فصل اول

منطق اعداد فازی

1.1 مقدمه

برای پرداختن به ابهام تفکر انسانی، پرفسور لطفی زاده[1] دانشمند ایرانی تبار دانشگاه برکلی آمریکا در سال 1965برای اولین بار تئوری مجموعه‌های فازی را مطرح کرد که این تئوری به عقلایی بودن عدم قطعیت به موجب عدم دقت و ابهام،گرایش داشت.

کمک اصلی تئوری مجموعه‌های فازی، توانایی آن در نشان دادن داده‌های مبهم بوده و پدیده‌های جهان واقع، که در آنها عدم قطعیت وجود دارد مورد استفاده قرار می‌گیرد. همچنین این تئوری به عملگرهای ریاضی و برنامه‌ریزی اجازه می‌دهد تا تسلط فازی را بکار ببرند.یک مجموعه فازی طبقه-ای از اشیاء با یک پیوستار از درجات عضویت می‌باشد. یک چنین مجموعه‌ای بوسیله یک تابع عضویت مشخص می‌شود که به هر شی یک درجه عضویت در بازه [0,1] اختصاص می‌دهد[14].

در واقع، دنیا را نه به صورت صفر و یک بلکه به صورت طیفی خاکستری از واقعیتها می بیند و به صورت منطقی، چند ارزشی است و اجازه می‌دهد تا ارزش‌هایی را بین بله و خیر، درست یا نادرست و...تعریف کنیم و به کمک آن مفاهیمی چون خیلی، نسبتا، تقریباو...که به استدلال انسانی نزدیک می-باشد را به صورت ریاضی مدل نموده تا به وسیله کامپیوتر قابل فهم باشد.

منطق فازی برای سیستم‌های متعدد مدیریت از جمله تصمیم گیری، سیاست گذاری، برنامه ریزی و مدلسازی قابل استفاده است.

وقتی که علامت (~) بالای یک متغیر قرار بگیرد، نشان دهنده یک مجموعه فازی می‌باشد. بنابراین $\tilde{u}$ و $\tilde{a}$ مجموعه‌های فازی هستند.

بیشتر مسائل تصمیم‌گیری و حل آنها، خیلی پیچیده‌تر از این هستندکه به صورت کمی درک شوند هر چند که افرادبا استفاده از دانش مبهم به موفقیت دست می یابند.تئوری مجموعه‌های فازی در استفاده از این اطلاعات تقریبی و عدم دقت برای ایجاد تصمیمات به توجیه انسانی شباهت دارد.

بطور خاص این تئوری برای نشان دادن عدم قطعیت و ابهام به طور ریاضی طراحی شده است و ابزارهای رسمی را برای پرداختن به عدم دقت درونی بسیاری از مسائل ارائه می دهد.

از آنجایی که دانش می‌تواند با استفاده از مجموعه‌های فازی بطور طبیعی‌تر بیان شود بنابراین بیشتر مسائل تصمیم‌گیری و مهندسی می‌توانند بصورت ساده‌تر بیان شوند.تئوری مجموعه‌های فازی برای طبقه‌ها یاگروههایی از داده‌ها با حدهایی که دقیقا تعریف شده نیز بکار برده می‌شوند.

---

1 Zade

تئوری مجموعه‌های فازی در برگیرنده منطق فازی، محاسبه فازی، برنامه ریزی فازی، توپولوژی فازی، تئوری ترسیم فازی و تجزیه و تحلیل داده‌های فازی می‌باشند،گرچه واژه منطق فازی اغلب برای تشریح همه این موارد بکار برده می‌شود[15] .

۲.۱ فضای n بعدی

فرض کنید R^{n} فضای اقلیدسی n بعدی بوده و $x \equiv (x_1,, \dots\dots, x_n)^T$ و $y \equiv (y_1, \dots, y_n)^T$ دو بردار از R^{n} باشند به طوری که $x_i, \mathrm{y}_i \in \mathrm{R}$ ،برای $i = 1,2,.., n$ و Tدلالت برترانهاده بردارها دارد.حاصلضرب داخلی دو بردار x, y را به صورت $\langle x, y\rangle$ نمایش می‌دهند.

$$\langle x, y\rangle = (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n)$$

برای هر دو بردار $x, y \in R^n$ ، تعاریف زیر را بیان می کنیم:[7]

الف) $x \geqq y \Leftrightarrow x_i \geq y_i i = 1,2, \dots, n$

مثال) $x = (1,0,2,-4) \quad , y = (0,0,1,-5)$ یا $x = (7,4,1,2), y = (7,4,1,2)$

ب) $x \geq y \Leftrightarrow x \geqq y , x \neq y$

مثال) $x = (2,7,3,4), y = (2,5,1,2)$

ج) $x > y \Leftrightarrow x_i > y_i \quad i = 1,2, \dots, n$

مثال) $x = (1,0,2,7), y = (0,-1,1,3)$

قضیه1.1.1

برای هر $a, b, c \in R^n$ و $a \leqq b \leqq c$ ، اگر وجود داشته باشد $x, x^* \in R^n$ بطوریکه:

$\langle a, x\rangle \leqq \langle a, x^*\rangle, \langle c, x\rangle \leqq \langle c, x^*\rangle$ ،آنگاه $\langle b, x\rangle \leqq \langle \mathrm{b}, x^*\rangle$ می باشد.

اثبات: اگر $\langle a, x\rangle \leqq \langle a, x^*\rangle, \langle c, x\rangle \leqq \langle c, x^*\rangle$ برقرار باشددر اینصورت خواهیم داشت:

$$0 \leqq \langle a, (x^* - x)\rangle \ , \ \ 0 \leqq \langle c, (x^* - x)\rangle$$

بنابر این با توجه به نامساوی $a \geqq b \geqq C$ داریم :

$$\langle c,(x^*-x)\rangle-\langle a,(x^*-x)\rangle=\langle (c-a),(x^*-x)\rangle \geqq \langle (c-b),(x^*-x)\rangle$$
$$=\langle c,(x^*-x)\rangle-\langle b,(x^*-x)\rangle \Rightarrow$$
$$\langle c,(x^*-x)\rangle-\langle a,(x^*-x)\rangle \geqq \langle c,(x^*-x)\rangle-\langle b,(x^*-x)\rangle \Rightarrow$$
$$\langle b,(x^*-x)\rangle \geqq \langle a,(x^*-x)\rangle \geqq 0 \Rightarrow (\langle b,x^*\rangle-\langle b,x\rangle) \geqq 0$$

در نتیجه $\langle b,x^*\rangle \geqq \langle b,x\rangle$: [15] . ■

۳.۱ مجموعه های فازی

در تئوری مجموعه کلاسیک، عضویت مفهومی محض برای یک مجموعه است، یعنی یک عنصر مفهوم منعطف‌تری دارد.درمجموعه کلاسیک A، تعلق داشتن را می‌توانیم بصورت زیر نمایش دهیم:

$$X_A(x)=\begin{cases}1 & iff \quad x\in A\\ 0 & iff \quad x\notin A\end{cases} \qquad (۱-۱)$$

جاییکه زوج اعداد{0,1} مجموعه مشخصه نامیده می‌شود.

مجموعه‌های فازی ، تعمیم مجموعه مشخصه {0,1} به تمام اعداد موجود در بازه [0,1] است و شکل تابع مشخصه به تابع عضویت تغییر یافته وبصورت $\mu_{\tilde{A}}(x)$ نمایش داده می‌شود و بجای مجموعه‌های کلاسیک، مجموعه فازی داریم. یک مجموعه فازی$\tilde{A}$ در X بصورت یک مجموعه از زوجهای مرتب به شکل زیر نمایش داده می شود :

$$\tilde{A}=\{(x,\mu_{\tilde{A}}(x))|x\in R\} \qquad (۲-۱)$$

که در آن $\mu_{\tilde{A}}(x)$ تابع عضویت x در $\tilde{A}$ نامیده می‌شود [17].

مثال: مجموعه مرجع $X=\{1,2,3,4,5\}$ و زیر مجموعه A برابر مجموعه اعداد کوچکتر از 4 وB برابر مجموعه اعداد بزرگ را در نظر بگیرید. در اینجاA یک مجموعه قطعی است.

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & x=1,2,3\\ 0 & x=4,5\end{cases}$$

ولی مجموعه B فازی است، زیرا بزرگ بودن مبهم است و تابع عضویت آن را بصورت زیر فرض می کنیم:

$$\mu_{\mathrm{B}}(x) = \begin{cases} 0 & x = 1 \\ \frac{1}{10} & x = 2 \\ \frac{4}{10} & x = 3 \\ 1 & x = 5 \end{cases}$$

تعریف1.3.1 هسته یک مجموعه فازی

هسته مجموعه فازی $\tilde{A}$ را با نماد $core\tilde{A}$ نشان داده، عبارت است از زیر مجموعه‌ای از مجموعه مرجع X که درجه عضویت عناصر آن در$\tilde{A}$ برابر (1) است.

$$core(\tilde{A}) = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\} \qquad (۱-۳)$$

تعریف 2.3.1 ارتفاع یک مجموعه فازی

ارتفاع یک مجموعه فازی، بزرگترین مقدار درجه عضویت در آن مجموعه است.یعنی:

$$hyt(\tilde{A}) = max\{\mu_{\tilde{A}}(x)\} \qquad (۱-۴)$$

تعریف3.3.1 تساوی دو مجموعه فازی

دو مجموعه فازی$\tilde{A}$ و$\tilde{B}$ را مساوی گوئیم اگر و تنها اگر:

$$\forall x \in X \ , \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x) \qquad (۱-۵)$$

و مجموعه فازی$\tilde{A}$ تهی است اگر و تنها اگر : $\forall x \in X \ , \mu_{\tilde{A}}(x) = 0$

تعریف 4.3.1 α - برش

فرض کنیم $\tilde{A}$ یک مجموعه فازی بوده و $\alpha \in (0,1]$ یک عددحقیقی باشد،آنگاه مجموعه

$$[\tilde{A}]^{\alpha} \equiv \{x \in R | \mu_{\tilde{A}}(x) \geqq \alpha\} \tag{۶-۱}$$

را یک α - برش مجموعه $\tilde{A}$ نامیم. اگر مجموعه بالا بصورت $[\tilde{A}]^{\alpha} \equiv \{x \in \mathrm{R} \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}$ تعریف شود آنرا یک α - برش قوی گوئیم.

برای $\alpha = 0$ ما مجموعه $[\tilde{A}]^{0} \equiv \{x \in R | \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$ را حامی یا پشتیبان $\tilde{A}$ تعریف می کنیم.

نکته : مجموعه فازی $\tilde{A}$ را منفرد گوئیم هر گاه مجموعه پشتیبانش تک عضوی باشد.

تعریف 5.3.1 مجموعه فازی نرمال

یک مجموعه فازی را نرمال می‌نامند، اگر درجه عضویت حداقل یکی از اعضای آن مثلا x_i برابر 1 باشد.

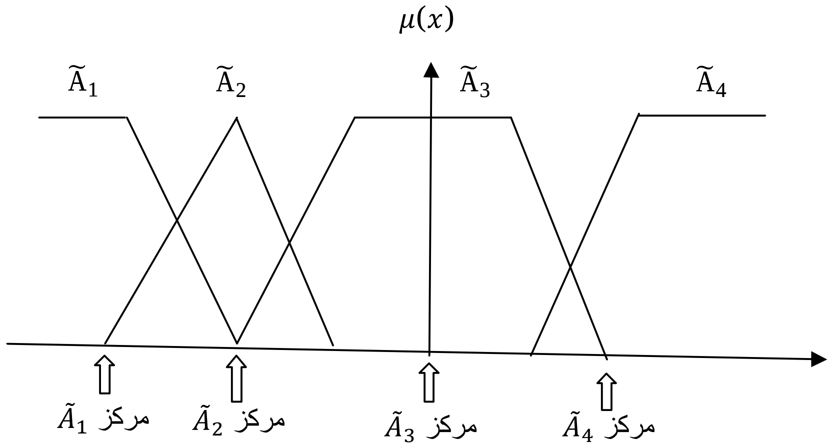
نکته : برای نرمال کردن مجموعه فازی غیر نرمال، کافیست که درجه عضویت هر عنصر را بر $hyt(\tilde{A})$ تقسیم کنیم.

تعریف 6.3.1 مرکز یک مجموعه فازی

اگر مقدار میانگین تمام نقاطی که در آنها تابع عضویت مجموعه فازی به حداکثرمقدارخود می‌رسد، محدود باشد، در اینصورت این مقدار میانگین، مرکز یک مجموعه فازی می‌باشد.

اگر مقدار میانگین مثبت بینهایت(منفی بینهایت)باشد، دراینصورت مرکز بصورت کوچکترین (بزرگترین) نقطه ای است که در آن نقطه تابع عضویت به حداکثر مقدار خود می رسد.

شکل (1-1) مرکز چند مجموعه فازی را نشان می‌دهد.



شکل (۱-۱)

تعریف7.3.1 مجموعه فازی محدب

یک مجموعه فازی $\tilde{A}$ روی R را محدب گویند اگر و تنها اگر:

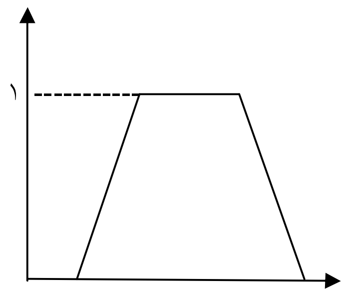
$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\} \qquad (۷-۱)$$

که در آن $\lambda \in [0,1]$ و $x_1, x_2 \in X$.

معنی تحدب به طور شهودی این است که تابع عضویت یک مجموعه فازی بیش از یک مرتبه بالا و پایین نرود [13] .

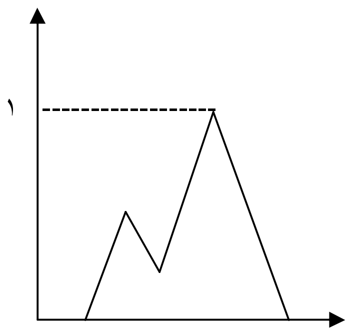
در شکل زیر محدب و غیر محدب بودن یک مجموعه فازی نمایش داده شده است.

مجموعه محدب



شکل (۱-۲)

مجموعه غیر محدب



شکل (۱-۳)

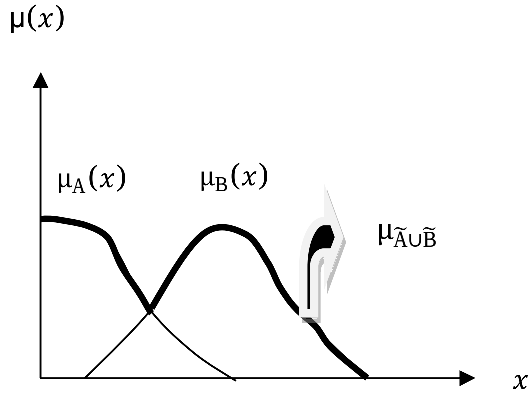
تعریف 8.3.1 مجموعه فازی$\tilde{A}$ زیر مجموعه فازی$\tilde{B}$ است اگر و تنها اگر :

$$\forall x \in X \quad , \quad \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x) \qquad (۸\text{-}۱)$$

٤.١ عملیات پایه روی مجموعه های فازی

1.4.1 اجتماع دو مجموعه فازی

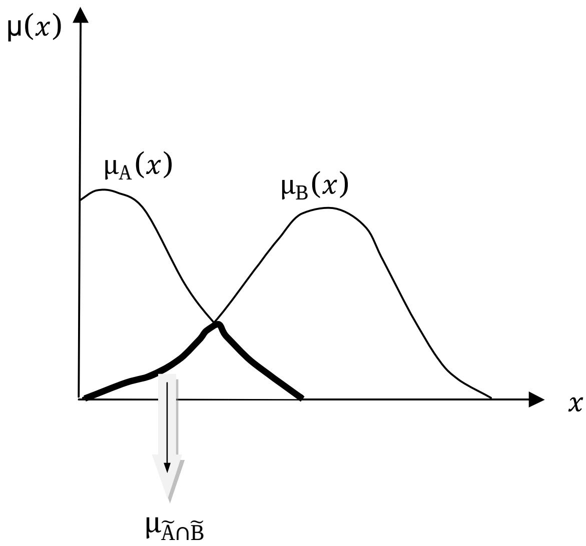
$$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}} = max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x) \ , x \in X\} \quad (۱-۹)$$



شکل (۱-۴)

2.4.1 اشتراک دو مجموعه فازی

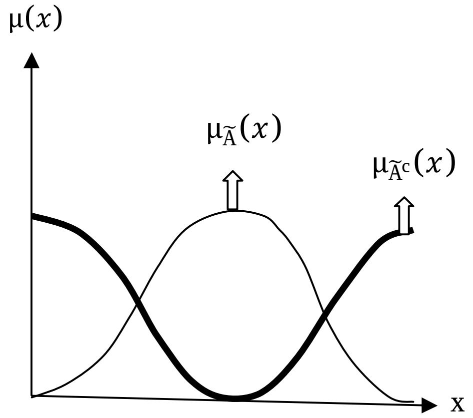
$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}} = min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x) \ , x \in X\} \quad (۱-۱۰)$$



شکل (۱-۵)

3.4.1 مکمل دو مجموعه فازی

$$\mu_{\tilde{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$$ (۱۱-۱)



شکل (۱-۶)

مثال: فرض کنید :

$$\tilde{A} = \{(1,0.2), (2,0.5), (3,0.8), (4,1), (5,0.7), (6,0.3)\}$$

$$\tilde{B} = \{(3,0.2), (4,0.4), (5,0.6), (6,0.8), (7,1), (8,1)\}$$

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{(3,0.2), (4,0.4), (5,0.6), (6,0.3)\}$$

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{(1,0.2), (2,0.5), (3,0.8), (4,1), (5,0.6), (6,0.8), (7,1), (8,1)\}$$

4.4.1 عملگرهای جبری

حاصل $\tilde{A} + \tilde{B}$ با عنوان جمع جبری بصورت زیر تعریف می شود:

$$\tilde{A} + \tilde{B} = \left\{\left(x, \mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(x)\right) \mid x \in X\right\}$$ (۱۲-۱)

$\mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)$

حاصل $\tilde{A} \cdot \tilde{B}$ با عنوان ضرب جبری بصورت زیر تعریف می شود:

$$\tilde{A} \cdot \tilde{B} = \left\{\left(x, \mu_{\tilde{A}\cdot\tilde{B}}(x)\right) \mid x \in X\right\}$$

$$\mu_{\tilde{A}\cdot\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x) \qquad (۱۳\text{-}۱)$$

تابع عضویت ضرب عدد قطعی a در مجموعه فازی $\tilde{A}$ به شکل زیر تعریف می شود:

$$\mu_{a\tilde{A}}(x) = a\mu_{\tilde{A}}(x) \qquad (۱۴\text{-}۱)$$

مثال:

$\tilde{A} = \{(3,0.5), (5,1), (7,0.6)\}$ و $\tilde{B} = \{(3,1), (5,,0.5)\}$

$\tilde{A} + \tilde{B} = \{(3,1), (5,1), (7,0.6)\}$ و $\tilde{A} \cdot \tilde{B} = \{(3,0.5), (5,0.6)\}$

۵.۱ اعداد فازی

اعداد فازی مجموعه‌های فازی هستند که برای توصیف مفاهیمی نظیر" تقریبا" و "درحدود" و "نزدیک به هم" استفاده می‌شوند.

اعداد فازی به صورت یک مجموعه فازی روی فضای اعداد حقیقی R تعریف شده و با حروفی به صورت $\tilde{a}$ نمایش داده می‌شوند[7] .

تابع عضویت $\tilde{a}$ عبارت است از $\mu_{\tilde{a}}(x)$ هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

1) $\mu_{\tilde{a}}(x): \mathrm{R} \rightarrow [0,1]$ ($\mu_{\tilde{a}}$ یک نگاشت از R به بازه [01] میباشد)

یک عدد حقیقی یکتا مانند c وجود دارد بطوریکه:

2)
$$\begin{cases} a)\mu_{\tilde{a}}(c) = 1 & c \text{ مرکز } \tilde{a} \text{ نامیده می‌شود} \\ b)\mu_{\tilde{a}}(x): & \text{در بازه } (-\infty, c] \text{ صعودی است} \\ c)\mu_{\tilde{a}}(x): & \text{در بازه } [c, +\infty) \text{ نزولی است} \end{cases}$$

شرایط c,b محدب بودن را نمایش می‌دهدو شرط a نشان می دهد که عدد $\tilde{a}$ نرمال است [7].

مجموعه تمام اعداد فازی را با$F(R)$ نمایش می دهند. برای هر عدد حقیقی $\lambda \in R$ ، اگر $\mu_\lambda(x)$ را به صورت زیر تعریف کنیم، در این صورت$\lambda \in F(R)$ خواهد بود.

$$\mu_\lambda(x) = \begin{cases} 1 & iff \;\; x = \lambda \\ 0 & iff \;\; x \neq \lambda \end{cases} \qquad (۱۵-۱)$$

اعدادفازی همانند هر مجموعه فازی ممکن است بوسیله$\alpha-$ برشهایی مشخص شوند.

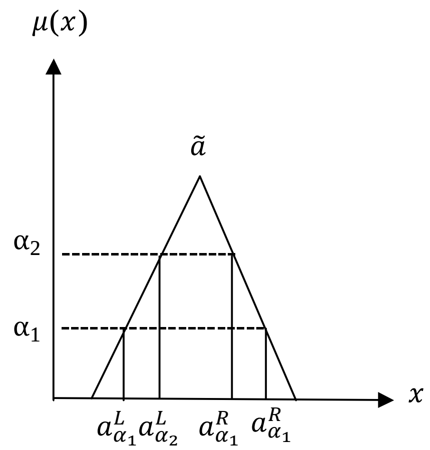
از آنجائیکه مجموعه $[\tilde{a}]^\alpha$ یک بازه بسته برای هر $\alpha \in [0,1]$ می باشد، مجموعه $\alpha-$ برش $\tilde{a}$ را توسط $[a_\alpha^L, a_\alpha^R]$ نمایش می دهیم، به طوریکه:$a_\alpha^R \equiv sup[\tilde{a}]^\alpha$ و $a_\alpha^L \equiv inf[\tilde{a}]^\alpha$.

قضیه1.5.1

اگر $\alpha_1, \alpha_2 \in (0,1]$ به طوریکه: $\alpha_1 \leqq \alpha_2$ در این صورت داریم: $[\tilde{a}]^{\alpha_2} \subset [\tilde{a}]^{\alpha_1}$.

اثبات: با توجه به اینکه $\alpha_1 \leqq \alpha_2$ میباشد در اینصورت با توجه به شکل(1-7) ، خواهیم داشت:

$a_{\alpha_1}^L \leq a_{\alpha_2}^L, a_{\alpha_2}^R \leq a_{\alpha_1}^R$درنتیجه $\left[a_{\alpha_2}^L, a_{\alpha_2}^R\right] \subset \left[a_{\alpha_1}^L, a_{\alpha_1}^R\right]$ [8] . ■



شکل (۱-۷)

قضیه2.5.1 (اصل تجزیه)

مجموعه فازی$\tilde{A}$ را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد :

$$\tilde{A} = \cup\, \alpha A_\alpha \quad , (\alpha \in [0,1])$$

که در آن αA_α ضرب اسکالر α در مجموعه$\alpha -$ برش A_α است.

بنابراین عدد فازی $\tilde{a}$ را به صورت مجموعه‌ای از فواصل با استفاده از اصل تجزیه می‌توان به صورت $\tilde{a} = \cup \alpha [a_\alpha^L, a_\alpha^R] \; , (\alpha \in [0,1])$ نمایش داد.

قضیه 3.5.1

برای هر دو عدد فازی $\tilde{a}, \tilde{b}$ سه نوع رابطه دوتایی زیر را تعریف می کنیم:

الف) $\tilde{a} \succeq\!\!\!= \tilde{b} \;\; iff \;\; a_\alpha^L \geqq b_\alpha^L ,\; a_\alpha^R \geqq b_\alpha^R \;\; \forall \alpha \in [0,1]$

ب) $\tilde{a} \succeq \tilde{b} \;\; iff \;\; a_\alpha^L \geq b_\alpha^L ,\; a_\alpha^R \geq b_\alpha^R \;\; \forall \alpha \in [0,1]$

ج) $\tilde{a} \succ \tilde{b} \;\; iff \;\; a_\alpha^L > b_\alpha^L ,\; a_\alpha^R > b_\alpha^R \;\; \forall \alpha \in [0,1]$

این روابط دوتایی را به ترتیب: ماکزیمم، ماکزیمم قوی و ماکزیمم اکیداً قوی می نامند [11] .

تعریف1.5.1

اگر برای هر عدد حقیقی مثبت M، وجود داشته باشد $\lambda_0 \in (0,1]$ بطوریکه $M \leqq a_{\lambda_0}^R$ یا $a_{\lambda_0}^L \leqq -M$ در این صورت عدد فازی $\tilde{a}$ را یک عدد فازی نامتناهی نامیده و به صورت $\tilde{\infty}$ نوشته می‌شود.اگر $\tilde{a} \notin \tilde{\infty}$ ، در این صورت عدد فازی$\tilde{a}$ یک عدد فازی متناهی خواهد بود.

مجموعه اعداد فازی متناهی را به صورت $F^*(R)$ نمایش می دهیم [15] .

اصل توسعه

اصل توسعه، ابزار ریاضی مهمی است که برای توسعه نظریه‌های ریاضیات کلاسیک و عملیات مربوط به محیط فازی مورد استفاده قرار می‌گیرد. اصل توسعه، زمینه‌ای را ایجاد می‌نماید که پارامترهای یک تابع در مجموعه‌های فازی قابل محاسبه باشند.

تعریف 2.5.1 (اصل توسعه) فرض کنید $f: X \to Y$ تابعی از مجموعه قطعی X به مجموعه قطعی Y باشد. همچنین فرض کنید مجموعه $\tilde{A}$ به مجموعه X تعلق دارد و ما می‌خواهیم مجموعه فازی $\tilde{B}$ در Y را به صورتی معین نماییم که $\tilde{B} = f(\tilde{A})$

اگر f یک نگاشت یک به یک باشد بنابراین f^{-1} موجود بوده و داریم:

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = max\, \mu_{\tilde{A}}(x) \text{ و } y \in Y \;\; (x \in f^{-1}(y))$$

نحوه بیان عملگرها با استفاده از اصل توسعه

تعریف 3.5.1 جمع اعداد فازی

$$\mu_{\tilde{a}+\tilde{b}}(t) = sup\{min(\mu_{\tilde{a}}(x), \mu_{\tilde{b}}(y))\} \;\; ; t = x + y \qquad (۱۶-۱)$$

تعریف 4.5.1 تفریق اعداد فازی

$$\mu_{\tilde{a}-\tilde{b}}(t) = sup\{min(\mu_{\tilde{a}}(x), \mu_{\tilde{b}}(y))\} \;\; ; t = x - y \qquad (۱۷-۱)$$

تعریف 5.5.1 ضرب اعداد فازی

$$\mu_{\tilde{a}.\tilde{b}}(t) = sup\{min(\mu_{\tilde{a}}(x), \mu_{\tilde{b}}(y))\} \;\; ; t = x.y \qquad (۱۸-۱)$$

$$\mu_{\lambda\tilde{a}}(t) = sup\mu_{\tilde{a}}(x) \;\; ; \mathrm{t} = \lambda x \qquad (۱۹-۱)$$

تعریف 6.5.1 تقسیم اعداد فازی

$$\mu_{\tilde{a}\div\tilde{b}}(t) = sup\{min(\mu_{\tilde{a}}(x), \mu_{\tilde{b}}(y))\} \;\; ; t = x \div y \qquad (20\text{-}1)$$

تعریف 7.5.1 کمینه اعداد فازی

$$\mu_{\tilde{a}\wedge\tilde{b}}(t) = sup\{min(\mu_{\tilde{a}}(x), \mu_{\tilde{b}}(y))\} \quad ; t = x \wedge y \qquad (۲۱\text{-}۱)$$

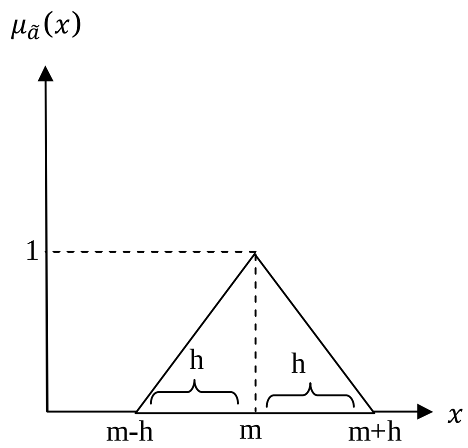
تعریف 8.5.1 بیشینه اعداد فازی

$$\mu_{\tilde{a}\vee\tilde{b}}(t) = sup\{min(\mu_{\tilde{a}}(x), \mu_{\tilde{b}}(y))\} \quad ; t = x \vee y \qquad (۲۲\text{-}۱)$$

نکته : مجموعه $sup\{\emptyset\} = -\infty$ نمایش می دهیم[8] .

۶.۱ اعداد فازی مثلثی

فرض کنید m و h بترتیب اعداد حقیقی و اعداد حقیقی مثبت باشند. اگر تابع عضویت عدد فازی $\tilde{a}$ به شکل زیر باشدآنرا یک عدد فازی مثلثی متقارن می گوییم.



شکل (۱-۸)

تابع عضویت این اعداد را می‌توان به صورت زیر فرموله نمود:

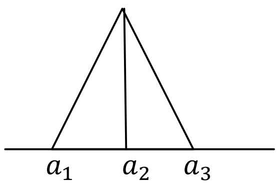
$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} 1 - \left|\frac{x-m}{h}\right| & for \quad x \in [m-h, m+h] \\ 0 & other\ wise \end{cases} \qquad (۲۳\text{-}۱)$$

که در آن عدد m مرکز $\tilde{a}$ و h مقدار برگشت $\tilde{a}$ می باشد.از آنجائیکه هر عدد مثلثی متقارن $\tilde{a}$ با m و h مطرح می شود پس می توان اعداد مثلثی متقارن را به صورت $\tilde{a} \equiv (m,h)_T$ نمایش داد.

مجموعه تمام اعداد فازی مثلثی را با F_T نمایش می دهند[8] .

نکته : α-برش یک عدد فازی مثلثی از رابطه زیر بدست می آید:

$$A_\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] = [(a_2 - a_1)\alpha + a_1, -(a_3 - a_2)\alpha + a_3] \ \ (0 \le \alpha \le 1) \qquad (۲۴\text{-}۱)$$



شکل (۱-۹)

نکته : جمع و تفریق اعداد فازی مثلثی، عددی مثلثی است ولی ضرب و تقسیم اعداد مثلثی، مثلثی نیستند.

نکته : با توجه به مفهوم ترتیب دوتایی روی اعداد فازی، ترتیب ماکزیمم بیان شده در قضیه 2.3.1، یک ترتیب جزیی روی F_T است ولی دو رابطه دیگر ترتیبی جزیی در F_T نیستند.

قضیه1.6.1

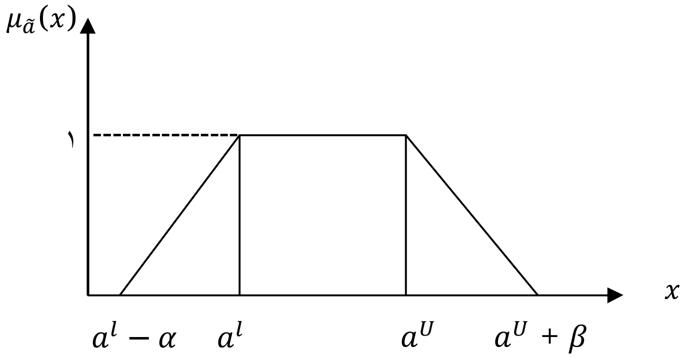
فرض کنیم $\tilde{a} \equiv (a,\alpha)_T, \tilde{b} \equiv (b,\beta)_T$ دو عدد فازی مثلثی متقارن باشند آنگاه روابط زیر برقرارند[4] .

الف) $\tilde{a}\, \underline{\underline{\mathbf{f}}}\, \tilde{b} \ \ iff \ \ |\alpha - \beta| \leqq a - b$

ب) $\tilde{a}\, \mathbf{f}\, \tilde{b} \ \ iff \ \ |\alpha - \beta| < a - b$

۷.۱ اعداد فازی ذوزنقه ای

یک عدد فازی $\tilde{a}$ ذوزنقه‌ای نامیده می‌شود، اگر تابع عضویت آن به شکل زیر باشد:



شکل (۱-۱۰)

وعدد $\tilde{a}$ را بصورت زیر می‌توان نمایش داد:

$\tilde{a} = (a^L, a^U, \alpha, \beta)$ که در بازه $(a^L - \alpha, a^U + \beta)$ تعریف شده و مرکز آن $[a^L, a^U]$ می‌باشد.

1.7.1 برخی عملیات محاسباتی روی اعداد فازی ذورنقه ای

دو عدد فازی $\tilde{a}, \tilde{b}$ را بصورت زیر در نظر بگیرید: [9]

$\tilde{a}:(a^L, a^U, \alpha, \beta)$ $, \tilde{b}: (b^L, b^U, \gamma, \theta)$

1)$x > 0 \rightarrow x\tilde{a} \equiv (xa^L, xa^U, x\alpha, x\beta)$

2)$x < 0 \rightarrow x\tilde{a} \equiv (xa^U, xa^L, -x\beta, -x\alpha)$ (۱-۲۵)

3)$\tilde{a} + \tilde{b} \equiv (a^L + b^L, a^U + b^U, \alpha + \gamma, \beta + \theta)$

4)$\tilde{a} - \tilde{b} \equiv \left(a^L - \tilde{b}, a^U - b^U, \alpha + \theta, \beta + \gamma\right)$

تابع عضویت اعداد فازی ذوزنقه ای را به صورت زیر نمایش می دهند:

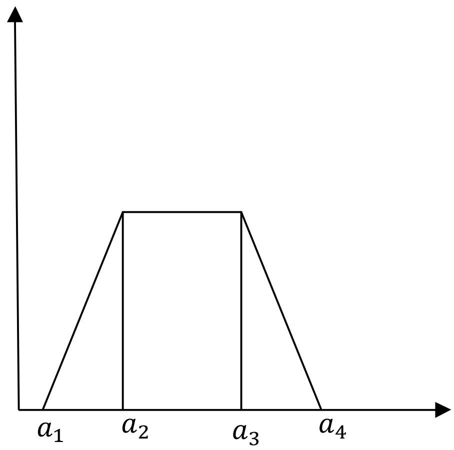
$$\mu_{\tilde{a}}(x):\begin{cases}1 & a^L \le x \le a^U\\ 1+\frac{x-a^L}{\alpha}=L(x) & x<a^L\\ 1-\frac{x-a^U}{\beta}=R(x) & x>a^U\end{cases} \qquad (۱-۲۶)$$

که $L(x)$ یک تابع پیوسته از راست بوده و $0 \le L(x) \le 1$ و $lim_{x\to\infty} L(x) = 0$ و $R(x)$ یک تابع پیوسته از چپ بوده و $0 \le R(x) \le 1$ و $lim_{x\to\infty} R(x) = 0$ [13] .

نکته : α- برش یک عدد فازی ذوزنقه‌ای از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$A_\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] = \left[(a_2-a_1)\alpha + a_1 \text{ و } -(a_4-a_3)\alpha + a_4\right] \ (0 \le \alpha \le 1) \qquad (۱-۲۷)$$

که در شکل زیر نمایش داده شده است.



شکل (۱-۱۱)

نکته: جمع وتفریق اعداد فازی ذوزنقه‌ای، ذوزنقه‌ای است ولی ضرب وتقسیم اعداد فازی ذوزنقه‌ای، ذوزنقه‌ای نیست.

۸.۱ اعداد فازی مثلثی و ذوزنقه ای L-R

فرض کنید Lو R توابعی از Rبه R باشدبطوریکه:

1) $L(x) = L(-x)$ $,R(x) = R(-x)$

2) $R(0) = L(0) = 1$

3) L روی فاصله$[0, +\infty]$ غیر افزایشی است

در اینصورت عدد فازی$\widetilde{M}$ از نوع L-R می‌باشدیا به بیان دیگر عدد فازی$\widetilde{M}$ از نوعL-R است اگر وفقط اگر:

$$\mu_{\widetilde{\mathrm{M}}}(x):\begin{cases}\mathrm{L}\left(\frac{\mathrm{m}-x}{\alpha}\right) & x \leq \mathrm{m} \ ,\alpha > 0\\ \mathrm{R}\left(\frac{x-\mathrm{m}}{\beta}\right) & x \geq \mathrm{m} \ ,\beta > 0\end{cases} \qquad (۲۸\text{-}۱)$$

αوβ به ترتیب کران چپ و راست بوده و m میانگین عدد فازی $\widetilde{M}$ است.اگر $\alpha = \beta = 0$ باشد آنگاه $\widetilde{M}$ برابر عدد قطعی m است. این عدد را به صورت $\widetilde{M} = (\mathrm{m}, \alpha, \beta)$ نمایش می‌دهند.اگر مقدار حداکثر عدد، یک فاصله باشد آنگاه به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

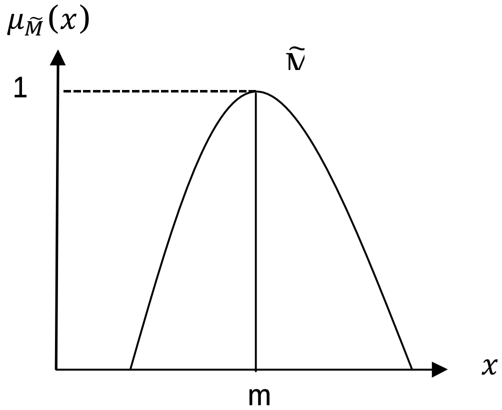
$$\widetilde{M} = (m_1, m_2, \alpha, \beta)$$

که یک عدد فازی ذوزنقه ای L-R بوده وتابع عضویت آن به شکل زیر می‌باشد :

$$\mu_{\widetilde{M}}(x):\begin{cases}L\left(\frac{m_1-x}{\alpha}\right) & x \leq m_1 \, , \alpha > 0\\ 1 & m_1 \leq x \leq m_2\\ R\left(\frac{x-m_2}{\beta}\right) & x \geq m_2 \ , \beta > 0\end{cases} \qquad (۲۹\text{-}۱)$$

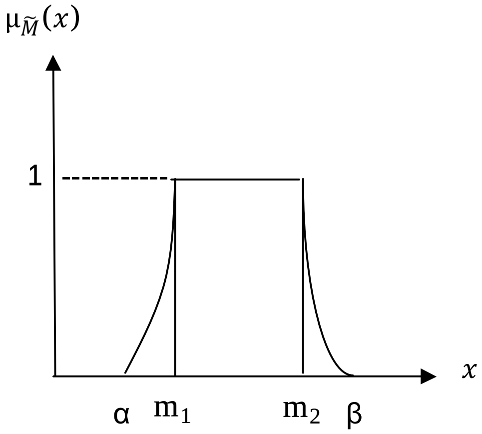
این اعداد فازی را می توان به شکلهای زیر نمایش داد[15] .

عددفازی مثلثی L-R



شکل (۱-۱۲)

عددفازی ذوزنقه ای L-R



شکل (۱-۱۳)

۹.۱ اعداد فازی در فضای n بعدی

تعریف : فرض کنید $i = 1,2,\dots,n$, $\tilde{a}_i \in F(R)$ تعریف می‌کنیم $\tilde{a} = (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n)$ و تابع عضویت آن به صورت زیر می‌باشد:

$$\mu_{\tilde{a}}: R^n \to [0,1]$$

$$x \to \bigwedge_{i=1}^{n} \mu_{\tilde{a}}(x_i)$$

که در آن $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ عضوی از R^{n} است. در این تعریف $\tilde{a}$ یک عدد فازی n بعدی روی R^{n} نامیده می‌شود. اگر $\tilde{a}_i \in \mathrm{F}^*(\mathrm{R})$ ، در این صورت $\tilde{a}$ یک عدد فازی n بعدی متناهی روی R^{n} نامیده می شود.

مجموعه اعدادفازی n بعدی را با نماد $\mathrm{F}(R^n)$ و مجموعه اعداد فازی n بعدی متناهی را با نماد $F^*(R^n)$ نمایش می‌دهیم[15] .

قضیه1.9.1

برای هر $\tilde{a} \in F(R^n)$, $\tilde{a}$ نرمال است.

اثبات : از آنجائیکه $\tilde{a} \in F(R^n)$ می باشد، وجود دارد $\tilde{a}_i \in F(R)$, *i=1,2,..,n* به طوریکه