بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه آزاد اسلامی

واحد تهران مرکزی

دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی و آمار

پایان نامه کارشناسی ارشد **(M.Sc)**

گرایش: محض

عنوان:

ماتریس های منظم – یکه و ماتریس های کلین

استاد راهنما:

آقای دکتر شعبانعلی صفری ثابت

استاد مشاور:

خانم دکتر شروین صاحبی

نگارش:

سمیه رزاقی

بهمن ۱۳۹۱

تقدیم به قلب مادرم

که طراوت مهر و دعایش، آسمان آرزوهایم را رنگ نور می پاشد

به او که بر شب موهایش چند زمستان برف نشست

تا من به بهار رسیدم...!

تقدیم به دست های پدرم

که جاده های روشن زندگیم را سایبانست

و به بزرگی قلبش که تکیه گاهی ستبر برای گامهای امید من است.

به او که جوانی هایش را با بچگی هایم پیر کردم...!

تقدیم به چشم های همسرم

که روشنی امید را بر واژه های هدفم می نشاند

و لبخند یاری اش دست های تلاشم را گرمی می بخشد.

به همسفر صبور زندگیم که با او بی انتها بودن جاده برایم آرزویی است...!

تقدیر و سپاس

در ابتدا سپاس گویم پروردگار بی نیاز بی همتا که در هیچ گاه زندگی فراموشم نکرد و هر چه می دهد از بخشندگی بی انتهایش و هر چه نمی دهد از حکمت بی منتهایش است.

و سپاس بیکران بر همدلی و همراهی و همگامی همسر مهربانم، او که بار خوبی هایش بر شانه هایم گرم می نشیند و قدم های مرا در جاده هدفم استوارتر می کند و انعکاس نگاه و کلامش، یاری مهربان در راه هدف های من است.

و سپاس، پدر عزیزم را که هرچین صورت و چروک دستش نشانی از رنج سال هایی است که به جان خرید تا من به جوانی رسم.

و سپاسم نثار نازنین مادرم که سجده ایثارش، گل محبت را در وجودم پروراند و دامان گهربارش لحظه های مهربانی را به من آموخت.

و با تقدیر و تشکر شایسته خدمت استاد فرهیخته جناب آقای دکتر شعبانعلی صفری، او که آسمان تیره جهل مرا با بزرگی و وسعت قلبش که به وسعت دانش اوست، روشنی بخشید. اینک سر فرود آرم و به پاس داشته هایم در آسمان روشن دانایی هایم او را سپاس گویم.

و از استاد فرزانه سرکار خانم دکتر شروین صاحبی که با نکته های دلاویز و گفته های بلند، صحیفه های سخن را علم پرور نمود و همواره راهنما و راه گشای من بوده است سپاس گذاری می نمایم.

و در پایان سپاس فراوان نثار جناب آقای دکتر لطف اله پورفرج که منت نهاد و داوری این پایان نامه را پذیرفت و گرانبها دانش خود را بی دریغ در اختیار من نهاد.

تعهد نامه اصالت پایان نامه کارشناسی ارشد

اینجانب سمیه رزاقی دانش آموخته مقطع کارشناسی ارشد ناپیوسته به شماره دانشجویی ۸۹۰۹۲۷۲۰۰۰۰ در رشته ریاضی محض که در تاریخ ۱۳۹۱/۱۱/۲۸ از پایان نامه خود تحت عنوان:

ماتریس های منظم – یکه و ماتریس های کلین

با کسب نمره ۱۹/۵ و درجه عالی دفاع نموده ام بدین وسیله متعهد می شوم:

۱– این پایان نامه حاصل تحقیق و پژوهش انجام شده توسط اینجانب بوده و در موردهایی که از دستاوردهای علمی و پژوهشی دیگران (اعم از پایان نامه، کتاب، مقاله و...) استفاده نموده ام، مطابق ضابطه ها و رویه های موجود، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آنرا در فهرست ذکر و درج کرده ام.

۲– این پایان نامه قبلاً برای دریافت هیچ مدرک تحصیلی (هم سطح، پایین تر یا بالاتر) در سایر دانشگاهها و موسسه های آموزش عالی ارایه نشده است.

۳– چنانچه بعد از فراغت از تحصیل، قصد استفاده و هرگونه بهره برداری اعم از چاپ کتاب، ثبت اختراع و... از این پایان نامه داشته باشم، از حوزه معاونت پژوهشی واحد مجوزهای مربوطه را اخذ نمایم.

٤– چنانچه در هر مقطع زمانی خلاف موردهای بالا ثابت شود، عواقب ناشی از آن را بپذیرم و واحد دانشگاهی مجاز است با اینجانب مطابق ضابطه ها و مقررات رفتار نموده و در صورت ابطال مدرک تحصیلی ام هیچگونه ادعایی نخواهم داشت.

نام و نام خانوادگی : سمیه رزاقی

تاریخ و امضاء :

بسمه تعالی

در تاریخ: ۱۳۹۱/۱۱/۲۸

دانشجوی کارشناسی ارشد خانم سمیه رزاقی از پایان نامه خود دفاع نموده و با نمره ۱۹/۵۰ بحروف نوزده و پنجاه صدم با درجه عالی مورد تصویب قرار گرفت.

امضاء استاد راهنما

معاونت پژوهشی و فن آوری

به نام خدا

منشور اخلاق پژوهش

با یاری از خداوند سبحان و اعتقاد به این که عالم محضر خداست و همواره ناظر بر اعمال انسان و به منظور پاسداشت مقام بلند دانش و پژوهش و نظریه اهمیت جایگاه دانشگاه در اعتلای فرهنگ و تمدن بشری، ما دانشجویان و اعضای هیات علمی واحدهای دانشگاه آزاد اسلامی متعهد می گردیم اصول زیر را در انجام فعالیت های پژوهشی مدنظر قرار داده و از آن تخطی نکنیم:

۱– اصل حقیقت جویی: تلاش در راستای پی جویی حقیقت و وفاداری به آن و دوری از هرگونه پنهان سازی حقیقت.

۲– اصل رعایت حقوق: التزام به رعایت کامل حقوق پژوهشگران و پژوهیدگان (انسان، حیوان و نبات) و سایر صاحبان حق.

۳– اصل مالکیت مادی و معنوی: تعهد به رعایت کامل حقوق مادی و معنوی دانشگاه و کلیه همکاران پژوهش.

٤– اصل منافع ملی: تعهد به رعایت مصالح ملی و در نظر داشتن پیشبرد و توسعه کشور در کلیه مراحل پژوهش.

۵– اصل رعایت انصاف و امانت: تعهد به اجتناب از هرگونه جانبداری غیرعلمی و حفاظت از اموال، تجهیزات و منابع در اختیار.

٦– اصل رازداری: تعهد به صیانت از اسرار و اطلاعات محرمانه افراد، سازمان ها و کشور و کلیه افراد و نهادهای مرتبط با تحقیق.

۷– اصل احترام: تعهد به رعایت حریم ها و حرمت ها در انجام تحقیقات و رعایت جانب نقد و خودداری از هرگونه حرمت شکنی.

۸– اصل ترویج: تعهد به رواج دانش و اشاعه نتایج تحقیقات و انتقال آن به همکاران علمی و دانشجویان به غیر از مواردی که منع قانونی دارد.

۹– اصل برایت: التزام به برائت جویی از هرگونه رفتار غیرحرفه ای و اعلام موضع نسبت به کسانی که حوزه علم و پژوهش را به شایبه های غیرعلمی می آلایند.

فهرست مطلب ها

عنوان	صفحه

چکیده

یک عنصر را در حلقه R کلین (منظم – یکه) می نامند، اگر حاصل جمع (حاصل ضرب) یک عنصر خودتوان و یک عنصر یکه باشد. می دانیم اگر تمام عنصرهای R منظم – یکه باشند آنگاه R کلین است. در این تحقیق، نشان می دهیم عنصر منظم – یکه تنها در یک حلقه، می تواند کلین نباشد. به طورکلی تر، ضابطه ای برای کلین بودن ماتریس $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ در حلقه ماتریس $M_{2}(K)$ روی حلقه جابجایی دلخواه K داده شده است. برای $K = Z$ این ضابطه برای مثال، نشان می دهد ماتریس منظم– یکه $\begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ کلین نیست. همچنین، در این پایان نامه نتیجه هایی به دست آمده است که در فصل پنجم بیان شده است.

مقدمه

مفهوم عنصر منظم - یکه، نخستین بار توسط ارلیچ[۱] معرفی گردید. طبق [۱۳] عنصر x در حلقه R منظم- یکه است اگر و فقط اگر $x = xux$ که $u \in U(R)$. به آسانی می توان بررسی کرد که عنصر x منظم - یکه است اگر و فقط اگر x حاصل ضرب یک عنصر خودتوان در یک عنصر یکه باشد. همانطور که از نامشان پیداست، عنصرهای منظم - یکه، منظم هستند. ارلیچ، یک حلقه را منظم - یکه نامید اگر همه عنصرهای آن منظم - یکه باشند. حلقه هایی از این نوع به طور گسترده در مبحث حلقه های فون نیومن منظم مطالعه می شوند[۱۵، بخش٤].

به طور مشابه، عنصرهای کلین در حلقه ها توسط نیکلسون[۲] معرفی شدند. در [۲۸] عنصر x از حلقه R کلین نامیده می شود اگر x مجموع یک عنصر خودتوان و یک عنصر یکه در حلقه R باشد و حلقه R کلین است اگر همه عنصرهای R کلین باشند. چنین حلقه هایی مورد علاقه اند زیرا یک زیررده از حلقه های تبادلی در نظریه حلقه های ناجابجایی تشکیل می دهند.

[۱] Ehrlich
[۲] Nicholson

رابطه بین کلین بودن و منظم - یکه بودن به نظر نسبتاً دقیق و نزدیک به هم است. نیکلسون این پرسش را مطرح کرد که آیا یک حلقه منظم - یکه، کلین است؟ در [۹] یا به طور صحیح تر، کامیلو[۳] و خورانا[۴] در [۷] نشان دادند هر حلقه منظم - یکه، کلین است. این اثبات، پرسش نیکلسون را پاسخ می دهد اما این پاسخ به قدری کلی است که پاسخ این پرسش را نمی دهد که آیا یک عنصر منظم - یکه تنها در حلقه R کلین است. درکل اگر عنصر $x \in R$ شکل eu داشته باشد به طوری که e یک عنصر خودتوان و u یک عنصر یکه باشد که با e جابجا شود آنگاه با نوشتن $f = ۱ - e$ خواهیم داشت:

$$x = f + (eu - f)$$

کلین است، ازآنجاییکه f خودتوان است و $eu - f$ یک یکه با معکوس $eu^{-۱} - f$ (و جابجایی با f). این نشان می دهد که در هر حلقه ای که خودتوان ها مرکزی هستند (حلقه جابجایی، حلقه موضعی یا حلقه کاهش یافته) هر عنصر منظم - یکه، درحقیقت کلین است. به طور کلی تر، در [۲۹، قضیه ۱] نیکلسون نشان داد که اگر $x \in R$ چنان باشد که $x^n = eu = ue$ $(n \geq ۱)$ که $e = e^۲$ و $u \in U(R)$ آنگاه x کلین است. این قضیه نتیجه می دهد که هر حلقه قویاً π- منظم کلین است. به ویژه، هر حلقه آرتینی راست (حلقه متناهی) کلین است.

نتیجه دیگری از هان[۵] و نیکلسون در [۱۸] نشان می دهد که هر ماتریس (متناهی) روی یک حلقه کلین، کلین است.

[۳] Camilo
[۴] Khurana
[۵] Han

هدف اولیه این تحقیق نشان دادن این است که در یک حلقه ناجابجایی، عنصرهای منظم - یکه، لزوماً کلین نیستند. به طور طبیعی بهترین مکان برای جستجوی مثال هایی برای آن، خانواده انواع مختلف حلقه های ماتریسی روی حلقه جابجایی K است. اولین تلاش، کار با حلقه ماتریس های بالامثلثی $T_n(K)$ روی K مثال مطلوب را به وجود نمی آورد. درحقیقت، می توان نشان داد که عنصرهای منظم - یکه، همیشه در $T_n(K)$ کلین می باشند. از این رو، حلقه های ماتریس کامل $M_n(K)$ مورد بررسی قرار می گیرند. اولین مثال از ماتریس های مثلثی ویژه، ماتریسی به شکل $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (روی حلقه جابجایی مناسب K) است. مسأله با اثبات ضابطه کلی برای کلین بودن $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$، در حلقه $M_۲(K)$ حل می گردد. از این رو، در این ضابطه، نشان داده می شود $\begin{pmatrix} ۱ + xy & x^۲ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (مشتق ماتریس کوهن در [۱۲]) منظم- یکه است اما روی $K = k[x, y]$ برای هر دامنه صحیح k کلین نیست. با محدود کردن ضابطه کلین بودن برای مورد $K = Z$ نیز به طور الگوریتمی روش خیلی ساده برای تصمیم گیری کلین بودن ماتریس هایی به شکل $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ روی حلقه Z به دست می آید. به ویژه می بینیم انتخاب های

$$(a, b) = (۲, ۵), (۱۳, ۵), (۱۲, ۷), \ldots$$

کلین نیستند.

در فصل ابتدایی این تحقیق به بیان کلیات و روش های تحقیق می پردازیم. فصل دوم به بیان تعریف ها و قضیه های مورد نیاز فصل های بعد اختصاص دارد. بخش یک فصل سوم، تعریف ها و ویژگی های حلقه های منظم - یکه آورده شده است. در بخش دوم فصل سه تعریف و ویژگی ها

حلقه های کلین بیان می شود. در بخش سوم فصل سه رابطه بین حلقه های منظم – یکه و حلقه های کلین بررسی شده است. در بخش یکم از فصل چهار، به ارتباط ماتریس های منظم – یکه و ماتریس های کلین می پردازیم. در بخش دوم فصل چهار، ضابطه ای برای کلین و منظم – یکه بودن ماتریس $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ بیان می شود و مثال هایی مشخص از ماتریس های منظم – یکه غیرکلین می یابیم. در ابتدای بخش سوم فصل چهار خودتوان های ماتریس مربعی کامل را روی حلقه Z برمی شماریم و جدول عددی از ماتریس منظم – یکه غیرکلین بیان می کنیم. بخش چهارم از فصل چهار به بیان ویژگی ماتریس خودتوان تعریف شده برای بررسی کلین بودن ماتریس ها اختصاص دارد. در فصل پنجم به بیان نتیجه گیری و پیشنهاد می پردازیم.

در تمام این تحقیق، R یک حلقه شرکت پذیر یکدار، $U(R)$ گروه یکه های R، $Id(R)$ مجموعه عنصرهای خودتوان R و $(a_۱, a_۲, \dots, a_n)^t$ یک ستون ماتریس $n \times n$ می باشد.

فصل ۱ کلیات

هدف

هدف این تحقیق، جستجوی راهی برای یافتن رابطه دقیق بین ماتریس های کلین و ماتریس های منظم – یکه است. درحقیقت، یافتن عنصرهای منظم – یکه غیرکلین روی حلقه های ناجابجایی هدف اصلی کار با ماتریس ها در این تحقیق می باشد. از هدف های دیگر، پیدا کردن ویژگی های حلقه های کلین و حلقه های منظم – یکه و یافتن رابطه دقیق بین آن ها است. چاپ مقاله های بی شمار با موضوع اصلی منظم – یکه و کلین، ضرورت پرداختن به این مبحث ها را مشخص می کنند.

پیشینه تحقیق

مبحث حلقه های کلین و حلقه های منظم – یکه، موضوع نه چندان جدید در زمینه جبر و در گرایش حلقه ها می باشد اما حلقه های کلین، به دلیل کاربردشان در نظریه حلقه های ناجابجایی مورد توجه هستند و حلقه های منظم – یکه به علت گستردگی کاربرد آن ها در حلقه های منظم مورد علاقه اند. حلقه منظم – یکه نخستین بار توسط ارلیچ درسال ۱۹٦۸ تعریف شد و به طور

مشابه حلقه کلین در سال ۱۹۷۲ توسط آقای نیکلسون به عنوان زیرکلاس محضی از حلقه تبادلی معرفی شد. موضوع این تحقیق در ارتباط مستقیم با مقاله ای با نام

Clean Matrices And Unit- Regular Matrices

است که در سال ۲۰۰٤ به چاپ رسید.

هدف ویژه این تحقیق، یافتن ضابطه ای دقیق میان ماتریس های منظم - یکه و ماتریس های کلین روی حلقه جابجایی دلخواه K و درنتیجه یافتن ماتریس های منظم - یکه غیرکلین به شکل $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ است.

روش کار تحقیق

در بررسی و انجام این تحقیق از مقاله ها و کتاب های ریاضی مختلف استفاده شده است. بیشترین تعداد مقاله های مورد استفاده در این تحقیق از طریق جستجو در اینترنت گردآوری شده است. تعریف ها و قضیه های مورد نیاز دو فصل سوم و چهارم، در فصل دوم گرد آوری شده است. فصل سوم ویژگی های حلقه های منظم – یکه و کلین را بیان کرده و به بررسی رابطه آن ها با یکدیگر می پردازد. در فصل چهارم به بررسی ویژگی های ماتریس های منظم - یکه و کلین پرداخته می شود و در جستجوی روشی الگوریتمی برای ماتریس های منظم - یکه غیرکلین است. درنهایت، در فصل پنجم نتیجه گیری کوتاهی از چند فصل قبل به دست می آید و پیشنهادهایی در ارتباط با این موضوع ها ارایه می گردد.

فصل ۲

تعریف ها و قضیه ها

تعریف ۱.۲. عنصر $a \neq 0$ در حلقه R را مقسوم علیه صفر چپ (راست) می نامیم اگر وجود داشته باشد $b \neq 0$ متعلق به R که $ab = 0$.

تعریف ۲.۲. عنصر a در حلقه R، یکه چپ (راست) یا وارون پذیر چپ (راست) است اگر عنصر $b \in R$ ($c \in R$) وجود داشته باشد به طوری که $ba = ۱$ ($ac = ۱$). عنصر b (c) به طور یکتا تعیین شده و با $a^{-۱}$ نشان داده می شود.

تعریف ۳.۲. عنصر $a \in R$ را پوچ توان می نامیم اگر وجود داشته باشد $n \in N$ که $a^n = 0$ و $Nil(R)$ مجموعه عنصرهای پوچ توان حلقه R است.

تعریف ٤.۲. عنصر e در حلقه R خودتوان است اگر $e^۲ = e$.

تعریف ۵.۲. فرض کنید e یک عنصر خودتوان در حلقه R باشد. عنصر f را خودتوان متمم e گوییم اگر $e + f = ۱$.

تعریف ۶.۲. عنصر خودتوان e در حلقه R، مرکزی است اگر و فقط اگر $eRf = fRe = 0$ که $f = ۱ - e$.

تعریف ۷.۲. عنصرهای خودتوان $e_۱, \dots, e_n$ در حلقه R متعامد هستند اگر به ازای $i \neq j$، $e_i e_j = 0$.

تعریف ۸.۲. اگر L زیرگروه جمعی حلقه R باشد، خودتوان ها به پیمانه L ارتقا می یابند اگر برای $x \in R$ داده شده با ویژگی $x - x^۲ \in L$ وجود داشته باشد $e^۲ = e \in R$ که $e - x \in L$. [۲۸]

تعریف ۹.۲. فرض کنید $X \subseteq R$ و $\{A_i | i \in I\}$ خانواده تمام ایده آل های چپ (راست) در R باشد که شامل X هستند. دراین صورت $\bigcap_{i \in I} A_i$ ایده آل چپ (راست) تولید شده به وسیله X نام دارد که با (X) نشان داده می شود. عنصرهای X مولدهای ایده آل (X) نام دارند. هرگاه مجموعه $X = \{x_۱, \dots, x_n\}$ آنگاه ایده آل (X) با $(x_۱, \dots, x_n)$ نموده شده و گوییم با تولید متناهی است. ایده آل(x) تولید شده به وسیله یک عنصر، ایده آل اصلی نامیده می شود. نمادهای دیگر xR عبارتند از (x) و Rx.

تعریف ۱۰.۲. ایده آل چپ (راست)M از حلقه R ماکسیمال گوییم اگر $M \neq R$ یعنی M ایده آل سره R باشد و به ازای هر ایده آل چپ (راست)N که $M \subset N \subset R$، $N = M$ یا $N = R$.

تعریف ۱۱.۲. فرض کنید R حلقه باشد. اشتراک همه ایده آل های ماکسیمال چپ (راست) M در حلقه R رادیکال جیکوبسن R است و با $J(R)$ نمایش می دهند.

تعریف ۱۲.۲. فرض کنید X زیرمجموعه ای از مدول A روی حلقه R باشد، آنگاه اشتراک تمام زیرمدول های A شامل X، زیرمدول تولید شده به وسیله X نام دارد. اگر X متناهی بوده و X مدول A را تولید کند، گوییم A با تولید عنصر متناهی است به عبارت دیگر اگر A مجموعه متناهی مولد داشته باشد آن را متناهی مولد می نامیم.

تعریف ۱۳.۲. فرض کنید $f: A \to B$ یک همریختی مدول ها باشد آنگاه هم هسته f عبارت است از $Coker(f) = B/Im(f)$.

تعریف ۱٤.۲. R- مدول چپ P را پروژکتیو نامیم اگر برای هر R- همریختی پوشای $f: A \longrightarrow B$ که A ، B، R- مدول چپ هستند و هر R- همریختی $g: P \longrightarrow B$، R- همریختی $h: P \longrightarrow A$ وجود داشته باشد به طوری که $foh = g$.

تعریف ۱۵.۲. فرض کنید R و S حلقه باشند، گروه آبلی A یک $R - S$ دو مدول است اگر A یک R- مدول چپ و یک S- مدول راست باشد و $r(as) = (ra)s \ \ \forall s \in S, r \in R, a \in A$.

تعریف ۱٦.۲. زیرمدول G جمعوند مستقیم M است اگر زیرمدولی مانند G' از M وجود داشته باشد که $M = G \oplus G'$.

تعریف ۱۷.۲. فرض کنید R یک حلقه و M یک R- مدول راست (چپ) باشد. M را نیم ساده گوییم هرگاه هر زیرمدول M یک جمعوند مستقیم از M باشد.

تعریف ۱۸.۲. مدول M ویژگی تبادلی دارد اگر برای هر مدول G و هر دو تجزیه

$$G = M' \oplus N = \sum_{i \in I} A_i$$

که $M' \cong M$، وجود داشته باشد زیرمدول های $A_i' \subseteq A_i$ به طوری که

$$G = M' \oplus \sum_{i \in I} A'_i$$

M ویژگی تبادلی متناهی دارد اگر در شرط بالا، مجموعه اندیس گذار I متناهی باشد. [۳۸]

تعریف ۱۹.۲. حلقه تبادلی R معادل است با هر یک از ویژگی های زیر: (در همه ویژگی ها، تعریف چپ و راست متقارن است).

۱. R به عنوان R- مدول، ویژگی تبادلی داشته باشد.

۲. برای عنصر $a \in R$ خودتوانی مانند $e \in Ra$ وجود داشته باشد که $1 - e \in R(1 - a)$.

۳. خودتوان ها بتوانند به پیمانه هر ایده آل ارتقا یابند.

٤. برای عنصر $a \in R$، وجود دارد $e^2 = e \in R$ که $e - a \in R(a - a^2)$. [۲۸] و [۳۸]

تعریف ۲۰.۲. حلقه R بخشی است اگر $R \neq 0$ و $U(R) = R \backslash \{0\}$.

تعریف ۲۱.۲. حلقه R آبلی است اگر هر عنصر خودتوان در R مرکزی باشد.

تعریف ۲۲.۲. حلقه K مرتبط است اگر فقط دارای خودتوان بدیهی باشد. [۲٦]

تعریف ۲۳.۲. حلقه غیرصفر R را حلقه موضعی نامیم اگر تنها یک ایده آل راست (چپ) ماکسیمال داشته باشد.

تعریف ۲٤.۲. حلقه R (فون نیومن) منظم است اگر هر عنصر آن (فون نیومن) منظم باشد یعنی برای هر $a \in R$ وجود داشته باشد $b \in R$ که $aba = a$. [۲۹]