بسم الله الرحمن الرحیم

۱۲۲۱۳.

دانشگاه پیام نور

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
دررشته ریاضی محض

دانشکده علوم

گروه علمی ریاضی

عنوان پایان نامه:

فشردگی همریختی های روی جبرهای URM

استاد راهنما:
دکتر بهمن یوسفی

نگارش:
زهرا ایزدی

بهمن ۱۳۸۵

دانشگاه پیام نور

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
دررشته ریاضی محض

دانشکده علوم

گروه علمی ریاضی

عنوان پایان نامه:

فشردگی همریختی های روی جبرهای URM

استاد راهنما:

دکتر بهمن یوسفی

نگارش:

زهرا ایزدی

بهمن ۱۳۸۵

۱۳۸۹ / ۷ / ۲۶

دانشگاه پیام نور

بسمه تعالی

تصویب پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان : فشردگی همریختی های روی جبرهای URM

که توسط زهرا ایزدی در مرکز شیراز تهیه و به هیأت داوران ارائه گردیده است مورد تأیید می باشـد.

تاریخ دفاع: ۱۳۸۵/۱۱/۲۱ نمره: ۱۹ درجه ارزشیابی : عالی

اعضای هیأت داوران:

نام و نام خانوادگی	هیأت داوران	مرتبه علمی	امضاء
۱– دکتر بهمن یوسفی	استاد راهنما	استاد	
۲– دکتر احمد خاکساری	استاد داور	استاد یار	
۳– دکتر نرگس عباسی	نماینده تحصیلات تکمیلی	دانشیار	

۱۳۸۹/۷/۲۶

تقدیم به :

مادر عزیزم

تقدیر و تشکر:

بی شک، هیچ تحقیقی، بدون لطف و کرم ذات الهی که محبت خود را همچون آفتابی بر سر انسان ها گسترانده، ممکن نمی باشد.م او را سپاس و بازهم سپاس که توفیق آموختن برمن عطا کرد. از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر یوسفی، استاد راهنمای این تحقیق، که تا انتهای راه مرا همواره رهنمون بوده ند کمال تشکررا دارم. همراهی و راهنمایی های ایشان قابل تقدیر است.

همچنین همگامی و همراهی دوستان عزیزم بخصوص خانم قربانی فراموشم نخواهد شد.

ازحامیان همیشگی ام، خانواده ام، پدرو ماردم، که بودنم را درکنارشان آغاز کرده ام و همسر مهربانم تشکر ویژه دارم.

چکیده

دراین پایان نامه نشان داده می شود هر همریختی از یک جبر URM به توی یک جبر یکنواخت یا به توی یک جبر باناخ منظم، موضعاً فشرده است. همچنین ثابت می کنیم هر همریختی از جبر URM به توی $D^1(X)$ فشرده می باشد. درنهایت طیف درونریختی های فشرده ناصفر جبرهای URM را که روی فضای هاسدورف فشرده همبند X تعریف می شود تعیین خواهیم کرد.

فهرست

عنوان | صفحه

مقدمه

دراین پایان نامه همریختی های فشرده روی جبرهای URM موردبررسی قرارگرفته است .

درفصل اول راجع به مقدمات موردنیازدرفصل های آتی صحبت خواهیم کرد. دراین فصل ابتداتعاریف وقضایای مقدماتی ، توپولوژی ضعیف -* روی فضای دوگان معرفی شده ، سپس انعکاس پذیری ونقاط فرین موردمطالعه قرارگرفته اند.

درفصل دوم جبرهای باناخ و توابع هولومورفیک وویژگی های تحلیلی طیف معرفی شده وجبرهای باناخ آبلی بررسی شده است.

فصل سوم شامل معرفی جبرتابع باناخ وانواع آن بوده ودربخش دوم همریختی های فشرده روی جبرهای باناخ ویژه ای به نام URM مطالعه شده است و ثابت خواهیم کردهرهمریختی به طورضعیف فشرده ازیک جبرURM به توی یک جبرباناخ منظم ، فشرده است . همچنین دربخش سوم طیف درونریختی های فشرده ی ناصفرجبرهای URM راتعیین خواهیم کرد.

فصل ۱

تعاریف ومفاهیم مقدماتی

۱—۱ تعاریف مقدماتی

دراین بخش به معرفی تعاریف وقضایای مقدماتی موردلزوم درفصل بعدمی پردازیم .

تعریف ۱.۱.۱.

اگر X یک فضای نرم داریاشد،$ballX$ راگوی یکه ی بسته درX درنظرمی گیریم. بنابراین $ballX = \{x \in X : \|x\| \leqslant ۱\}$.

تعریف ۲.۱.۱.

اگرK زیرمجموعه ای محدب ازفضای برداری X باشد، نقطه ی a ازK رانقطه ی فرین K می نامیم اگرهیچ پاره خط بازسره ای شامل a که تماماً درK قرارگیردموجودنباشد.

تعریف ۳.۱.۱.

یک جبرروی میدان K حلقه ای است که روی K یک فضای برداری بوده وبرای همه ی α های متعلق به K وf وg درA رابطه ی $\alpha(fg) = (\alpha f)g = f(\alpha g)$ صدق کند.همچنین جبرA جابجایی است اگربرای هرf وg درA، $fg = gf$ ونیزاگر $1\in A$ موجودبا شد به طوری که برای هرf متعلق به A ، $1f = f1=f$ آنگاه A یکانی باعنصریکه ی 1 نامیده می شود.

تعریف ۴.۱.۱.

اگرA وB جبرهایی روی K باشند،یک همریختی ازA به B ، نگاشت خطی $T : A \longrightarrow B$ است به

طوری که برای همه ی f و g در A ، $T(fg)=Tf.Tg$.

تعریف ۵.۱.۱.

یک درونریختی ازجبر A عبارت است ازیک همریختی از A بتوی خودش .

تعریف ۶.۱.۱.

یک ایده آل درجبر A ، زیرفضای خطی I از A است که دوطرفه باشد.

تعریف ۷.۱.۱.

ایده آل I ، مدولی یامنظم نامیده می شودهرگاه عنصر $u\in A$ موجودباشدبه طوری که برای هر x در A ، عناصر $x-ux$ و $x-xu$ متعلق به I باشند.

تعریف ۸.۱.۱.

ایده آل I در A راایده آل ماکسیمال گویندااگروتنهااگر I یک ایده آل سره باشدوایده آل سره ی دیگری شامل I موجودنباشد.

نکته ۹.۱.۱.

فضای $C_\circ(X)$ مجموعه ی توابع پیوسته روی X است که دربی نهایت صفرمی شود. اگر X فشرده باشدآنگاه $C_\circ(X)\equiv C(X)$.

قضیه ۱۰.۱.۱. (نمایش ریس)

اگر X فضای به طورموضعی فشرده و μ عضو $M(X)$ باشد، نگاشت $F_\mu : C_\circ(X)\longrightarrow F$ راباضابطه ی $F_\mu(f)=\int fd\mu$ تعریف می کنیم. دراین صورت F_μ متعلق به $C_\circ(X)^*$ است ونگاشت $\mu\longmapsto F_\mu$ یک یکریختی طو لپای (ایزومتری)از $M(X)$ بروی $C_\circ(X)^*$ می باشد.

نکته ۱۱.۱.۱.

درقضیه ی بالا، $M(X)$ فضای همه ی اندازه های بورل منتظم Fـ مقدارروی X باتغییرات کلی نرم است.

قضیه ۱.۱.۱۲.

اگر X یک فضای برداری توپولوژیکی و $f : X \longrightarrow F$ تابعک خطی باشدآنگاه عبارات زیرهم ارزند.

۱) f پیوسته است.

۲) f درصفرپیوسته است.

۳) f درتعدادی نقاط پیوسته است.

۴)هسته ی f $(kerf)$ بسته است.

۵)نگاشت $x \longmapsto |f(x)|$ یک شبه نرم پیوسته است.

قضیه ۱.۱.۱۳.

فرض کنید X به طورموضعی فشرده، و $\{f_n\}$ دنباله ای در $C_\circ(X)$ باشد، آنگاه برای هر μ در $M(X)$ ، $\int f_n d\mu \longrightarrow \int f d\mu$ اگروفقط اگر $\sup \|f_n\| < \infty$ وبرای هر x در X داشته باشیم $f_n(x) \longrightarrow f(x)$.

قضیه ۱.۱.۱۴. (ارزلااسکولی)

فرض کنید X یک فضای متریک فشرده باشد،آنگاه خانواده ی $\mathcal{F} \subseteq C(X)$ به طورنسبی فشرده است اگروفقط اگر

۱) $\mathcal{F}$ هم پیوسته باشد.

۲)برای همه ی xهای متعلق به X ، $\sup_{f\in\mathcal{F}} |f(x)| < \infty$.

یادآوری:درقضیه ی قبل $\mathcal{F}$ در $C(X)$ (که درآن (X,d) یک فضای متریک فشرده است)راهم پیوسته گوییم هرگاه به ازای هر $\epsilon > \circ$ وجودداشته باشد $\delta > \circ$ به طوری که به ازای هر x و y در X وهر f در $\mathcal{F}$ اگر $d(x,y) < \delta$ آنگاه $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

قضیه ۱.۱.۱۵. (نگاشت باز)

فرض کنید G یک دامنه (مجموعه ی بازوهمبند)در $\mathbb{C}$ و f تابعی تحلیلی وغیرثابت روی G

باشند.دراین صورت برای هرمجموعه ی بازU در G ، $f(G)$ بازاست.

قضیه ۱.۱.۱۶. (مانتل)

اگرG مجموعه ی بازی از$\mathbb{C}$ و$\{f_n\}$ دنباله ای کرانداردر$H(G)$ باشد، آنگاه $\{f_n\}$ دارای زیردنباله ی $\{f_{n_k}\}$ همگرابه تابع f در$H(G)$ است.

تعریف ۱.۱.۱۷.

اگرX وY فضاهای باناخ و$T : X \longrightarrow Y$ عملگرخطی باشد، آنگاه T فشرده نامیده می شوددرصورتی که $\overline{T(ball(X))}$ درY فشرده باشد.به طورمعادل ، $T : X \longrightarrow Y$ عملگری فشرده است اگربرای هردنباله ی کراندار$\{x_n\}$ درX،$\{Tx_n\}$ دارای زیردنباله ای همگرادرY باشد.

قضیه ۱.۱.۱۸.

فرض کنید f تابعک خطی درX وهمچنین $f_1, \ldots, f_n$ نیزتابعکهای خطی درX باشند. اگر$\bigcap_{k=1}^{n} kerf_k \subseteq kerf$ آنگاه اسکالرهای $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ موجودندبه طوری که $f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k$.یعنی برای هر$x$ در X داریم: $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k(x)$.

قضیه ۱.۱.۱۹.

فرض کنیدX فضای به طورموضعی محدب مختلط باشدوA وB دوزیرمجموعه ی محدب بسته ی X باشند. اگرB فشرده باشدآنگاه یک تابعک خطی پیوسته $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ وα ای درR و$\varepsilon > 0$ موجودندبه طوری که برای هرa متعلق به A وb متعلق به B داریم :

$$Re(f(a)) \leqslant \alpha \leqslant \alpha + \varepsilon \leqslant Re(f(b))$$

قضیه ۱.۱.۲۰.

فرض کنیدX یک فضای برداری توپولوژیکی وA زیرمجموعه ی محدب X باشد، دراین صورت:

۱)clA محدب است.

۲)اگر$a \in intA$ و$b \in clB$ آنگاه $[a, b) = \{tb + (1-t)a : 0 \leqslant t < 1\} \subseteq intA$.

قضیه ۱.۱.۲۱.

$\mathcal{L}(X)$ عبارت است ازمجموعه ی تمام نگاشت های خطی ازX به توی X .

قضیه ۱.۱.۲۲.(S.Banach-H.Steinhaus)

فرض کنیدX وY درفضای باناخ باشندو$(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ خانواده ای ازتوابع خطی کراندارازX به Y باشند. اگربه ازای هرx درX داشته باشیم $\sup_{\alpha\in A}\|T_\alpha x\| < +\infty$ آنگاه خواهیم داشت:$\sup_{\alpha\in A}\|T_\alpha\| < +\infty$.

قضیه ۱.۱.۲۳.

اگرX فضایی نرمدار وa متعلق به X باشد ، تابعک خطی F روی X موجوداست که $F(a) = \|a\|$ وبه ازای هرx درX ، $|F(x)| \leq \|x\|$.

قضیه ۱.۱.۲۴.(Runge)

فرض کنیدK زیرمجموعه ای فشرده از$\mathbb{C}$ باشدو$E \subseteq \mathbb{C}_\infty - K$ چنانکه هرمولفه ی همبند$C_\infty - K$ راقطع کند. اگرf روی مجموعه ی بازΩ شامل K تحلیلی و$\epsilon > 0$ باشد، آنگاه تابع گویای $R(z)$ باقطبهای درون E موجوداست که به ازای هر z درK ، $|f(z) - R(z)| < \epsilon$.

قضیه ۱.۱.۲۵.(E.F.Beckenbach-S.Saks)

فرض کنیدنگاشت ϕ روی مجموعه ی بازD بازباشد. دراین صورت $\log\phi$ روی D زیرهارمونیک است اگروتنهااگربه ازای هرچندجمله ای p نگاشت $z \to |e^{p(z)}|\phi(z)$ روی D زیرهارمونیک باشد.

قضیه ۱.۱.۲۶.(Maximum Principle for Subharmonic Function)

اگرϕ تابعی زیرهارمونیک روی حوزه ی D باشد و a درD چنان موجودباشدکه به ازای هرz درD ، $\phi(z) \leq \phi(a)$ ، آنگاه به ازای هر z درD ، $\phi(z) = \phi(a)$.

قضیه ۱.۱.۲۷.(F.Riesz)

هرفضای برداری نرمدار،گویی فشرده بابعدمتناهی راشامل می شود.

۱–۲ فضای دوگان

در این بخش به معرفی نمادها و مفهوم توپولوژی ضعیف و توپولوژی ضعیف-* روی فضای به طور موضعی محدب و دوگان آن می‌پردازیم.

فرض کنید X فضای به طور موضعی محدب باشد فضای همه ی توابع خطی پیوسته روی X را با X^* نمایش می‌دهیم.

$\langle x, x^* \rangle$ را با $x^*(x)$ نشان می‌دهیم بنابراین $x^*(x) = \langle x, x^* \rangle = \langle x^*, x \rangle$.

توپولوژی ضعیف-* روی X^* را با "wk^*" یا $\sigma(X^*, X)$ نمایش می‌دهیم که توپولوژی تعریف شده به وسیله ی شبه نرم‌های $\{p_x : x \in X\}$ است ($p_x(x^*) = |\langle x, x^* \rangle|$).

یک زیرمجموعه ی U از X به طور ضعیف باز است اگر و فقط اگر برای هر $x_\circ$ در U یک $\varepsilon > \circ$ و $x_1^*, ..., x_n^*$ در X^* موجود باشد به طوری که

$$\bigcap_{k=1}^{n} \{x \in X : |\langle x - x_\circ, x_k^* \rangle| < \varepsilon\} \subseteq U.$$

یک تور (شبکه) در X به طور ضعیف به $x_\circ$ همگراست اگر و فقط اگر برای هر x^* در X^* داشته باشیم $\langle x_i, x^* \rangle \longrightarrow \langle x_\circ, x^* \rangle$.

یک تور $\{x_i^*\}$ در X^* به طور ضعیف-* به $x_\circ^*$ همگراست اگر و فقط اگر برای هر x در X $\langle x_i^*, x \rangle \longrightarrow \langle x_\circ^*, x \rangle$.

توجه کنید که هر دو (X, wk) و (X^*, wk^*) فضاهای به طور موضعی محدب هستند. زیرا اگر $A = \bigcap_{p_{x^*} \in \mathcal{P}} \{x : p_{x^*} = \circ\}$، آنگاه می‌توان دید که $A = (\circ)$. برای این منظور فرض کنید $y \in A$ در این صورت برای هر x^* در X^*، $p_{x^*}(y) = \circ$ و در نتیجه $y = \circ$ می‌باشد.به طور مشابه برای (x^*, wk^*) هم برقرار است .

اگر $\{x_i\}$ یک شبکه در X باشد و $x_i \longrightarrow \circ$ در X، آنگاه برای هر x^* در X^* داریم $\langle x_i, x^* \rangle \longrightarrow \langle \circ, x^* \rangle$. بنابراین اگر τ توپولوژی روی X باشد، آنگاه $wk \subset \tau$ و هر x^* در X^* به

طور ضعیف پیوسته است.

قضیه ۱.۲.۱.

اگر X یک فضای به طور موضعی محدب باشد، آنگاه $(X, wk)^* = X^*$.

برهان:

اگر $x_i \xrightarrow{wk} x_\circ$ آنگاه برای هر x^* در X^* داریم $\langle x_i, x^* \rangle \longrightarrow \langle x_\circ, x^* \rangle$.

اگر $f \in X^*$، آنگاه $f(x_i) \longrightarrow f(x_\circ)$ بنابراین f روی توپولوژی ضعیف پیوسته است. یعنی $f \in (X, wk)^*$ بنابراین $X^* \subseteq (X, wk)^*$.

برعکس، اگر $f \in (X, wk)^*$ و $V \subseteq F$ باز باشد، آنگاه $f^{-1}(V)$ به طور ضعیف باز است و چون $wk \subseteq \tau$ پس $f^{-1}(v)$ در τ باز است. بنابراین f پیوسته بوده و در نتیجه $(X, wk)^* \subseteq X^*$.

□

قضیه ۲.۲.۱.

اگر X فضای به طور موضعی محدب باشد، آنگاه $(X^*, wk^*)^* = X$.

برهان:

اگر $x \in X$، آنگاه $x : X^* \longrightarrow F$ با ضابطه $x(x^*) = \langle x, x^* \rangle$ یک تابعک wk^*-پیوسته روی X^* است. زیرا اگر $x_i^* \xrightarrow{wk^*} x_\circ^*$، آنگاه برای هر x در X $\langle x, x_i^* \rangle \longrightarrow \langle x, x_\circ^* \rangle$ بنابراین $x \in (X^*, wk^*)^*$.

برعکس، اگر $f \in (X^*, wk^*)^*$ بنابر قضیه ۲.۱.۱ بردارهای x_1 و $\cdots$ و x_n در X موجود هستند به طوری که برای هر $x^* \in X^*$، $|f(x^*)| \leq \sum_{k=1}^{n} |\langle x_k, x^* \rangle|$. این نتیجه می‌دهد که $\bigcap \{\ker x_k : 1 \leq k \leq n\} \subseteq \ker f$. حال بنابر قضیه ۱۸.۱.۱ اسکالرهای α_1 و $\cdots$ و α_n موجودند به طوری که $f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$ در این صورت $f \in X$ و در نتیجه $(X^*, wk^*)^* \subseteq X$. بنابراین X دوگانی از یک فضای به طور موضعی محدب (X^*, wk^*) است و از این رو دارای یک توپولوژی

ضعیف ـ*ـ $\sigma((X, wk^*), X^*)$ ـ می‌باشد. $\square$

قضیه ۳.۲.۱.

اگر X یک فضای به طور موضعی محدب و A یک زیرمجموعه محدب از X باشد، آنگاه $clA = wk - clA$.

برهان:

اگر τ توپولوژی اولیه از X باشد، آنگاه $wk \subset \tau$ و از این رو $clA \subseteq wk - clA$.

برعکس، اگر $x \in X \backslash clA$، آنگاه بنابر قضیه ۱۹.۱.۱ یک x^* در X^* و یک α در clA و $\varepsilon > 0$ موجودند به طوری که برای همهٔ aها در clA داریم، $Re\langle a, x^* \rangle \leq \alpha < \alpha + \varepsilon \leq Re\langle x, x^* \rangle$ از این رو $clA \subseteq B \equiv \{y \in X : Re\langle y, x^* \rangle \leq \alpha\}$ اما B به وضوح به طور ضعیف بسته است بنابراین Rex^* پیوسته بوده و چون $B = (Rex^*)^{-1}(-\infty, \alpha]$ در نتیجه B به طور ضعیف بسته و $A \subseteq clA \subseteq B$ است. در نتیجه $wk - clA \subseteq wk - clB = B$ و چون $x \notin B$ نتیجه می‌دهد $x \notin wk - clA$ یعنی $wk - clA \subseteq clA$، پس $clA = wk - clA$. $\square$

نکته ۴.۲.۱.

یک زیرمجموعه محدب از X بسته است اگر و فقط اگر به طور ضعیف بسته باشد.

تعریف ۵.۲.۱.

$A \subseteq X$ را در نظر بگیرید. قطب A که با A° نشان داده می‌شود. زیرمجموعه‌ای از X^* است که به وسیله ی $\{x^* \in X : |\langle a, x^* \rangle| \leq 1$ ، $a \in A$ برای همه ی $\}$ تعریف می‌شود. در صورتی که $B \subseteq X^*$، پیش قطب B که با ${}^\circ B$ نشان داده می‌شود. زیرمجموعه‌ای از X است که به وسیله ی $\{$ برای همه ی $b^* \in B$ ، $|\langle x, b^* \rangle| \leq 1$: ${}^\circ B \equiv \{x \in X$ تعریف می‌شود.

اگر $A \subseteq X$ مجموعه ی ${}^\circ(A^\circ)$ را دو قطب A می‌نامند که معمولاً به وسیله ی ${}^\circ A^\circ$ نمایش داده می‌شود.

قضیه ۱.۲.۶.

اگر $A \subseteq X$ آنگاه:

۱) A° محدب و متعادل است.

۲) اگر $A_1 \subseteq A$، آنگاه $A^\circ \subseteq A_1^\circ$.

۳) اگر $\alpha \in F$ و $\alpha \neq 0$ $(\alpha A)^\circ = \alpha^{-1} A^\circ$.

۴) $A \subseteq {}^\circ A^\circ$.

۵) $A^\circ = ({}^\circ A^\circ)^\circ$.

حال اگر $A \subseteq X^*$ آنگاه

۱) ${}^\circ A$ محدب و متعادل است.

۲) اگر $A_1 \subseteq A$ آنگاه ${}^\circ A \subseteq {}^\circ A_1$.

۳) اگر $\alpha \in F$ و $\alpha \neq 0$ آنگاه ${}^\circ(\alpha A) = \alpha^{-1}\, {}^\circ A$.

۴) $A \subseteq ({}^\circ A)^\circ$

۵) $A^\circ = {}^\circ(({}^\circ A)^\circ)$.

اگر A یک منیفلد خطی در X باشد و $x^* \in A^\circ$، آنگاه برای هر $t > 0$ و a در A، $ta \in A$. بنابراین اگر $A \equiv \{x^* \in X^* : \langle a, x^*\rangle = 0$ ،$a \in A$ برای هر $\}$ آنگاه $A^\circ = A^\perp$. زیرا اگر $x^* \in A^\circ$، آنگاه $t|\langle a, x^*\rangle| = |\langle ta, x^*\rangle| \leq 1$. حال اگر $t \longrightarrow \infty$، آنگاه $\langle a, x^*\rangle \longrightarrow 0$ و درنتیجه $x^* \in A^\perp$. همچنین اگر $x^* \in A^\perp$، آنگاه برای هر a در A داریم $\langle a, x^*\rangle = 0$ و درنتیجه $|\langle a, x^*\rangle| = 0 < 1$ پس $x^* \in A^\circ$. به طور مشابه اگر B یک منفیلد خطی در X^* باشد و $B^\perp \equiv \{x \in X : \langle x, b^*\rangle = 0$ برای همهٔ $b^* \in B$ $\}$، آنگاه ${}^\circ B = {}^\perp B$.

قضیه ۱.۲.۷.

اگر X یک فضای محدب موضعی و $A \subseteq X$، باشد آنگاه ${}^\circ A^\circ$ یک غلاف متعادل محدب بسته از

A است.

نکته ۱.۲.۸.

فرض کنید X یک فضای باناخ و y یک فضای نرم‌دار باشد و $\mathcal{A} \subseteq B(X,Y)$. اگر برای هر x در X مجموعه ی $\{Ax : A \in \mathcal{A}\}$ در Y به طور ضعیف کراندار باشد، آنگاه $\mathcal{A}$ در $B(X,Y)$ با نرم عملگرها کراندار است.