بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه سیستان و بلوچستان

تحصیلات تکمیلی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض گرایش هندسه

عنوان:

کلافهای مماس و معادلات دیفرانسیل معمولی از مرتبه اول و دوم

استاد (اساتید) راهنما:

دکتر غلامرضا رضایی

تحقیق و نگارش:

رسول ملک زاده

اردیبهشت ۱۳۸۷

بسمه تعالی

این پایان نامه با عنوان کلاسهای مماس و معادلات دیفرانسیل مختلط از مرتبه اول و دوم قسمتی از برنامه آموزشی دوره کارشناسی ارشد ریاضی محض توسط دانشجو رسول پاک زاده تحت راهنمایی استاد پایان نامه دکتر عبدالرضا جهانی تهیه شده است. استفاده از مطالب آن به منظور اهداف آموزشی با ذکر مرجع و اطلاع کتبی به حوزه تحصیلات تکمیلی دانشگاه سیستان و بلوچستان مجاز می باشد.

(نام و امضاء دانشجو)

این پایان نامه ۶... واحد درسی شناخته می شود و در تاریخ ۱۱/۲/۸۷.... توسط هیئت داوران بررسی و درجه ...عالی..... به آن تعلق گرفت.

نام و نام خانوادگی	امضاء	تاریخ
استاد راهنما: عبدالرضا جهانی		
استاد راهنما:		
استاد مشاور:		
داور ۱: اکبر ...		
داور ۲: اصغر ...		
نماینده تحصیلات تکمیلی:		

دانشگاه سیستان و بلوچستان

تعهدنامه اصالت اثر

اینجانب رسول ملک زاده تأیید می کنم که مطالب مندرج در این پایان نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و به دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این نوشته از آن استفاده شده است مطابق مقررات ارجاع گردیده است. این پایان نامه پیش از این برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نشده است.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به دانشگاه سیستان و بلوچستان می باشد.

نام و نام خانوادگی دانشجو:

امضاء رسول ملک زاده

تقدیم به:

مادر عزیز و فداکارم،

روح پاک پدرم،

استاد راهنمای دلسوزم،

و همهء عزیزانی که بی لطف آنها،

این آغاز را پایانی نبود.

سپاسگزاری

در آرامش حاکم بر کتابخانه ها و آزمایشگاههایتان بمانید، نخست از خود بپرسید من برای خودآموزی چه کرده ام؟ و همچنان که پیشتر می روید، بپرسید برای کشورم چه کرده ام؟ و این پرسش را آنقدر ادامه دهید تا سـهم کوچکی در پیشرفت و اعتلای بشریت داشته باشید.

"لویی پاستور"

اکنون که به توفیق و عنایت پروردگار رساله کارشناسی ارشد را فراهم آوردم بر خود می دانم از همـه اسـاتیدی که به نحوی حق تعلیم و تربیت بر گردن حقیر دارند تشکر نمایم، بلاخص از دکتر غلامرضا رضایی کـه نگـارش این مجموعه را مدیون راهنمایی ها و نظرات ارزشمند و دلسوزانه این استاد گرانقدر و فرزانه بـوده و هـستم و از دکتر اکبر گلچین که داور داخلی من در نگارش این مجموعه بوده اند کمال تشکر و امتنان را دارم و همچنـین از دکتر نصرا.. گرامی که زحمت مطالعه و داوری این پایانامه را تقبل نمودند سپاسگذارم و نیز از دکتـر لـشکری پور که با توجه به مشغله زیاد، به عنوان نماینده تحصیلات تکمیلی در جلسه دفاعیه حضور به هم رساندند.

چکیده:

در این پایان نامه، پس از توضیح ساختار کلاف های مماس مرتبه اول و دوم و فرم های التصاق در فصول ابتدایی، یک ساختار کلاف برداری برای کلاف های مماس مرتبه اول و دوم ارائه می دهیم. سپس به طبقه بندی کلاف های برداری مرتبه دوم پرداخته و رابطه بین معادلات دیفرانسیل مرتبه اول و التصاق های مزدوج و نیز روشی برای بیان معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم با استفاده از این ساختار کلاف برداری مرتبه دوم را بیان می کنیم. در نهایت با ارائه چند مثال این روش را شرح خواهیم داد. در ضمن این روش کاملاً کلی است.

کلمات کلیدی: معادلات دیفرانسیل - التصاق – کلاف برداری

مقدمه:

در طی چند ده اخیر تحقیقات وسیعی در خصوص معادلات دیفرانسیل روی منیفلدهای با بعد نامتناهی به عمل آمده است. این تحقیقات شامل مطالعات به روی میدانهای جت، التصاقها، و اغلب موارد اسپریها شده است.

در سال ۱۹۶۹ vasillio مقاله ای در زمینه التصاقها و معادلات دیفرانسیل منتشر نمود و بعد از آن، تحقیقات فراوانی در این زمینه به عمل آمد. حال ما روش دیگری برای بیان معادلات دیفرانسیل بر روی منیفلدهای با بعد نامتناهی ارائه می دهیم.

پایانامه حاضر شامل چهار فصل می باشد. فصل اول شامل برخی تعاریف و مفاهیم اولیه از جمله التصاق است که در فصل های بعدی مورد استفاده قرار می گیرند. در فصل دوم ما با کمک این التصاق به بحث در مورد ساختارهای کلاف برداری برای کلافهای مماس و طبقه بندی این ساختارهای کلاف برداری می پردازیم. در فصل سوم ما به یک التصاق خطی از یک کلاف برداری جزئی یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول نظیر می کنیم به طوری که بخش اصلی از برش سرتاسری افقی از این کلاف برداری، یک جواب برای معادله دیفرانسیل مذبور باشد. در فصل چهارم نیز با استفاده از ساختارهای کلاف برداری مرتبه دوم که توسط dadson و radivioci برای کلاف مماس مرتبه دوم ارئه شد یک دستگاه معادلات دیفراسیل مرتبه دوم برای میدان برداری مرتبه دوم از یک منیفلد هموار مطرح می کنیم. نتایج دیگری نیز در زمینه خم های خود متوازی در پایان فصل چهارم گنجانده شده است.

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل با معرفی فضای برداری فریچت و ساختار C^∞ منیفلد بر فضای باناخ $\mathbb{E}$، تعاریف مربوط به ساختار کلاف برداری و اطلس کلافی نظیر آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم. سپس کلاف‌های مماس TM و T^2M و التصاق خطی ∇، به عنوان یک ریخت کلاف برداری بر یک منیفلد هموار M، به همراه نمادهای کریستوفل مربوط را بیان می‌کنیم و در نهایت سیستم تصویری و حد تصویزی از فضاهای توپولوژیکی، منیفلدهای باناخ و نگاشت‌ها را شرح می‌دهیم.

۱ــ۱ تعاریف و مفاهیم اولیه

تعریف ۱.۱.۱: گروه جمعی و آبلی X را یک فضای برداری روی میدان F گوییم هرگاه برای هر $x, y \in X$ و $\alpha, \beta \in F$ داشته باشیم:

الف) $\alpha x \in X$؛

ب) $1 \cdot x = x$؛

پ) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$؛

ت) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$؛

ث) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.

که x و y بردار هستند.

تعریف ۲.۱.۱: فضای برداری X را یک فضای نرم‌دار خطی گوییم اگر به ازای هر $x \in X$ عدد حقیقی نامنفی $\|x\|$ متناظر شود به طوری که :

الف) برای هر $x, y \in X$، $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$؛

ب) برای هراسکالر α و هر $x \in X$، $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$؛

پ) اگر $\|x\| = 0$، آنگاه $x = 0$.

تعریف ۳.۱.۱: فضای نرم‌دار خطی که با متر القاٌ شده از نرم کامل باشد، یک فضای باناخ[1] گوییم.

---

[1] Banach Space

تبصره ۴.۱.۱: فضای متریک X را کامل گوییم، هرگاه هر دنباله کوشی در آن یک دنباله همگرا باشد.

تبصره ۵.۱.۱: یک فضای متریک‌پذیر X را محدب گوییم هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ و $\lambda \in (0, 1)$ داشته باشیم: $\lambda x + (1 - \lambda)y \in X$، حال X را موضعاً محدب گوییم اگر به ازای هر $x \in X$ و هر همسایگی G از x یک همسایگی محدب $G' \subset G$ از فضای X شامل x موجود باشد.

تعریف ۶.۱.۱: یک فضای توپولوژیکی هاسدورف موضعاً محدب، متریک‌پذیر و کامل را یک فضای فریچت [۲] می‌نامیم. به عنوان مثال فضاهای باناخ و حد تصویری آنها فضاهای فریچت می‌باشند.

تعریف ۷.۱.۱: فرض کنیم $f : X \longrightarrow Y$ یک ریخت باشد. یک برش از f یک ریخت $g : X \longrightarrow Y$ می‌باشد به طوری که:

$$f \circ g = id_X.$$

هم چنین یک یکریختی در رسته فضاهای توپولوژیکی، که ریخت‌های آن نگاشت‌های خطی و پیوسته‌اند یک همانریختی می‌گوییم. به عبارتی f یک همانریختی است اگر f و f^{-1} پیوسته و f دوسویی باشد.

تعریف ۸.۱.۱: فرض می‌کنیم X یک فضای توپولوژیکی هاسدورف باشد. یک اطلس از کلاس C^∞ بر X مجموعه‌ای از زوج‌های $\{(U_i, \varphi_i);\quad i \in I\}$ است که در شرایط زیر صدق کنند:

الف) هر U_i زیر مجموعه‌ای باز از X باشد به طوری که $\bigcup_{i \in I} U_i = X$؛

ب) هر $\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{E}_i$ یک همانریختی از U_i به توی زیر مجموعه باز $\varphi_i(U_i)$ در $\mathbb{E}_i$ بوده و برای هر $i, j \in I$، $\varphi_i(U_i \bigcap U_j)$ در $\mathbb{E}_i$ باز باشد؛

پ) برای هر $i, j \in I$، نگاشت $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \bigcap U_j) \longrightarrow \varphi_i(U_i \bigcap U_j)$ یک C^∞ همانریختی باشد.

هر زوج (U_i, φ_i) یک نقشه از این اطلس نامیده می‌شود، درضمن لازم نیست همه $\mathbb{E}_i$ها یکسان، یا به طور

[۲] Ferecht Space

خطی یکریخت باشند اما در حالتی که همه $\mathbb{E}_i$ ها مساوی با $\mathbb{E}$ باشند اطلس را یک $\mathbb{E}$—اطلس گوییم.

تعریف ۹.۱.۱: فرض کنیم U یک زیرمجموعه باز از X و $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{E}$ یک همانریختی بتوی یک زیرمجموعه باز $\varphi(U)$ از فضای باناخ $\mathbb{E}$ باشد. گوییم (U,φ) با اطلس $\{(U_i,\varphi_i);\ \ i \in I\}$ از X سازگار است، اگر برای هر $i \in I$ که $U_i \bigcap U = \emptyset$، $\varphi_i \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \varphi_i(U_i)$ یک C^∞ همانریختی باشد. حال دو اطلس را روی X، سازگار گوییم اگر هر نقشه از اطلس اولی با هر نقشه از اطلس دومی دو به دو سازگار باشند. به راحتی می‌توان نشان داد که رابطه سازگاری یک رابطه هم‌ارزی است.

تعریف ۱۰.۱.۱: یک گردایه از نقشه‌های $u = \{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in I}$، را یک ساختار C^∞ منیفلد گوییم هرگاه:

الف) $X = \bigcup_{i\in I} U_i$؛

ب) هر دو عضو از $\{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in I}$، C^∞ سازگار باشد؛

پ) هر نقشه (ψ, V) که با هر عضو از $\{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in I}$، C^∞ سازگار است، خود عضوی از u باشد.

تذکر ۱۱.۱.۱: با توجه به تعاریف بالا می‌توان گفت که هر کلاس از اطلس‌های C^∞، یک ساختار C^∞ منیفلد روی X تعریف می‌کند. هرگاه برای یک اطلس همه $\mathbb{E}_i$ یکسان باشند، یعنی برای هر $i \in I$، $\mathbb{E}_i = \mathbb{E}$ باشد در این صورت X را یک $\mathbb{E}$—منیفلد می‌نامیم و می‌نویسیم X روی $\mathbb{E}$ مدل شده است.

۱—۲ ساختار کلاف برداری

تعریف ۱۲.۲.۱: فرض کنیم M یک منیفلد از کلاس C^p $(p \geq 1)$ باشد و $\pi : \mathbb{E} \longrightarrow M$ نیز یک نگاشت پیوسته و پوشا از کلاس C^p $(p \geq 1)$ باشد. هم چنین فرض کنیم $\{U_i\}_{i\in I}$ یک پوشش از M باشد و برای هر $i \in I$ نگاشت $\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times \mathbb{E}_i$ در شرایط زیر صدق کند:

الف) هر نگاشت ϕ_i یک C^p—همانریختی باشد و در دیاگرام جابه‌جایی زیر صدق کند:

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_i) \arrow[r, "\phi_i"] \arrow[d, "\pi"'] & U_i \times \mathbb{E} \arrow[dl, "Pr_1"] \\ U_i & \end{tikzcd}$$

یعنی داشته باشیم:

$$Pr_1 \circ \phi_i = \pi.$$

به خصوص بر روی هر تار $\mathbb{E}_x = \pi^{-1}(x)$، یکریختی

$$\phi_i \mid_{\pi^{-1}(x)} = \phi_{ix} : \pi^{-1}(x) \longrightarrow \{x\} \times \mathbb{E} \cong \mathbb{E},$$

حاصل شود.

ب) برای هر جفت از مجموعه‌های باز U_i و U_j که $U_i \bigcap U_j \neq \varnothing$، و برای هر $x \in U_i \bigcap U_j$ نگاشت:

$$\phi_{ix} \circ \phi_{jx}^{-1} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E},$$

یکریختی خطی باشد.

پ) اگر U_i و U_j دو عضو از پوشش M باشند، آنگاه نگاشت:

$$\begin{aligned} \phi : U_i \bigcap U_j &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{E}) \\ x &\longmapsto (\phi_i \circ \phi_j^{-1})_x, \end{aligned}$$

یک ریخت باشد.

در این صورت $\mathbb{E}$ دارای یک ساختار منیفلد منحصر به فرد همرا با اطلس $\{(\pi^{-1}(U_i), \phi_i)\}_{i \in I}$ می‌باشد. ما سه‌تایی $(\mathbb{E}, M, \pi)$ را یک کلاف برداری و $\{(\pi^{-1}(U_i), \phi_i)\}_{i \in I}$ را یک بدیهی‌سازی یا اطلس کلافی می‌گوییم، هم چنین ϕ را یک نگاشت بدیهی‌سازی می‌نامیم.

تعریف ۱۳.۲.۱: فرض کنیم $(\mathbb{E}, M, \pi)$ یک کلاف برداری باناخ همراه با بدیهی‌سازی

$\{(\pi^{-1}(U_i), \phi_i)\}_{i\in I}$ باشد. برای هر $\alpha, \beta \in I$ که $U_\alpha \bigcap U_\beta \neq \emptyset$، تابع $T_{\alpha\beta}$ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$T_{\alpha\beta} = \psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} \mid_{(U_\alpha \bigcap U_\beta)\times \mathbb{E}}: (U_\alpha \bigcap U_\beta) \times \mathbb{E} \longrightarrow (U_\alpha \bigcap U_\beta) \times \mathbb{E}$$

$$(x, e) \longmapsto (x, T'_{\alpha\beta}(x)(e)).$$

تابع فوق را تابع انتقالی اطلس کلافی $(\mathbb{E}, M, \pi)$ گوییم، که $T'_{\alpha\beta} : U_\alpha \bigcap U_\beta \longrightarrow GL(\mathbb{E}, \mathbb{E})$، x را به $\phi_{\alpha,x} \circ \phi_{\beta,x}^{-1}$ می‌برد. در ضمن $GL(\mathbb{E}, \mathbb{E})$ گروه توابع خطی از $\mathbb{E}$ به $\mathbb{E}$ را بیان می‌کند.

تعریف ۱۴.۲.۱: فرض کنیم $\pi : \mathbb{E} \longrightarrow X$ و $\pi' : \mathbb{E}' \longrightarrow X'$ دو کلاف برداری باشند. یک ریخت کلاف برداری از $\pi \longrightarrow \pi'$ عبارتست از ریخت‌های پیوسته

$$f : X \longrightarrow X' \qquad \text{و} \qquad \mathcal{F} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}',$$

که در شرایط زیر صدق کنند:

الف) نمودار زیر جابه‌جایی باشد:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{E} \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{E}' \arrow[d, "\pi'"] \\ X \arrow[r, "f"'] & X' \end{tikzcd}$$

یعنی $\pi' \circ \mathcal{F} = f \circ \pi$.

ب) برای هر $x \in X$، $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}|_{\mathbb{E}_x} : \mathbb{E}_x \longrightarrow \mathbb{E}'_{\mathcal{F}(x)}$ یک نگاشت خطی باشد.

تعریف ۱۵.۲.۱: فرض کنیم M یک منیفلد از کلاس C^p و $(\mathbb{E}, M, \pi)$، $(\mathbb{E}', M', \pi')$ دو کلاف برداری روی M باشند. نگاشت $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}'$ را یک نگاشت C^r (یکریختی) کلاف برداری گوییم، هرگاه برای هر $e \in \mathbb{E}$ نقشه‌های کلافی $(\pi^{-1}(U), \phi)$ و $(\pi^{-1}(V), \psi)$ به ترتیب از e و $f(e)$ موجود باشند، که $f(\pi^{-1}(U)) \subseteq \pi^{-1}(V)$ و $\mathcal{F} = \psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(\pi^{-1}(U)) \longrightarrow \psi(\pi(V))$ یک نگاشت C^r (یکریختی) باشد.

تعریف ۱.۲.۱۶: فرض کنیم M یک منیفلد هموار مدل شده بر فضای باناخ $\mathbb{E}$ با اطلس نظیر $u = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha \in I$ باشد. برای هر $x \in M$، قرار می‌دهیم:

$$C_x = \{f : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M; f \text{هموار}, f(\circ) = x\},$$

و رابطه هم‌ارزی $\sim_x$ بین f و g از C_x را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f \sim_x g \Leftrightarrow f'(\circ) = g'(\circ).$$

حال قرار می‌دهیم:

$$T_xM = C_x / \sim_x = \{[g, x]_1; \ \ g \sim_x f, \ \ g, f \in C_x\},$$

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_xM.$$

در این صورت TM را کلاف مماس مرتبه اول می‌نامیم. در بسیاری از کتاب‌های هندسه منیفلد ثابت می‌شود که TM دارای یک ساختار منیفلد هموار مدل شده بر $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ است. به علاوه به آسانی می‌توان کلاف برداری بودن TM بر M، به همراه نگاشت تصویری $\pi_M : TM \longrightarrow M$ را با بدیهی‌سازی $\{(\pi_M^{-1}(U_\alpha), \Phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ مورد بررسی قرار داد. به طور مشابه کلاف مماس $T(TM)$، با بدیهی‌سازی $\{(\pi_{TM}^{-1}(\pi_M^{-1}(U_\alpha)), \tilde{\Psi}_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ را در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱.۲.۱۷: یک التصاق بر منیفلد M، یک ریخت کلاف برداری است که:

$$\nabla : T(TM) \longrightarrow TM,$$

با فرم های موضعی $\omega_\alpha : \psi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{E})$.

حال با توجه به نمودار زیر:

$$\begin{tikzcd} TTM \arrow[r, "\nabla"] \arrow[d, "\tilde{\Psi}_\alpha"'] & TM \arrow[d, "\Psi_\alpha"] \\ \psi_\alpha(U_\alpha)\times\mathbb{E}\times\mathbb{E}\times\mathbb{E} \arrow[r, "\nabla_\alpha"'] & \psi_\alpha(U_\alpha)\times\mathbb{E} \end{tikzcd}$$

نمایش موضعی ∇ به صورت زیر است:

$$\nabla_\alpha = \Psi_\alpha \circ \nabla \circ \tilde{\Psi}_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(U_\alpha)\times\mathbb{E}\times\mathbb{E}\times\mathbb{E} \longrightarrow \psi_\alpha(U_\alpha)\times\mathbb{E}$$

$$\nabla_\alpha(y,u,v,w) \longmapsto (y, w+\omega_\alpha(y,u).v); \qquad \alpha\in I.$$

∇ را یک التصاق خطی می‌گوییم، هرگاه $\{\omega_\alpha\}_\alpha \in I$ نسبت به متغیر دوم خطی باشد. حال التصاق ∇ را به طور کامل به وسیله نمادهای کریستوفل $\{\Gamma_\alpha\}_{\alpha\in I}$ مشخص می‌کنیم، که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\Gamma_\alpha : \psi_\alpha(U_\alpha) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{E},\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{E})); \qquad \alpha\in I,$$

به طوری که برای هر $(y,u)\in\psi_\alpha(U_\alpha)\times\mathbb{E}$ داریم:

$$\Gamma_\alpha(y)[u] = \omega_\alpha(y,u),$$

بنابراین رابطه$(۱-۱)$ به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$\nabla_\alpha(y,u,v,w) = (y, w+\Gamma_\alpha(y)[u].v).$$

تبصره: شرط لازم برای خوشتعریفی یک التصاق خطی روی ناحیه مشترک نقشه‌ها از منیفلد M این است، که نمادهای کریستوفل آن در شرط سازگاری:

$$\Gamma_\alpha(\delta_{\alpha\beta}(y))(d\delta_{\alpha\beta}(y)(u))[d\delta_\alpha\beta(y)(v)] + (d^2\delta_{\alpha\beta}(y)(v))(u) = d\delta_{\alpha\beta}(y)((\Gamma_\beta(y)(u))(v)), \qquad (۲-۱)$$

برای هر $(y,u,v)\in\psi_\alpha(U_\alpha)\times\mathbb{E}\times\mathbb{E}$ ،$\delta_{\alpha\beta}=\psi_\alpha\circ\psi_\beta^{-1}$ صدق کنند. ما در فصل ۴ از طریق بررسی رابطه g—مزدوج بودن التصاق‌ها رابطه اخیر را ثابت می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۱۸: با در نظر گرفتن $C_x = \{f:(-\epsilon,\epsilon)\longrightarrow M; f$ هموار $, f(0)=x\}$، رابطه

هم ارزی $\approx_x$ را برای هر $f, g \in C_x$، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f \approx_x g \Leftrightarrow f'(\circ) = g'(\circ), \qquad f''(\circ) = g''(\circ).$$

حال قرار می‌دهیم:

$$T_x^{۲} M = C_x / \approx_x = \{[g, x]_{۲} ; g \approx_x f, g, f \in C_x\},$$

$$T^{۲} M = \cup_{x \in M} T_x^{۲} M.$$

در این صورت $T^{۲}M$ را کلاف مماس مرتبه دوم می‌گوییم. چون $T_x^{۲}M$ یک فضای برداری توپولوژیکی یکریخت با $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ تحت یکریختی:

$$\Phi_x : T_x^{۲} M \longrightarrow \mathbb{E} \times \mathbb{E}$$

$$[f, x]_{۲} \longmapsto \Big((\psi_\alpha \circ f)'(\circ), (\psi_\alpha \circ f)''(\circ)\Big)$$

است، $T^{۲}M$ را یک کلاف برداری بر M با تارهایی از جنس $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ می‌نامیم. در فصل ۲ ثابت می‌کنیم که $T^{۲}M$ دارای یک ساختار کلاف برداری باناخ با اطلس کلافی $\{(\pi^{-۱}(U_\alpha), \Phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ است که:

$$\Phi_\alpha : \pi_{۲}^{-۱}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{E} \times \mathbb{E}$$

$$[f, x]_{۲} \longmapsto \Big(\psi_\alpha(x), (\psi_\alpha \circ f)'(\circ), (\psi_\alpha \circ f)''(\circ) + \Gamma_\alpha(\psi_\alpha(x))[(\psi_\alpha \circ f)'(\circ), (\psi_\alpha \circ f)'(\circ)]\Big),$$

و

$$\pi_{۲} : T^{۲} M \longrightarrow M$$

$$[f, x]_{۲} \longmapsto x.$$

۱—۳ سیستم‌های تصویری

تعریف ۱۹.۳.۱: فرض کنیم I یک مجموعه جهت‌دار باشد یعنی برای هر $i, j \in I$، که $i \leq j$، یک $k \in I$ موجود باشد که $j \leq k, i \leq k$. فرض کنیم برای هر $i \in I$، A_i یک شی در رسته مجموعه‌ها است به طوری که

برای هر $i, j \in I$، که $i \leq j$ ریخت

$$h(i,j) : A_i \longrightarrow A_j,$$

با ویژگی‌های زیر موجود باشد:

الف) $h(i,i) = id_{A_i}$;

ب) اگر $i \leq j \leq k$، آنگاه:

$$h(i,k) = h(j,k) \circ h(i,j).$$

در این صورت $\{A_i, h(j,i), I\}$ را یک خانواده تصویری از مجموعه‌ها می‌گوییم.

تعریف ۲۰.۳.۱: $lim_{\leftarrow} A_i = A$ را حد تصویری خانواده تصویری $\{A_i\}_{i\in I}$ گوییم هرگاه:

الف) برای هر $i \in I$، نگاشت $P_i : A \longrightarrow A_i$ وجود داشته باشد بقسمی که اگر $i \leq j$، آنگاه:

$$\varphi_\alpha \circ P_j = P_i,$$

یعنی نمودار زیر جابه‌جایی باشد:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "P_j"] \arrow[d, "P_i"'] & A_j \arrow[dl, "\varphi_\alpha"] \\ A_i & \end{tikzcd}$$

ب) اگر B نیز یک مجموعه همراه با ریخت های $f_i : B \longrightarrow A_i$ باشد به طوری که برای $i \leq j$، $h(j,i) \circ f_j = f_i$، آنگاه یک ریخت یکتای $f : B \longrightarrow A$ موجود باشد به طوری که $P_i \circ f = f_i$.

تعریف ۲۱.۳.۱: یک خانواده تصویری از فضاهای توپولوژیک یک خانواده $\{X_j, \pi_{ji}, J\}$ است که I یک مجموعه جهت‌دار و برای هر $j \in J$، X_j یک فضای توپولوژیک باشد. هم چنین برای هر $i, j \in J$ که $i \leq j$، $\pi_{ji} : X_j \longrightarrow X_i$ نگاشت‌های پیوسته باشند به طوری که:

$$\pi_{jk} \circ \pi_{ij} = \pi_{ik}, \qquad \pi_{ii} = id_{X_i}.$$

تعریف ۲۲.۳.۱: فرض $\{X_j, \pi_{ji}, J\}$ و $\{X'_j, \pi'_{ji}, J\}$ دو خانواده تصویری از فضاهای توپولوژیک به ترتیب با حدهای تصویری X, X' باشند. خانواده $\{\phi_j : X_j \longrightarrow X'_j\}_{j\in J}$ از نگاشت‌های پیوسته را که در شرط:

$$\pi'_{ji} \circ \phi_j = \phi_i \circ \pi_{ji}, \qquad i \leq j$$