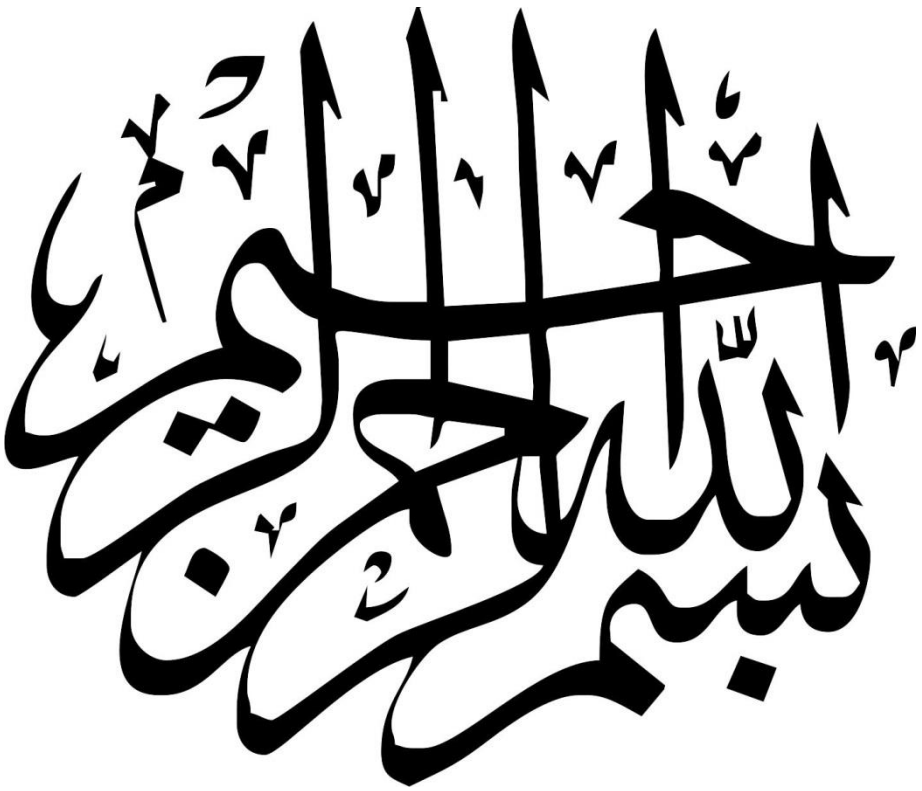
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده: علوم پایه و کشاورزی

مرکز تهران شرق

پایان نامه کارشناسی ارشد

رشته: ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات)

گروه: ریاضی

عنوان پایان نامه:

یک مدل جدید ابر کارایی بر اساس تصویرتوام ورودی- خروجی درDEA

مریم طلاچیان

استاد راهنما: دکتر سعید محرابیان

استاد مشاور: دکترمسعود خلیلی

تیر ۱۳۹۲

اینجانب **مریم طلاچیان** دانشجوی دانشگاه پیام نور، ورودی سال ۱۳۸۹ مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی گرایش تحقیق در عملیات، گواهی می نمایم چنانچه در پایان نامه خود از فکر، ایده و نوشته دیگری بهره گرفته ام با نقل قول مستقیم یا غیرمستقیم منبع و ماخذ آن را نیز در جای مناسب ذکر کرده ام. بدیهی است مسئولیت تمامی مطالبی که نقل قول دیگران نباشد بر عهده خویش می دانم و جوابگوی آن خواهم بود.

دانشجو تائید می نماید که مطالب مندرج در این پایان نامه (رساله) نتیجه تحقیقات خودش می باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است.

نام و نام خانوادگی دانشجو : مریم طلاچیان

تاریخ و امضاء

اینجانب **مریم طلاچیان** دانشجوی دانشگاه پیام نور ، ورودی سال ۱۳۸۹ مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی گرایش تحقیق در عملیات، گواهی می نمایم چنانچه بر اساس مطالب پایان نامه خود اقدام به انتشار مقاله، کتاب و ... نمایم ضمن مطلع نمودن استاد راهنما، با نظر ایشان نسبت به نشر مقاله، کتاب و ... و به صورت مشترک و با ذکر نام استاد راهنما مبادرت نمایم.

نام و نام خانوادگی دانشجو: مریم طلاچیان

تاریخ و امضاء

کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات، آزمایشات و نوآوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه پیام نور می باشد.

تیر ۱۳۹۲

تقدیم به مادر عزیز و پدر بزرگوارم

که عشق و معرفت را به من آموختند.

تقدیم به همسر مهربانم و فرزند دلبندم

که حضور گرمشان در زندگی ام مایه ی آرامش من بوده است.

سپاس گذاری

سپاس خداوند حکیم را که با لطف بی کران خود، آدمی را به زیور عقل آراست.

با نهایت سپاس از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر سعید محرابیان که با حوصله ودانش خود همواره مرا رهنمون بودند، از استادگرامی آقای دکتر محمد خدابخشی که زحمت داوری این پایان نامه را پذیرفتند کمال تشکر رادارد. همچنین از اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر مسعود خلیلی،استاد مشاور و سرکارخانم دکتر فهیمه سلطانیان، مدیر گروه ریاضی قدردانی میگردد.

در پایان از تمام عزیزانی که به نوعی مرا دربه انجام رساندن این مهم یاری کردند، سپاس گذاری می نماید.

مریم طلاچیان

تیر ۱۳۹۲

چکیده:

تحلیل پوششی داده‌ها DEA اولین بار در سال ۱۹۷۸ توسط چارنز و همکاران برای ارزیابی و محاسبه کارایی نسبی مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیری با چند ورودی و چند خروجی تعمیم داده شد. در حالی که مدل‌های پایه‌ای DEA مانند CCR و BCC می‌توانند عملکرد واحدهای کارا را از واحدهای ناکارا تشخیص دهند، اما قادر به رتبه‌بندی واحدهای کارا نمی‌باشند. برای رفع این مشکل اولین بار بنکر در سال ۱۹۸۹یک مدل ابرکارایی DEA مبتنی بر حذف واحد تحت ارزیابی از مجموعه مرجع را جهت رتبه‌بندی واحدهای کارا ارائه نمود و بدنبال آن در سال ۱۹۹۳، اندرسن وپیترسن مدلی مبتنی بر همین اصل را جهت رتبه‌بندی واحدها پیشنهاد کردند. با این حال تحت شرایط بازده به مقیاس متغیر، نشدنی بودن مدل‌های ابرکارایی، ممکن است رخ دهد. برای رفع این مشکل، در این پایان‌نامه یک مدل جدید ابرکارایی براساس تصویر هم زمان ورودی- خروجی‌ها مطرح شده است به طوری که مشکلات روش‌های قبلی را برطرف می‌کند.

در ادامه با به کارگیری مدل پیشنهاد شده روی یک دسته داده‌های واقعی، به صورت کاربردی نتایج حاصل از مدل بررسی شده است.

واژگان کلیدی:

تحلیل پوششی داده‌ها، محاسبه کارایی، ابرکارایی، نشدنی بودن.

فهرست مطالب

پیشگفتار ۱

فصل اول ۳

مقدمه‌ای بر تحلیل پوششی داده‌ها ۳

۱-۱ مقدمه ٤

۲.۱ واحد تصمیم‌گیری ٥

۱.۲.۱ واحدهای تصمیم‌گیری متجانس ٥

۲.۲.۱ واحدهای تصمیم‌گیری مجازی ٥

۳.۱ کارایی ٥

٤.۱ تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) ٦

٥.۱ مجموعه‌ی امکان تولید (PPS) ۷

٦.۱ مدل CCR در فرم پوششی ۱۰

۷.۱ مجموعه مرجع ۱۳

۸.۱ مدل BCC در فرم پوششی ۱٤

۹.۱ بهره‌ورترین اندازه مقیاس (MPSS) ۱٥

فصل دوم ۱۷

معرفی چند مدل رتبه‌بندی ۱۷

۲-۱ مقدمه ۱۸

۲.۲ مدل ابرکارایی اندرسون - پیتر سون (AP) ۱۹

۱.۲.۲ مشکلات مدل‌های ابرکارایی AP ۲۰

۳.۲ مدل ابرکارایی (SE-BCC) ۲۱
٤.۲ شرط لازم و کافی برای نشدنی بودن درمدل‌های ابرکارایی DEA ۲۵
۱.٤.۲ شرط لازم و کافی برای نشدنی بودن در مدل SE-BCC ۲٦
۵.۲ بیشینه‌ی مدل‌های ابرکارایی جهت رفع نشدنی بودن واحدها ۲۹
۱.۵.۲ مدل لاول و رز ۲۹
۲.۵.۲ مدل چن ۳۱
۳.۵.۲ مدل ری ۳٤
فصل سوم ۳۵
مدل جدید ابرکارایی ۳۵
۳-۱ مقدمه ۳٦
۲.۳ مدل ابرکارایی پیشنهادی ۳٦
فصل چهارم ٤۷
مثال کاربردی و نتیجه گیری ٤۷
مثال ۱.٤ ..... ٤۸
مثال ۲.٤ ..... ۵٤
نتیجه‌گیری ۵٦
پیوست ۵۸
واژه نامه فارسی به انگلیسی ۷۱
منابع ۷٤
ABSTRACT ۷۷

پیشگفتار

اندازه‌گیری و ارزیابی میزان عملکرد افراد و واحدهای کاری، موضوعی است که از زمان‌های بسیار دور مورد توجه بشر قرار داشته‌است. محدود بودن منابع و نامحدود بودن نیازها و خواسته‌ها، همواره انسان را وا داشته است که به منظور موفقیت در انجام کارها، به برنامه‌ریزی و مدیریت منابع موجود بپردازد، تا جایی که اطمینان حاصل کند از منابع موجود به حداکثر نتایج و اهداف خود دست یافته است. با پیچیده‌تر شدن گروهها و اعضای آنها، نگاه ساده و ارزیابی غیر علمی آنها کارساز نبود. پیچیدگی اطلاعات، حجم بسیار زیاد داده‌ها، اثرات عوامل بیرونی، اثرات واحدهای رقیب بر عملکرد و محدود بودن واحدها در رابطه با تصمیم‌گیری مناسب، از عواملی بود که مدیران را بر آن داشت تا با ارزیابی علمی از کارکرد واحدها در راستای بهبود کارایی و بالا بردن بازده گروه بکوشند.

تحلیل پوششی داده ها با ارائه روشها و مدلهای ریاضی زمینه‌ای برای ارزیابی علمی پروژه‌های کاربردی فراهم ساخته است و عملکرد (کارایی) واحدهای تصمیم‌گیری متجانس را مورد ارزیابی و مقایسه قرار می‌دهد. ممکن است تعداد زیادی از واحدها، در ارزیابی کارا شناخته شوند، اما این سؤال پیش می‌آید که کدام واحد بهتر عمل می‌کند. به عبارت دیگر چگونه می‌توان واحدهای کارا را رتبه‌بندی نمود؟

روش‌های مختلفی برای رتبه‌بندی واحدهای کارا ارائه گردیده است که هر یک از ویژگی خاصی به عنوان معیاری برای رتبه‌بندی استفاده می‌نمایند، که ما برخی از آنها را مطرح وبررسی می‌کنیم. یکی از این روش‌ها، مدل ابرکارایی اندرسون و پیترسون (۱۹۹۳)[٤] می باشد. یکی از معایبی که این روش دارد نشدنی بودن آن در فرم پوششی، برای نوع خاصی از داده‌هاست.

در این پایان‌نامه مدلی براساس تصویر همزمان ورودی – خروجی ارائه می‌دهیم که همواره شدنی است.

سازمان‌دهی پایان‌نامه چنین است:

در فصل اول، پس از بیان مفاهیم و تعاریف مقدماتی، انداع مدل های DEA بیان می‌شود. در فصل دوم، شرط لازم و کافی برای نشدنی بودن را بیان و به معرفی مدل های ابرکارایی لاول ورز، چن و ری جهت رفع این مشکل می‌پردازیم و معایب هر یک را بیان می‌کنیم. در فصل سوم، به معرفی مدل جدید ابرکارایی و خواص و قضایای مربوط به آن می‌پردازیم. در فصل چهارم، نتایج حاصل از مدل را روی داده‌های واقعی بررسی کرده، وآن را با مدل های قبلی مقایسه می‌کنیم. در انتها، الگوریتم مربوط به مدل‌ها که با زبان برنامه نویسی GAMS نوشته شده، در پیوست آورده شده‌است.

مقالاتی که این پایان‌نامه بر اساس آنها بنا شده‌است، به ترتیب اهمیت موضوع، عبارتند از:

1. Jin-Xiao Chen, Mingrong Deng, Sylvain Gingras.A modified super-efficiency measure based on simultaneous input–output projection in data envelopment analysis. Computers&Operations Researh 38(2011)496-504.

2. Lovell CAK, Rouse APB. Equivalent standard DEA models to provide super- efficiency scores. Journal of the Operational Research Society. 2003;54:101–8.

3. Chen Y. Measuring super-efficiency in DEA in the presence of infeasibility.European Journal of Operational Research005;161:545–51.

4. Ray SC.The directional distance function and measurement of super- efficiency: an application to airlines data. Journal of the Operational Research Society 2008;59:788–97.

فصل اول

مقدمه‌ای بر تحلیل پوششی داده‌ها

۱–۱ مقدمه

امروزه تحلیل پوششی داده‌ها ابزار توانمندی است که به صورت چشمگیری در ارزیابی عملکرد سیستم‌هایی با چند ورودی و چند خروجی، کاربرد یافته است.

به منظور ارزیابی علمی عملکرد واحدها و بخش‌ها، فعالیت‌های زیادی صورت گرفته است. تعریف رابطه‌ی عملکرد با روابط تاثیرگذار به ساخت تابعی با عنوان تابع تولید منجر شد که از ترکیب ورودی‌ها، بیشترین خروجی ممکن را تولید می‌کند.

واضح است که به دست آوردن تابعی که در تعریف بالا بگنجد، کار دشوار و در بسیاری از موارد غیرممکن است. پس برای به دست آوردن تابع، آن را به روش‌های مختلف تقریب زدند. از جمله‌ی این روش‌ها می‌توان به روشهای پارامتری و غیرپارامتری اشاره کرد.

با پیشرفت تکنولوژی، روش‌های پارامتری در برخورد با مسائل موفق عمل نکرد. برای رفع مشکلات ناشی از روش‌های پارامتری، فارل[1] در سال ۱۹۵۷ برای نخستین بار، روش‌های غیرپارامتری را ابداع کرد که در ادامه به طور مبسوط به آن‌ها می‌پردازیم.

[1]- Farell

۲.۱ واحد تصمیم‌گیری[1]

منظور از یک واحد تصمیم‌گیری (DMU)، عبارت است از واحدی که با دریافت بردار ورودی مانند $X=(x_1,x_2,...,x_m)$، بردارخروجی مانند $Y=(y_1,y_2,...,y_s)$ را تولید می‌نماید.

۱.۲.۱ واحدهای تصمیم‌گیری متجانس

واحدهایی که عمل مشابه دارند و با دریافت ورودی‌های مشابه، خروجی‌های مشابه تولید می‌نمایند را واحدهای تصمیم‌گیری متجانس گویند. مانند شعب یک بانک که با دریافت امکاناتی مانند پرسنل، کامپیوتر و ... به جمع‌آوری سپرده، حصول سود و عرضه خدمات می‌پردازند.

۲.۲.۱ واحدهای تصمیم‌گیری مجازی[2]

اینگونه واحدها، واحدهایی هستند که ورودی یا خروجی آن‌ها از ترکیب ورودی و خروجی چند واحد تصمیم‌گیری واقعی حاصل می‌شود. در نتیجه، مجموعه‌ی تمام واحدهای مجازی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A=\left\{(x,y)\middle| x=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j, y=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_j, \lambda_j\geq 0, j=1,...,n\right\}$$

۳.۱ کارایی[3]

کارایی یعنی خوب کارکردن، و حاصل مقایسه شاخص‌های درون سازمانی مثل سود هر واحد، فروش هر واحد و یا رضایتمندی ناشی از یک واحد و از این قبیل می‌باشد، که به صورت نسبت خروجی به ورودی بیان می‌شود:

---

[1]- Decision Making Unit (DMU)
[2]- Virtual Unites
[3] - Efficiency

کارایی = خروجی/ ورودی (۱-۱)

کارایی هر واحد حاصل مقایسه شاخص‌های آن واحد با استانداردها می‌باشد. از آن جایی که استاندارد شاخص‌ها می‌تواند از بیرون یا داخل باشد، کارایی به دو صورت مطلق و نسبی تعریف می‌شود. کارایی مطلق یک واحد، مقایسه‌ی عملکرد آن با استانداردهای کلی است و کارایی نسبی، سنجش عملکرد یک واحد، نسبت به دیگر واحدهای آن مجموعه است.

چون استانداردهای کلی در همه زمینه‌ها تعریف نشده و رسیدن به آن مشکل است، کاربرد کارایی نسبی گسترده‌تر از کارایی مطلق است. اگر واحد تصمیم‌گیری مورد نظر دارای یک ورودی و یک خروجی باشد، با استفاده از رابطه‌ی (۱-۱) کارایی آن قابل محاسبه است واندازه‌ی حاصل، کارایی مطلق آن نیز به شمار می‌آید. اگر برای واحد مدنظر قیمت همه خروجی‌ها و هزینه‌ی همه ورودی‌ها معلوم باشد، کارایی آن از رابطه :

$$E = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_r}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_i} \qquad (۲-۱)$$

اندازه‌گیری می‌شود. که u_r قیمت خروجی rام $(r = 1,2,...,s)$ و v_i هزینه ورودی iام $(i = 1,2,...,m)$ می‌باشد. کارایی نسبی از تقسیم کارایی تمام واحدها به بزرگترین آن‌ها حاصل می‌شود. بنابراین کارایی نسبی واحدها همواره کوچکتر یا مساوی یک است.

۴.۱ تحلیل پوششی داده‌ها[1] (DEA)

تحلیل پوششی داده‌ها شامل تکنیک‌ها و روش‌هایی برای ارزیابی کارایی و یا سنجش بهره‌وری واحدهای تصمیم‌گیری است.

اولین بار فارل، در سال۱۹۵۷ مدلی برای ارزیابی و محاسبه کارایی با ورودی‌های چندگانه و یک خروجی ارائه داد و پس از آن چارنز و همکاران، در سال ۱۹۷۸ این تکنیک را برای چند خروجی

[1]- Data Envelopment Analysis

تعمیم دادند و آنرا تحلیل پوششی داده‌ها نامیدند. فارل با استفاده از ورودی‌ها و خروجی‌های واحدتصمیم‌گیری و با استفاده از اصول حاکم بر آن‌ها مجموعه‌ای با عنوان مجموعه امکان تولید را ارائه و قسمتی از مرز آنرا تقریبی از تابع تولید خواند.

این مرز را مرز کارا نیز می‌نامند و واحدهای تصمیم‌گیری که روی این مرز قرار می‌گیرند کارا نامیده می شوند. از آن جایی که DEA تکنیک ارزیابی کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیری است، حداقل یکی از واحدها روی مرز و بقیه واحدها در زیر آن قرار دارند. نام تحلیل پوششی داده‌ها از ویژگی پوششی‌بودن منشاء گرفته است.

در روش‌های DEA بر خلاف بعضی از روش‌های عددی، مشخص بودن وزن‌ها از قبل و تخصیص آن‌ها به ورودی‌ها و خروجی‌های داده‌ها لازم نیست. هم چنین این روش‌ها نیازی به اشکال تابعی از قبل مشخص شده (مانند روش رگرسیون‌های آماری) و یا شکل صریح تابع تولید (مانند برخی از روش‌های پارامتری) ندارد.

تحلیل پوششی‌داده‌ها با استفاده از تکنیک برنامه‌ریزی ریاضی می‌تواند تعداد زیادی از متغیرها و روابط را در برگیرد.

۵.۱ مجموعه‌ی امکان تولید[1] (PPS)

تابع تولید حاصل از مجموعه‌ی امکان تولید، یک مرز تقریبی است که با توجه به تکنولوژی‌های موردنظر تعریف می‌شود.

$$T = \{(X,Y) \mid \text{بردار } X \text{ بتواند بردار } Y \text{ را تولید کند}\}$$

تعریف فوق با توجه به تکنولوژی تولید، مجموعه امکان تولید را تعریف می‌کند. به عنوان مثال یکی از این تکنولوژی‌های تولید، بازده به مقیاس آن می‌باشد. بازده به مقیاس، بیانگر ارتباط بین تغییرات

[1] - Production Possibility Set

ورودی‌ها و خروجی‌های یک سیستم تولیدی است. به طور مثال بازده به مقیاس به این مثال پاسخ می‌دهد که اگر میزان منابع و مواد اولیه‌ی یک کارخانه دو برابر شود، میزان تولید یا خروجی آن چند برابر می‌شود؟ سه حالت ممکن است رخ دهد:

۱) با دو برابر شدن میزان منابع یا ورودی‌ها، خروجی‌ها نیز دو برابر شوند.

۲) با دو برابر شدن ورودی‌ها، خروجی‌ها کمتر از دو برابرمی‌شوند.

۳) با دو برابر شدن ورودی‌ها، خروجی‌ها بیشتر از دو برابر می‌شوند.

حالت اول را بازده به مقیاس ثابت[۱]، حالت دوم را بازده به مقیاس نزولی و سومین حالت را بازده به مقیاس صعودی می‌نامند.

پس با در نظر گرفتن نوع تکنولوژی تولید، مجموعه امکان تولیدهای مختلف را می توان تولید کرد.

فرض کنیم n مشاهده به صورت (X_j,Y_j)، $(j=1,2,\ldots,n)$ در دست داریم که X_j بردار ورودی با m مؤلفه، بردار خروجی Y_j با s مؤلفه را تولید می‌کند. فرض براین است که، حداقل یک مولفه از بردارهای ورودی و خروجی مثبت است.

مجموعه T را طوری درنظر می‌گیریم که در اصول زیر صدق کند:

اصل اول: اصل شمول مشاهدات

تمام مشاهدات به مجموعه امکان تولید تعلق دارند.

$$(X_j,Y_j)\in T,\ j=1,\ldots,n$$

اصل دوم: اصل بی‌کرانی اشعه (بازده به مقیاس ثابت)

این اصل بیان می‌کند که اگر X، Y را تولید کند آن‌گاه λX، λY $(\lambda>0)$ را تولید می‌نماید و در این صورت کارایی (X,Y) با کارایی $(\lambda X,\lambda Y)$ برای هر $\lambda \geq 0$ یکسان است.

[۱] - Constant Return to Scale : CRS

اصل سوم: اصل تحدب [۱]

T مجموعه‌ای محدب و بسته است، یعنی اگر $(X,Y)\in T$ و $(X',Y')\in T$ آن‌گاه برای هر $0\le\lambda\le 1$ خواهیم داشت: $\lambda(X,Y)+(1-\lambda)(X',Y')\in T$

اصل چهارم: اصل امکان‌پذیری [۲]

این اصل بیان می‌کند که اگر $(\bar{X},\bar{Y})\in T$ آن‌گاه به ازای هر X و Y که در آن $X\ge\bar{X}$ و $Y\le\bar{Y}$ آن‌گاه: $(X,Y)\in T$

اصل پنجم: اصل کمینه درون‌یابی

طبق این اصل T کوچکترین مجموعه‌ای است که در اصول اول تا چهارم صدق می‌نماید.

مجموعه‌ی امکان تولید که در اصول ۱ تا ۵ صدق می‌کند را با T_C به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$T_C=\left\{(X,Y)\mid X\ge\sum_{j=1}^{n}\lambda_j X_j, Y\le\sum_{j=1}^{n}\lambda_j Y_j, \lambda_j\ge 0, j=1,\dots,n\right\}$$

مجموعه‌ی T_C با قبول اصل بازده به مقیاس ثابت ساخته شده است.

با حذف اصل بی‌کرانی اشعه‌ی تولید، مجموعه‌ی امکان زیر ساخته می‌شود که دارای بازده به مقیاس متغیر بوده و آن را با نماد T_v به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$T_v=\left\{(X,Y)\mid X\ge\sum_{j=1}^{n}\lambda_j X_j,\ Y\le\sum_{j=1}^{n}\lambda_j Y_j,\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1,\ \lambda_j\ge 0, j=1,\dots,n\right\}$$

تعریف ۱.۵.۱: فرض کنیم $Z_1=(X_1,Y_1)$ و $Z_2=(X_2,Y_2)$ هر دو اعضایی از T_C باشند، هرگاه $X_1\le X_2$ و $Y_1\ge Y_2$ باشد و حداقل یکی از نامساوی‌ها به صورت اکید باشد، گوییم Z_1 بر Z_2 غلبه می‌کند.

---

[1]- Convexity
[2]- Possibility

تعریف ۲.۵.۱: DMU_p کاراست اگروفقط اگر توسط هیچ عضو مجموعه‌ی امکان تولید مغلوب نگردد.

۶.۱ مدل CCR[1] در فرم پوششی

فرض کنیم $(j=1,2,...,n)DMU_j$ ، n واحد تصمیم‌گیری متجانس هستند. اگرهدف ارزیابی عملکرد DMU_p (واحد pام) باشد، به روش‌های مختلف می‌توان کارایی این واحد را نسبت به مرز کارای CCR مورد ارزیابی قرار داد.

الف: کاهش ورودی‌ها

این کاهش به صورت شعاعی و به سمت مرز انجام می‌گیرد. در این جا هدف پیدا کردن واحد مجازی است که همین خروجی را با حداقل ورودی تولید کند، یعنی:

$$\begin{aligned}&\min\ \theta\\&\text{s.t.}\ \ (\theta X_p, Y_p)\in T_c\end{aligned}$$

با توجه به ساختار T_C داریم:

$$\begin{aligned}&\min\ \theta\\&\text{s.t.}\ \ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j X_j \le \theta X_p,\\&\qquad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j Y_j \ge Y_p,\\&\qquad \lambda_j \ge 0,\ \ j=1,2,\ldots,n\end{aligned}\qquad (۳-۱)$$

این مدل که به مدل پوششی CCR در ماهیت ورودی[2] معروف است، با تعریف متغیرهای کمکی به صورت زیر درمی‌آید:

[1] - Charnes . Cooper . Rhodes
[2] - Input Orient

$$\begin{aligned}\theta_p^* = \min\ & \theta \\ \text{s.t.}\ & \sum_{j=1}^{n}\lambda_j X_j + S^- = \theta X_p, \\ & \sum_{j=1}^{n}\lambda_j Y_j - S^+ = Y_p, \\ & \lambda_j \geq 0,\ j = 1,2,\ldots,n \\ & S^- \geq 0, S^+ \geq 0,\end{aligned} \qquad (۴-۱)$$

الف: اگر θ^* (مقدار بهینه‌ی θ) برابر یک و در تمامی جواب های بهینه، متغیرهای کمکی صفر باشند، DMU_p به مفهوم پاراتو کارا و یا کارای قوی خوانده می‌شود.

ب: اگر $\theta^* = 1$، ولی در بعضی از جواب‌های بهینه، حداقل یکی از متغیرهای کمکی ناصفر باشد DMU_p کارای ضعیف خوانده می‌شود.

ج: اگر $\theta^* \neq 1$، DMU_p ناکاراست.

نکته: مقدار θ^* را کارایی شعاعی یا تکنیکی واحد تصمیم‌گیری گویند.

برای تشخیص این که DMU_p کارای قوی است یا نه، کافی است پس از کسب مقدار $\theta^* = 1$ از مدل بالا مسأله‌ی زیر را که به مسأله‌ی فاز ۲ معروف است حل کنیم:

$$\begin{aligned}\max\ & 1S^- + 1S^+ \\ \text{s.t.}\ & \sum_{j=1}^{n}\lambda_j X_j + S^- = \theta X_p, \\ & \sum_{j=1}^{n}\lambda_j Y_j - S^+ = Y_p, \\ & \lambda_j \geq 0,\ j = 1,2,\ldots,n \\ & S^- \geq 0, S^+ \geq 0,\end{aligned} \qquad (۵-۱)$$

برای آنکه DMU_p کارای قوی باشد، بایستی مقدار بهینه‌ی مدل فوق صفر شود.

ب: افزایش خروجی‌ها

در این حالت، هدف پیدا کردن واحد مجازی است که با مصرف همین مقدار ورودی، خروجی بیشتری تولید می‌کند، یعنی:

$$\begin{aligned} &\max \quad \varphi \\ &s.t. \quad (X_p, \varphi Y_p) \in T_C \end{aligned}$$

با در نظر داشتن ساختار T_C داریم:

$$\begin{aligned} &\max \quad \varphi \\ &s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j \le X_p, \\ &\qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_j \ge \varphi Y_p, \\ &\qquad \lambda_j \ge 0, j = 1,2,\ldots,n \end{aligned} \qquad (۱-۶)$$

مسئله بالا به فرم پوششی مدل CCR در ماهیت خروجی[۱] معروف است. در مدل (۱-۶)، $\varphi = 1$ و $\lambda_p = 1$ و $\lambda_j = 0$ $(j = 1,2,\ldots,n)$ یک جواب شدنی می‌باشد.

ثابت می‌شود که در مدل CCR، در ارزیابی DMU_p در ماهیت ورودی، مقدار θ^* برابر است با $\frac{1}{\varphi^*}$ که در آن φ^*، مقدار بهینه تابع هدف در ماهیت خروجی است.

ج: تغییرات هم زمان ورودی‌ها و خروجی‌ها

در این حالت، هدف پیدا کردن واحدی است که با دریافت ورودی کمتر، خروجی بیشتری تولید می‌کند. یعنی:

[۱]- Output Oriented