بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه کاشان
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
در رشته ریاضی کاربردی(گرایش آنالیزعددی)

عنوان:

روش جداسازی عملگرها برای حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی سهموی

استاد راهنما:
دکتر اکبر محبی

استاد مشاور:
دکتر حمیدرضا تبریزی‌دوز

توسط:
سمیه حیدری

بهمن ۱۳۹۳

تقدیم با بوسه بر دستان پدرم:

به او که نمی دانم از بزرگی اش بگویم یا مردانگی، سخاوت، سکوت، مهربانی و .....

پدرم راه تمام زندگیست

پدرم دلخوشی همیشگیست

تقدیم به مادر عزیزتر از جانم:

مادرم هستی من ز هستی توست تا هستم و هستی دارمت دوست.

غمگسار جاودانی مادر است.

چشم سار مهربانی مادر است.

سپاس

حمد و ستایش خدایی را که اول است و پیش از او اولی نبود و آخر است بی آن که بعد از او آخری باشد . خدایی که دیده های بینندگان از دیدنش قاصر و اندیشه های وصف کنندگان از وصفش عاجز و ناتوان است. و سپاس ویژه‌ی من بر

استاد فرهیخته و بزرگوار جناب آقای دکتر اکبر محبی

که راهنمایی مرا در تهیه و نگارش این تحقیق به‌عهده داشتند و با دقت علمی فراوان، مرا در این زمینه یاری نمودند و در طول دوران تحصیل با نکته‌های زیبا و پندهای ارزشمندشان، صحیفه‌های سخن را علم‌پرور نموده، راهنما و راه‌گشای بنده بوده‌اند.

هم‌چنین، از تلاش‌های جناب آقای دکتر حمیدرضا تبریزی‌دوز به‌عنوان استاد مشاور، جناب آقای دکتر عباس سعادتمندی به‌عنوان استاد داور داخل دانشگاه و نماینده تحصیلات تکمیلی و هم‌چنین سرکار خانم دکتر فاطمه ذبیحی به‌عنوان استاد داور داخل دانشگاه که این تحقیق را مورد مطالعه قرار دادند و در جلسه‌ی دفاع شرکت نمودند، قدردانی و تشکر می‌نمایم.

و سپاس صمیمانه دیگر من بر خانواده و دوستان بامحبّتم است، که مرا در طول دوران تحصیل یاری داده‌اند. برای تمامی این عزیزان، توفیق روز افزون را از خداوند متعال خواستارم.

چکیده

هدف از این پژوهش، بررسی سازگاری، پایداری و آنالیز همگرائی از یک روش جداسازی عملگر، یعنی روش جداسازی تکراری عملگر، با استفاده از شیوه های مختلف برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی سهموی می باشد. ایده این روش، جداسازی مسائل پیچیده و تبدیل آنها به معادلات ساده‌تر بنا شده است. بنابراین، هر زیر مساله با طرحهای تکراری ترکیب شده و با انتگرالگیری‌های مناسب حل می‌شود. آنالیزها بستگی به نوع عملگرهای مسائل دارند. هنگامی که عملگرها کراندار هستند، سازگاری با دو روش اثبات می شود. اول، با استفاده از خطای موضعی به‌دست آمده و دوم با استفاده از بسط سری تیلور که پس از ترکیب طرح‌های تکرار با قاعده نقطه میانی به دست می آید. هنگامی که عملگرها بی‌کران هستند سازگاری با استفاده از نظریه $C_\circ$-نیم گروه به‌دست می آید. پایداری به وسیله ساخت توابع پایدار برای هر یک از طرح‌های تکراری، هنگامی که عملگرها کراندارند ارائه می شود. برای عملگرهای بی کران، دو آنالیز پایداری پیشنهاد می شود. اول با استفاده از تبدیل فوریه پیوسته و دوم با استفاده از نظریه نیم گروه‌ها. قضیه هم ارزی لکس-ریچتمایر و استدلال لیدی وایندرمس‌فن که ترکیب سازگاری و پایداری برای همگرائی است ارائه می شود. در بخش محاسباتی روش های ارائه شده روی معادله تومور مغزی، معادله **KdV** و معادله شرودینگر اعمال می‌شوند. در نهایت نتایج عددی، دقت بالا و کارائی این روش را نسبت به سایر روشهای کلاسیک نشان می‌دهند.
کلمات کلیدی: عملگرکران دار، عملگر بی‌کران، $C_\circ$-نیم گروه، قضیه هم ارزی لکس-ریچتمایر، استدلال لیدی وایندرمس فن، معادله تومورمغزی، معادله **KdV** ، معادله شرودینگر.

فهرست مطالب

عنوان | صفحه

پیشگفتار ۱

۱ آشنایی با مفاهیم مقدماتی و پیش نیازها ۴
۱.۱ مقدمه‌ای بر معادله دیفرانسیل جزیی ۴
۲.۱ روش‌های تحلیلی برای یافتن جواب PDE ها ۵
۳.۱ روش تفاضلات متناهی ۶
۴.۱ مروری بر عملگرها ۶
۱.۴.۱ عملگر انتقال E ۶
۲.۴.۱ عملگر تفاضلی پیشرو Δ ۷
۳.۴.۱ عملگر تفاضلی پسرو ∇ ۷
۴.۴.۱ عملگر مرکزی δ ۸
۵.۴.۱ ارتباط بین عملگرها ۹
۵.۱ نرم‌های برداری و ماتریس‌ها ۱۱
۶.۱ تغییر فرمول ثابت و روش عملگر ۱۳
۷.۱ قاعده نقطه میانی ۱۴

۲ مقدمه‌ای بر روش های جداسازی ۱۸
۱.۲ روش‌های جداسازی عملگر ۱۸

۱.۱.۲ جداسازی عملگر لایی-تروتر ۱۹
۲.۲ سازگاری روش جداسازی لایی-تروتر با استفاده از فرمول حاصلضرب زازنحوس ۲۰
۳.۲ جداسازی عملگر استرنیگ-مارچک ۲۳
۴.۲ سازگاری روش جداسازی استرنیگ-مارچک با استفاده از فرمول حاصلضرب
زازنحوس ۲۴
۵.۲ جداسازی تکراری عملگر ۲۷

۳ آنالیز سازگاری روش جداسازی تکراری عملگر ۲۸
۱.۳ آنالیز سازگاری برای عملگرهای کراندار ۲۸
۲.۳ آنالیز سازگاری برای عملگرهای بی‌کران با استفاده از نظریه نیم گروه . . ۳۳
۱.۲.۳ نظریه نیم گروه ۳۳
۲.۲.۳ جواب با استفاده از طرح اول روش جداسازی تکراری عملگر . . ۳۹
۳.۲.۳ جواب با استفاده از طرح دوم روش جداسازی تکراری عملگر . . ۳۹
۴.۲.۳ سازگاری روش جداسازی تکراری عملگر ۴۰
۵.۲.۳ سازگاری طرح اول روش جداسازی تکراری عملگر ۴۳
۶.۲.۳ سازگاری طرح دوم روش جداسازی تکراری عملگر ۴۵

۴ آنالیز پایداری روش جداسازی تکراری عملگر ۴۹
۱.۴ آنالیز پایداری برای عملگرهای کراندار ۴۹
۲.۴ آنالیز پایداری برای عملگرهای بی‌کران ۵۱
۱.۲.۴ پایداری با استفاده از تبدیل فوریه ۵۱
۲.۲.۴ مثال ۱ . . . . ۵۴
۳.۲.۴ مثال ۲ . . . . ۵۶
۴.۲.۴ مثال ۳ . . . . ۵۷
۳.۴ پایداری با $C_\circ$ -نیم گروه ۵۹

۱.۳.۴ پایداری طرح اول روش جداسازی تکراری عملگر ۵۹
۲.۳.۴ پایداری طرح دوم روش جداسازی تکراری عملگر ۶۱

۵ آنالیز همگرایی روش جداسازی تکراری عملگر ۶۳
۱.۵ آنالیز همگرایی برای عملگرهای کراندار ۶۳
۲.۵ آنالیز همگرایی برای عملگرهای بی‌کران ۶۴
۱.۲.۵ همگرایی طرح اول روش جداسازی تکراری عملگر ۶۶
۲.۲.۵ همگرایی طرح دوم روش جداسازی تکراری عملگر ۶۶

۶ روش جداسازی عملگرها و تقریب‌های تفاضلات متناهی برای حل معادله مویرگ در مساله تومور مغزی و معادله KdV و معادله شرودینگر غیر خطی ۶۸
۱.۶ شکل مدل مویرگ در مساله تومور مغزی ۶۸
۲.۶ معادله **KdV** ۷۵
۳.۶ مثال ۷۵
۴.۶ معادله شرودینگر غیر خطی ۸۰
۱.۴.۶ روش جداسازی عملگرها ۸۱
۲.۴.۶ حل معادله شرودینگر یک، دو و سه بعدی ۸۲
۵.۶ مثال های عددی ۸۵
۱.۵.۶ مثال ۱ . . . . ۸۵
۲.۵.۶ مثال ۲ . . . . ۸۷
۳.۵.۶ مثال ۳ . . . . ۸۸
۴.۵.۶ مثال ۴ . . . . ۹۰

۷ روش تفاضلات متناهی جداسازی فشرده برای حل معادلات غیرخطی شرودینگر با ضرایب ثابت ومتغیر ۹۳
۱.۷ قوانین پایستار ۹۴

۲.۷ روش عددی ۹۵
۱.۲.۷ روش جداسازی عملگرها ۹۵
۲.۲.۷ روش جداسازی عملگر به همراه تقریب تفاضلات متناهی فشرده . ۹۶
۳.۲.۷ طرح تفاضلات متناهی فشرده ۹۶
۴.۲.۷ آنالیز پایداری ۱۰۰
۵.۲.۷ خواص پایستاری از روش تفاضلات متناهی جداسازی فشرده ۱۰۱
۳.۷ نتایج عددی ۱۰۴
۴.۷ مثال‌های عددی ۱۰۵
۱.۴.۷ مثال ۱ . . . . ۱۰۵
۲.۴.۷ مثال ۲ . . . . ۱۱۰
۳.۴.۷ مثال ۳ . . . . ۱۱۱

فهرست مراجع ۱۱۵

لیست تصاویر

عنوان صفحه

۱.۶ نمودار جواب های تقریبی مساله تومور مغزی با استفاده از روش جداسازی تکراری عملگر در زمان های نهایی $T = ۳$، $T = ۱۰$، $T = ۵۰$، $T = ۱۵۰$، $T = ۳۰۰$، $T = ۷۵۰$ و $h = ۰٫۱$، $k = ۰٫۳$ ۷۳

۲.۶ نمودار جواب تقریبی مساله تومور مغزی با استفاده از روش جداسازی تکراری عملگر با $h = ۰٫۰۱$ و $k = ۳$ در زمان نهایی $T = ۳۰$. ۷۴

۳.۶ نمودار جواب تقریبی مساله تومور مغزی با استفاده از روش جداسازی استرنیگ-مارچک (سمت راست) و جداسازی لایی-تروتر (سمت چپ) با $h = ۰٫۰۱$ و $k = ۳$ در زمان نهایی $T = ۳۰$. ۷۴

۴.۶ نمودار های جواب تقریبی و واقعی (سمت چپ) و نمودار خطا (سمت راست) مساله KdV با استفاده از روش جداسازی لایی-تروتر با $h = ۰٫۳$ و $k = ۰٫۰۰۰۰۰۵$ در زمان نهایی $T = ۰٫۰۱$. ۷۸

۵.۶ نمودار های جواب تقریبی و واقعی (سمت چپ) و نمودار خطا (سمت راست) مساله KdV با استفاده از روش جداسازی تکراری عملگر با $h = ۰٫۳$ و $k = ۰٫۰۰۰۰۰۵$ در زمان نهایی $T = ۰٫۰۱$. ۷۹

۶.۶ نمودار های جواب تقریبی و واقعی (سمت چپ) و نمودار خطا (سمت راست) مساله KdV با استفاده از روش جداسازی استرنیگ مارچک با $h = ۰/۳$ و $k = ۰/۰۰۰۰۰۵$ در زمان نهایی $T = ۰/۰۱$. ۷۹
۷.۶ نمودار خطا (سمت راست) و نمودار جواب تقریبی (سمت چپ) با $h = ۰/۰۱$، $k = ۰/۰۱$ در زمان نهایی $T = ۱$. ۸۶
۸.۶ نمودار خطا (سمت راست) و نمودار جواب تقریبی (سمت چپ) با $h = \pi/۶۴$، $k = ۰/۰۱$ در زمان نهایی $T = ۴$. ۸۸
۹.۶ نمودار خطا (سمت راست) و نمودار جواب تقریبی (سمت چپ) با $h_x = h_y = \frac{۲\pi}{۱۲۸}$، $k = ۰/۰۱$. ۸۹
۱۰.۶ نمودار خطا (سمت راست) و نمودار جواب تقریبی (سمت چپ) با $h_x = h_y = h_z = \frac{\pi}{۸}$، $k = ۰/۰۰۰۱$ در زمان نهایی $T = ۲$. ۹۲
۱.۷ نمودار خطا (سمت راست) و نمودارهای جواب تقریبی و واقعی برای مثال ۱(الف) با روش **Compact SSFD** با $h = ۰/۱$، $k = ۰/۰۱$ در زمان نهایی $T = ۰/۵$. ۱۰۷
۲.۷ نمودار خطا (سمت راست) و نمودارهای جواب تقریبی و واقعی برای مثال ۱(الف) به روش **SSFD** با $h = ۰/۱$، $k = ۰/۰۱$ در زمان نهایی $T = ۰/۵$. ۱۰۸
۳.۷ نمودار خطا (سمت راست) و نمودارهای جواب تقریبی و واقعی برای مثال ۱(ب) با روش **Compact SSFD** با $h = ۰/۱$، $k = ۰/۰۱$ در زمان نهایی $T = ۰/۵$. ۱۰۹

۴.۷ نمودار خطا (سمت راست) و نمودارهای جواب تقریبی و واقعی برای مثال ۱(ب) با روش **SSFD** با $h = ۰/۱$، $k = ۰/۰۱$ در زمان نهایی $T = ۰/۵$. . . ۱۰۹

۵.۷ نمودار خطا (سمت راست) و نمودارهای جواب تقریبی و واقعی برای مثال ۲ با روش **Compact SSFD** با $h = (۲\pi)/۶۴$، $k = ۰/۰۱$ در زمان نهایی $T = ۵$. ۱۱۱

۶.۷ نمودار خطا (سمت راست) و نمودارهای جواب تقریبی و واقعی برای مثال ۲ با روش **SSFD** با $h = (۲\pi)/۶۴$، $k = ۰/۰۱$ در زمان نهایی $T = ۵$. . . . ۱۱۲

۷.۷ نمودار خطا (سمت راست) و نمودارهای جواب تقریبی و واقعی برای مثال ۳ با روش **SSFD** با $h = ۰/۱$، $k = ۰/۰۱$ در زمان نهایی $T = ۱$. ۱۱۳

۸.۷ نمودار خطا (سمت راست) و نمودارهای جواب تقریبی و واقعی برای مثال ۳ با روش **Compact SSFD** با $h = ۰/۱$، $k = ۰/۰۱$ در زمان نهایی $T = ۱$. ۱۱۴

پیشگفتار

جداسازی عملگرها، روش مفید و کارا برای حل عددی دستگاه‌های پیچیده معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی است. ایده اصلی روش، جداسازی مساله پیچیده و تبدیل آن به زیر مساله ساده بنا شده، که زیر عملگرها با توجه به فرآیندهای فیزیکی متفاوت انتخاب می شوند. بنابراین هر زیر معادله به طور مفید با انتگرالگیری مناسب حل می شود که با شرایط اولیه به هم مربوط هستند. این روش منجر به یک خطای جداسازی می شود که می توان آن را به لحاظ نظری برآورد کرد. مزیت اصلی روش جداسازی عملگر این است که زیر مساله های سهموی یا هذلولی که دارای طبیعت متفاوت هستند، می توانند به طور عددی با به کارگیری روش های متفاوت حل شوند. تاریخ ایده جداسازی، که روی جداسازی لایی-تروتر[۱] بناشده، به سال ۱۹۵۰برمی گردد. در سال ۱۹۵۵، پیکمان و راچفورد[۲] ایده جداسازی با استفاده از تقریب تفاضلات متناهی برای معادله گرما ارائه دادند [۲۴] و در سال ۱۹۵۶ دوگلاس و راچفورد[۳] یک روش تکراری ضمنی خطی ساختند، که اصلاح شده روش جهت متناوب ضمنی است [۱۱]. طرح جداسازی برای اولین بار درسال ۱۹۵۷ توسط ریاضیدانان روسیه بگری نووسکی و گادنوو[۴] پیشنهاد شد که براساس طرح تفاضلاتی صریح برای یک دستگاه از معادلات هذلولی

[۱] Lie-Troterr
[۲] Peaceman-Rachford
[۳] Douglas and Rachford
[۴] Bagrinovskii and Gudunov

می‌باشد [۳]. طرح ضمنی جداسازی عملگرها دو سال بعد توسط یاننکو[۵] منتشر شد [۳۴]. در سال ۱۹۵۹ تروتر روابط حاصلضرب را مورد مطالعه قرار داد و آن را برای ماتریس‌ها با عملگر نامحدود در فضای باناخ گسترش داد [۳۱]. روش‌های جداسازی برای اولین بار به طور اصولی در سال ۱۹۶۸ توسط استرنیگ-مارچک[۶] مورد مطالعه قرار گرفتند [۲۲]. ساده ترین روش جداسازی، جداسازی متوالی (یا جداسازی لایی-تروتر) است که دارای مرتبه دقت زمانی یک است. همچنین جداسازی استرنیگ -مارچک، یک روش از مرتبه دقت زمانی دو می باشد. در سال ۱۹۶۸ تیمام[۷] روش جداسازی عملگرها را تجزیه و تحلیل کرد و آن را برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیر همگن گسترش داد. ما نیز در این تحقیق، به دنبال ایجاد طرح‌های تفاضلات متناهی با مراتب دقت بالا، برای PDE های سهموی هستیم. به علاوه آنالیز روش‌ها شامل سازگاری، همگرائی و پایداری نیز بررسی می‌شوند که در روش‌های عددی از اهمیت بالایی برخوردارند. در فصل اول ابتدا تعاریف و روابط لازم را که در طول این تحقیق به آن ها نیاز داریم، بیان می کنیم. در فصل دوم روش های جداسازی عملگر را معرفی می کنیم. در فصل سوم و چهارم به ترتیب به بررسی آنالیز سازگاری و پایداری روش جداسازی تکراری عملگر می پردازیم. در فصل پنجم همگرایی روش جداسازی تکراری عملگر را با استفاده از قضیه هم ارزی لکس-ریچتمایر[۸] و استدلال لیدی وایندرمس فن[۹] بررسی می‌کنیم. در فصل ششم به بررسی نتایج عددی روش های جداسازی روی معادله تومورمغزی و معادله KDV می پردازیم. در فصل هفتم و هشتم با معرفی روش تفاضلات متناهی جداسازی و روش تفاضلات متناهی جداسازی فشرده برای معادله غیر خطی شرودینگر، به بررسی مرتبه دقت و پایداری

[۵] Yanenko
[۶] Strang-Marchuk
[۷] Temam
[۸] Lax-Richtmyer
[۹] Lady Windermers Fan

طرح‌ها می‌پردازیم.

فصل ۱

آشنایی با مفاهیم مقدماتی و پیش نیازها

در این فصل مفاهیم و روابط مقدماتی را که در سراسر این تحقیق به‌کار رفته‌اند، به اختصار بیان می‌کنیم. هم‌چنین قضایایی که گاهی به آن‌ها استناد می‌شود، بیان شده‌اند. ابتدا با مقدمه‌ای بر معادله دیفرانسیل جزیی[۱] شروع می‌کنیم.

۱.۱ مقدمه‌ای بر معادله دیفرانسیل جزیی

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی نقش بسیار مهمی در فیزیک و مهندسی برای توصیف پدیده ها ایفا می کند. به عنوان مثال، انتقال حرارت در یک میله که به آن گرمای اولیه داده شده است یا انتشار موج در یک فنر که از حالت تعادل خارج شده است می تواند توسط یک PDE توصیف شود. در یک PDE، یک متغیر وابسته مانند u وجود دارد که معمولا بر حسب دو یا چند متغیر مستقل بیان می شود. این معادله را به صورت زیر تعریف می کنیم.

تعریف ۱.۱. معادله دیفرانسیل جزیی معادله‌ای است که شامل یک تابع چندمتغیره و مشتق‌های آن نسبت به متغیرهای مستقل باشد.

[۱] Partial differntial equation

شکل کلی یک PDE، با دو متغیر x و y به صورت زیر است:

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \ldots) = 0.$$

مرتبه یک PDE، مرتبه بالاترین مشتق ظاهر شده در معادله است. PDE، فوق را خطی گوییم هرگاه نسبت به u و مشتقات نسبی آن خطی باشد.

۲.۱ روش‌های تحلیلی برای یافتن جواب PDE ها

برخی روش‌های تحلیلی برای یافتن جواب PDE ها به صورت زیر می‌باشند:

۱. روش جداسازی متغیرها و استفاده از سری‌های فوریه [۲]؛

۲. روش تبدیل لاپلاس[۳]؛

۳. روش تبدیل فوریه [۴] (فوریه سینوسی، فوریه کسینوسی و نامتناهی)؛

۴. دیگر روش‌های تبدیل انتگرالی مانند روش تبدیل ملین [۵]؛

۵. یافتن فرم کانونی PDE و حل فرم کانونی حاصل.

هر کدام از روش‌های فوق برای حل PDE ها شامل محدودیت‌هایی می‌باشد و با افزایش بعد PDE و نامنظم شدن ناحیه حل، محدودیت‌های روش‌های فوق افزایش می‌یابد. بنابراین در یافتن جواب ها استفاده از روش‌های عددی ضروری است. در این تحقیق یک روش عددی به‌نام روش تفاضلات متناهی [۶] برای حل PDEها معرفی و آنالیز می‌شود.

[۲] Fourier series
[۳] Laplace transform
[۴] Fourier transforme
[۵] Melin transform
[۶] Finite difference method

۳.۱ روش تفاضلات متناهی

اساس این روش، استفاده از فرمول‌های مشتق‌گیری عددی برای تقریب مشتقات موجود در معادله می‌باشد. ابتدا عملگرهای تفاضلات متناهی را بیان می‌کنیم.

۴.۱ مروری بر عملگرها

۱.۴.۱ عملگر انتقال E

فرض کنیم $y = f(x)$ یک تابع باشد و مقدار آن در نقاط x، $x+h$، $x+2h$، ... معلوم باشد در این صورت عملگر انتقال E به صورت زیر تعریف می‌شود

$$Ef(x) = f(x+h).$$

عملگر انتقال دارای خواص زیر است،

۱. $E^n f(x) = f(x+nh)$؛

۲. $E^{-n} f(x) = f(x-nh)$؛

۳. $E(f(x)+g(x)) = Ef(x)+Eg(x)$؛

۴. $E(cf(x)) = cEf(x)$؛

۵. $E^n(E^m f(x)) = E^m(E^n f(x)) = E^{n+m} f(x)$؛

۶. $E^n(E^{-n} f(x)) = f(x)$.

۲.۴.۱ عملگر تفاضلی پیشرو Δ

فرض کنیم $y_0, y_1, \ldots, y_n$ مقادیر تابع $y = f(x)$ در نقاط متساوی الفاصله‌ی $x_0, x_1, \ldots, x_n$ با طول گام h باشند یعنی $y_i = f(x_0 + ih)$. در این صورت Δy_i تفاضل پیشرو مرتبه اول y است به طوری‌که،

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

تفاضل پیشرو مرتبه دوم عبارت است از

$$\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta(y_{i+1} - y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i,$$

و در حالت کلی تفاضل پیشرو مرتبه rام عبارت است از،

$$\Delta^r y_i = \Delta^{r-1}(\Delta y_i) = \Delta^{r-1} y_{i+1} - \Delta^{r-1} y_i.$$

عملگر Δ برای نقاط متساوی الفاصله با طول گام h دارای خواص زیر است،

۱. $\Delta c = 0$؛

۲. $\Delta(f(x) + g(x)) = \Delta f(x) + \Delta g(x)$؛

۳. $\Delta^n \Delta^m f(x) = \Delta^m \Delta^n f(x) = \Delta^{n+m} f(x)$؛

۴. $\Delta(f(x)g(x)) = f(x+h)\Delta g(x) + g(x)\Delta f(x)$؛

۵. $\Delta\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\Delta f(x) - f(x)\Delta g(x)}{g(x)g(x+h)}$.

۳.۴.۱ عملگر تفاضلی پسرو ∇

فرض کنیم $y_0, y_1, \ldots, y_n$ مقادیر تابع $y = f(x)$ در نقاط متساوی الفاصله‌ی $x_0, x_1, \ldots, x_n$ با طول گام h باشند یعنی $y_i = f(x_0 + ih)$. در این صورت ∇y_i تفاضل پسرو مرتبه اول y است

به طوری‌که،

$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1}.$$

تفاضلات مرتبه دوم نیز عبارت است از

$$\nabla^2 y_i = \nabla(\nabla y_i) = \nabla(y_i - y_{i-1}) = \nabla y_i - \nabla y_{i-1} = y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2},$$

و در حالت کلی تفاضل پسرو مرتبه rام عبارت است از،

$$\nabla^r y_i = \nabla^{r-1}(\nabla y_i) = \nabla^{r-1} y_i - \nabla^{r-1} y_{i-1}.$$

بنابراین عملگر ∇ برای نقاط متساوی الفاصله با طول گام h دارای خواص زیر است،

۱. $\nabla c = 0$؛

۲. $\nabla(f(x)+g(x)) = \nabla f(x) + \nabla g(x)$؛

۳. $\nabla^n \nabla^m f(x) = \nabla^m \nabla^n f(x) = \nabla^{n+m} f(x)$؛

۴. $\nabla(f(x)g(x)) = f(x-h)\nabla g(x) + g(x)\nabla f(x)$؛

۵. $\nabla\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\nabla f(x) - f(x)\nabla g(x)}{g(x)g(x-h)}$.

۴.۴.۱ عملگر مرکزی δ

عملگر مرکزی δ برای تابع $f(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\delta f(x) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right).$$

این عملگر نیز دارای خواص زیر است،

۱. $\delta c = 0$؛