$ (کوارک های باردار رنگی) می باشد. کرومودینامیک کوانتومی یک نظریه میدان کوانتومی برای یک نوع خاص است که نظریه پیمانه ای غیرآبلی خوانده می شود. این نظریه بخش مهم مدل استاندارد فیزیک ذرات است.

کرومودینامیک کوانتومی دارای دو خاصیت بسیار مهم است:

۱- محبوس شدگی[۱۰] : بدین معناست که نیروی میان کوارک ها با جداشدنشان کاهش نمی یابد. به این دلیل که جدایی دو کوارک مقدار نامحدودی از انرژی را می طلبد، بنابراین آن ها به طور دائم درون هادرون مقید می مانند که از پروتون و نوترون می توان به عنوان مثال یاد کرد.

۲- آزادی مجانبی[۱۱] : بین معناست که در برهم کنش های بسیار پر انرژی کوارک ها و گلئون ها به سرعت واکنش می دهند. این پیشگویی کرومودینامیک کوانتومی ابتدا در سال ۱۹۷۰ توسط دیوید پولیتزر[۱۲]، فرانک ویلچک[۱۳] و دیوید گراس[۱٤] کشف گردید. آن ها برای این کار در سال ۲۰۰٤ موفق به کسب جایزه نوبل گردیدند.

[7] Quantum Chromodynamics
[8] Quarks
[9] Gluon
[10] Confinement
[11] Asymptotic Freedom
[12] David Politzer
[13] Frank Wilczek

۱-٤ تک قطبی های مغناطیسی و تصویر آبلی[۱۵]

تک قطبی های آبلی به صورت نتیجه ای از تصویر آبلی از میدان های پیمانه ای غیرآبلی هستند که به وسیله توفت [۳] پیشنهاد گردید. تصویر آبلی یک تثبیت پیمانه ای[۱٦] جزیی است که تحت آن درجات آزادی تثبیت نشده باقی می مانند.

به عنوان مثال تصویر آبلی یک نظریه با تقارن پیمانه ای $\mathrm{SU(N)}$ به یک نظریه با تقارن پیمانه ای $[\mathrm{U(1)}]^{\mathrm{N-1}}$ می انجامد. از آنجاییکه گروه تقارن پیمانه ای $\mathrm{SU(N)}$ یک گروه فشرده است، گروه تقارنی پیمانه ای باقی مانده نیز فشرده می باشد. اما نظریه های پیمانه ای آبلی با گروه های تقارن پیمانه ای فشرده، دارای تک قطبی های آبلی هستند. بنابراین نظریه پیمانه ای $\mathrm{SU(N)}$ در پیمانه آبلی دارای تک قطبی های آبلی هستند.

۱-٥ ساختار پایان نامه

پایان نامه حاضر مبتنی بر بررسی مدل های ارائه شده در خصوص تک قطبی های مغناطیسی از تک قطبی دیراک تا مدل های ارائه شده توسط فیزیکدانانی چون توفت، پلیاکوف ، جورجی- گلاشو و ... می باشد. پس از این مقدمه در فصل دوم سعی گردیده است ابتدا نگاهی کوتاه به نظریه گروه های تقارنی انداخته شده و گروه های تقارنی که در مباحث مرتبط با تک قطبی های مغناطیسی وارد می شوند، مورد بررسی قرار گیرد. سپس در بخش دوم پدیده شکست خوبخودی تقارن معرفی شده و کارکرد آن در ارائه مدل های تک قطبی مغناطیسی روشن می گردد.

---

[14] David Gross
[15] Abelian Projection
[16] Gauge Fixing

فصل سوم اختصاص به مبحث پر اهمیت ابررسانایی و نقش آن در اثبات وجود تک قطبی های مغناطیسی دارد.

در فصل چهارم تاریخچه ای از نظریات فیزیکدانان در خصوص وجود و یا عدم وجود تک قطبی مغناطیسی ارائه می شود و در انتهای این فصل مدل های مختلف بررسی تک قطبی ها مورد بحث و بررسی قرار می گیرد.

در فصل پنجم با استفاده از مبحث تثبیت پیمانه آبلی، به اثبات تک قطبی مغناطیسی و بار آن در گروه های تقارنی $SU(2)$ و $SU(3)$ می پردازیم و در انتها سعی خواهیم کرد پس از جمع بندی مطالب ارائه شده مسیری را برای مطالعات بیشتر ارائه نماییم.

۲- گروه های تقارنی و شکست خودبخودی تقارن

۲-۱ نظریه گروه ها

در بررسی ابعاد وجودی تک قطبی های مغناطیسی دو مفهوم اصولی نظریه گروه ها [1]و تقارن[2] نقش به سزایی را در ارائه مدل ها و نظریات در این خصوص ایفا می کنند. در این فصل پس از تعریف گروه و خواص مقدماتی آن با ارائه مثال هایی کاربردی به معرفی گروه های مورد استفاده در مبحث تک قطبی های مغناطیسی خواهیم پرداخت و سپس با بررسی شکست خودبخودی تقارن، نقش آن را در پدیده تک قطبی مورد پژوهش قرار خواهیم داد.

۲-۱-۱ گروه

بطورکلی گروه ساختار بسیار ساده ای دارد، زیرا تنها یک عمل در آن تعریف شده است.

تعریف: یک گروه عبارتست از یک مجموعه G به همراه یک عمل دوتایی $*: G \times G \to G$ و یک عنصر $e \in G$، به نحوی که دارای ویژگی های زیر باشد:

[1] Group Theory
[2] Symmetry

الف- شرکت پذیری[۳]

$$\forall a, b, c \in G \qquad (a * b) * c = a * (b * c) \tag{۲-۱}$$

ب- عضو خنثی[٤]

$$\exists e \in G, \forall a \in G \qquad a * e = e * a = a \tag{۲-۲}$$

ج- عضو وارون[٥]

$$\forall a \in G\ , \exists a^{-1} | a^{-1} * a = a * a^{-1} = e \tag{۲-۳}$$

تعریف: هرگاه که خاصیت $a * b = b * a$ در گروه وجود داشته باشد، گروه آبلی[٦] خوانده می شود و در غیر اینصورت گروه غیر آبلی[۷] است.

۲-۱-۲ انواع گروه ها

انواع مختلفی از گروه ها وجود دارند همانند گروه های پیوسته و گسسته. یک گروه گسسته دارای تعداد نامتناهی از عناصر می باشد. از مهمترین گروه های گسسته می توان به گروه های وارون پاریته[۸] P، همیوغ بار[۹] C و تقارن های وارون زمان[۱۰] T اشاره نمود. هرچند اکنون ما بیشتر به گروه های پیوسته ای نظیر چرخش که وابسته به یک مجموعه از زوایای پیوسته هستند، علاقمند می باشیم.

---

[3] Associative
[4] neutral element
[5] Inverse element
[6] Abelian Group
[7] Non-Abelian Group
[8] Parity Inversion
[9] Charge Conjugation
[10] Time-reversal

گروه O(2)

برای نشان دادن برخی مفاهیم مقدماتی بهتر است از گروه ساده ای همانند $O(2)$ یا همان گروه چرخش دو بعدی شروع کنیم. البته باید گفت حتی این گروه ساده نیز سرشار از محتویات است. هدف ما ساخت نمایش کاهش ناپذیر[۱۱] از $O(2)$ است. اما ابتدا مجبوریم چندین تعریف را ارائه کنیم.

اگر (x,y) مختصات نقطه ای را روی یک صفحه مشخص کند آن گاه بدین معناست که طبق قضیه فیثاغورث، طول x^2+y^2 تحت چرخش حول مبدا ناوردا می باشد.

اگر ما صفحه را به اندازه θ بچرخانیم، آن گاه مختصات (x',y') نقطه مشابه در سیستم جدید به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (۲-٤)$$

که ما به طور خلاصه آن را به این شکل نشان می دهیم:

$$x^{i'} = O^{ij}(\theta)x^j \qquad (۲-۵)$$

که در آن $x^1=x$ و $x^2=y$ می باشد. برای زوایای کوچک رابطه فوق می تواند به شکل زیر تنزیل یابد :

$$\delta x^i = \theta\epsilon^{ij}x^j \qquad (۲-٦)$$

که ϵ^{ij} پاد متقارن بوده و $\epsilon^{12}=-\epsilon^{21}=1$.

[11] Irreducible representation

گروه چرخش $O(2)$، گروه متعامد در دوبعد خوانده می شود و در واقع می تواند به صورت یک مجموعه از تمامی ماتریس های متعامد دوبعدی حقیقی تعریف گردد. هر ماتریس متعامد می تواند به شکل نمایی یک تک ماتریس پادمتقارن τ نوشته شود: [٤]

$$O(\theta) = e^{\theta\tau} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\theta\tau)^n$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (۷-۲)$$

با نوشتن $e^{\theta\tau}$ به صورت زیر، به نتیجه جالبی دست خواهیم یافت :

$$e^{\theta\tau} = \cos\theta\,\mathbf{1} + \tau\sin\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (۸-۲)$$

تمام عناصر $O(2)$ با یک زاویه θ پارامتری شده اند. بنابراین می گوییم $O(2)$ یک گروه تک پارامتری است یعنی که دارای یک بعد است.

$$det(OO^T) = det\,O\,det\,O^T = (det\,O)^2 = 1 \qquad (۹-۲)$$

و این بدان معناست که دترمینان O برابر ± 1 است، اگر ما این دترمینان را برابر یک بگیریم آن گاه زیرگروه حاصله $SO(2)$ یا ماتریس های متعامد ویژه[۱۲] در دو بعد نامیده می شود.

گروه SO(2)

چرخش هایی که تاکنون مورد مطالعه قرارداده ایم، اعضایی از گروه $SO(2)$ بوده اند. هرچند زیرمجموعه های نادری نیز وجود دارند که در آن، دترمینان O برابر -1 است. این زیرمجموعه ها شامل مولفه های $SO(2)$ برابر ماتریس زیر می باشند: [٤]

---

[12] Special Orthogonal Matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (۱۰-۲)$$

این تبدیل آخر متناظر با تبدیل پاریته[۱۳] به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} x &\to x \\ y &\to -y \end{aligned} \qquad (۱۱-۲)$$

تبدیل پاریته P یک صفحه را در نظر می گیرد و آن را روی تصویر آینه ای اش ترسیم میکند و بنابراین یک تبدیل گسسته است نه پیوسته.

هر چرخش، یک پایه متعامد بهنجار را به دیگر پایه متعامد بهنجار تبدیل می کند. اگر R یک چرخش دلخواه و (e_1, e_2, e_3) پایه های فضای $\mathcal{R}^2$ باشند، آن گاه شرط تعامد بهنجار به شکل زیر تعریف می گردد:

$$R^{\mathrm{T}}\mathrm{R} = \mathrm{I} \qquad (۱۲-۲)$$

که R^{T} ماتریس ترانهاده[۱۴] R است و I ماتریس یکانی[۱۵] 2×2 می باشد. ماتریس های اینچنینی را ماتریس های متعامد گویند و گروهی که شامل تمامی این ماتریس های 2×2 متعامد است را گروه $O(2)$ می نامند که پیش از راجع به آن صحبت نمودیم.

برای یک ماتریس متعامد داریم :

$$\begin{aligned} det\, R^T &= det\, R \\ (det\, R)^2 &= 1 \\ \det R &= \pm 1 \end{aligned} \qquad (۱۳-۲)$$

---

[13] Parity Transformation
[14] Transpose
[15] Unitary

بنابراین زیرگروهی که در آن $\det R = +1$ باشد، گروه متعامد ویژه در دو بعد یا $SO(2)$ گویند.

یکی از خواص مهم گروه ها این است که آن ها به طور یکتا توسط قوانین ضرب خودشان مشخص می گردند، یعنی هرگاه مجموعه ای از قانون ضرب گروه خاصی پیروی کند، بدان معناست که به شکل نمایش آن گروه درآمده است. به عنوان مثال می توانیم محاسبه کنیم که چگونه یک میدان تحت چرخش تبدیل می شود.

ابتدا عملگر L را به شکل زیر تعریف می نماییم:

$$L \equiv i\epsilon^{ij}x^i \frac{\partial}{x^j} = i(x^1\partial^2 - x^2\partial^1) \qquad (۲-۱٤)$$

و $U(\theta)$ به صورت تابع نمایی عملگر L تعریف می گردد:

$$U(\theta) \equiv e^{i\theta L} \qquad (۲-۱۵)$$

حال یک میدان اسکالر میدانی است که تحت $SO(2)$ به شکل زیر تبدیل می شود:

$$U(\theta)\phi(x)U^{-1}(\theta) = \phi(x') \qquad (۲-۱٦)$$

همچنین می توانیم یک میدان برداری تعریف کنیم که در آن i که نشان دهنده مختصه این میدان برداری است نیز تحت تبدیل می چرخد.

$$U(\theta)\phi^i(x)U^{-1}(\theta) = O^{ij}(-\theta)\phi^j(x') \qquad (۲-۱۷)$$