

۱۳۰۷

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده مهندسی مکانیک-گروه ساخت و تولید

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک - ساخت و تولید

بررسی عددی رفتار موج انفجار با محیط‌های واسط متفاوت

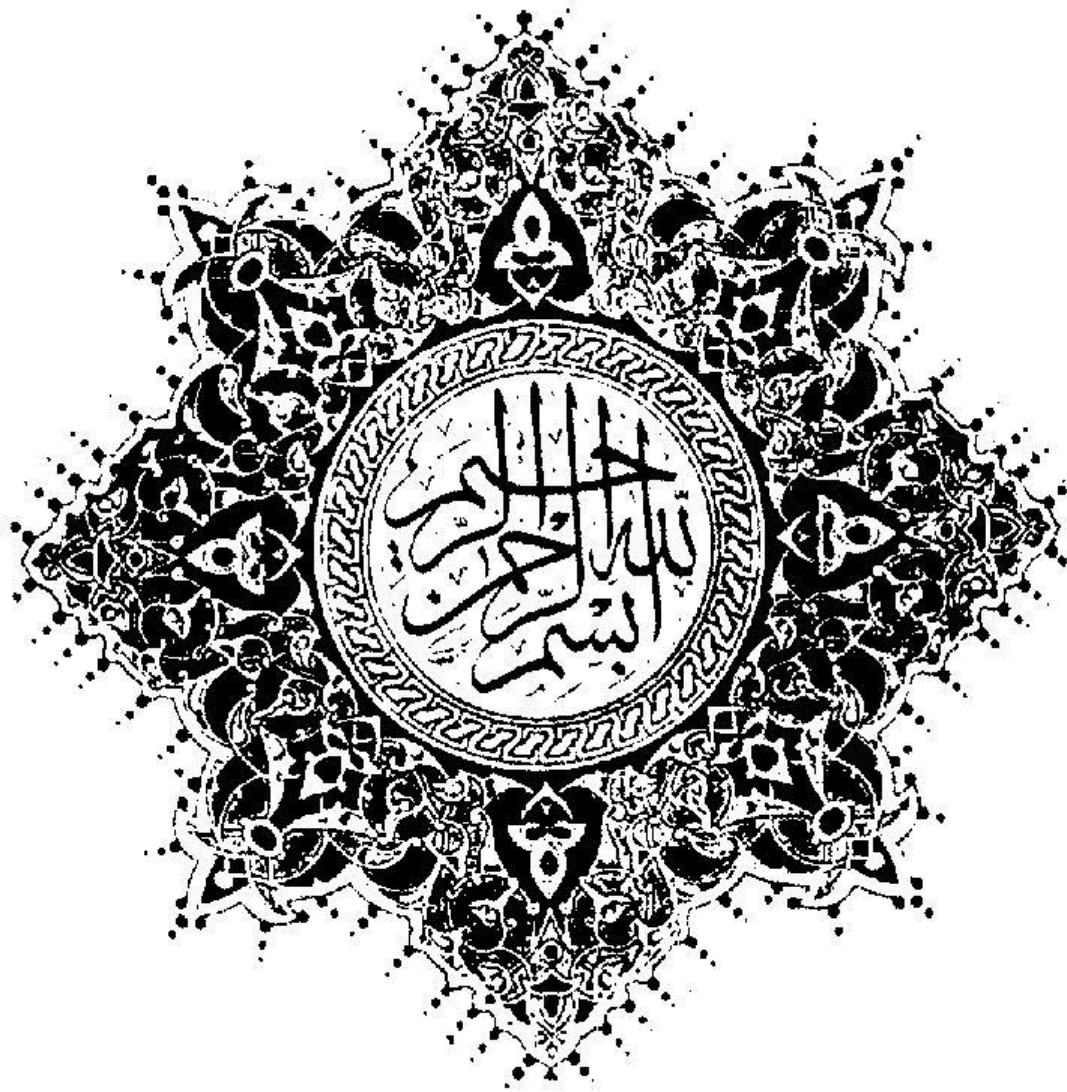
توسط:

وحید موسی بیکی ده آبادی

استاد راهنما:

دکتر جمال زمانی اشنی

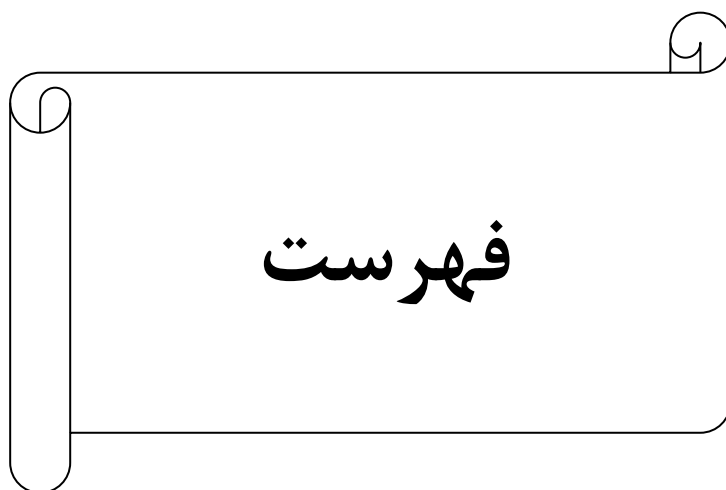
زمستان ۹۱



چکیده:

بررسی حالت‌های واماندگی ورق‌ها و رفتار سازه‌های مقاوم در برابر اثر تخریبی موج حاصل از انفجار به دلیل اهمیت آن در طراحی سازه‌های پایدار در برابر بارگذاری انفجاری، مدت‌ها است که مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است. در این تحقیق، به بررسی و مقایسه انواع روش‌های شبیه‌سازی عددی پرداخته شد و ترکیب دو روش ALE و ConWep از نقطه‌نظر دقت در حل مسائل انفجار با درصد خطای کمتر نسبت به دو روش ALE و ConWep مورد تایید قرار گرفت. با توجه به این که در روش ترکیبی و همچنین روش ConWep، وزن معادل TNT برای مواد منفجره مختلف مورد نیاز می‌باشد، ضریب $1/14$ به عنوان وزن معادل TNT برای ماده منفجره C4 بررسی گردید و با استفاده از نمودار تجربی فشار-زمان و رابطه تئوری فشار موج شوک در هوا، این ضریب با درصد خطای مورد قبول، تایید گردید و نمودار فشار و ایمپالس بر حسب زمان برای دو نوع ماده منفجره TNT و C4 با وزن یکسان مورد بررسی قرار گرفت. جهت انتخاب نوع مدل مادی و نوع المان برای بررسی رفتار سازه در نزدیکی خرج انفجاری، از نتایج تجربی بارگذاری ماده منفجره TNT در فاصله نزدیک به ورق فولاد RHA استفاده و با روش ConWep شبیه‌سازی گردید. مدل مادی الاستیک-پلاستیک با سخت‌شوندگی کینماتیکی، ماکزیمم خیز ورق را با درصد خطای قابل قبول، پیش‌بینی کرد و همچنین، در روش ConWep استفاده از المان‌های SOLID مورد تایید قرار گرفت. در ادامه، با استفاده از شبیه‌سازی عددی، رفتار ورق‌های مربعی کاملاً گیردار تحت بارگذاری انفجاری با محیط‌های واسط پلیمری توسط نرم‌افزار LS-DYNA مورد بررسی قرار گرفت و سعی شد اثر محیط واسط جامد پلیمری از نقطه‌نظر ضخامت و امپدانس بر تغییرشکل ورق تحقیق شود. با مقایسه نتایج تجربی و تحلیل عددی، صحت مدل ساخته شده برای ورق آلومینیومی در زمینه پیش‌بینی میزان و چگونگی تغییرشکل ورق و نیز صحت روش آنالیز انجام شده در زمینه پیش‌بینی حالات واماندگی که ورق در لبه گیردار دچار پارگی می‌شود تایید شد. رفتار موج شوک در محیط‌های واسط جامد با دو جنس پلی‌اتیلن و پلی‌استایرن مطالعه گردید و مشاهده شد سرعت و فشار موج شوک در لایه پلی‌اتیلن که امپدانس بیشتری نسبت به لایه پلی‌استایرن دارد، بیشتر می‌باشد. در گام بعدی، تغییرشکل ورق در حالتی که فضای بین خرج و ورق از پلی‌اتیلن و پلی‌استایرن تشکیل شده است بررسی گردید و مشاهده شد خیز ماندگار ورق با محیط واسط پلی‌اتیلن بیشتر از پلی‌استایرن می‌باشد و با مقایسه نتایج فرم نهایی ورق با محیط واسط هوا، اثر یکنواخت‌کنندگی لایه پلیمری تحقیق گردید. همچنین مشاهده گردید که لایه پلیمری تحت بارگذاری انفجاری به جای اثر یکنواخت‌کنندگی، در حالت‌هایی که ایمپالس نرمالیزه کمتر از $0/5$ باشد، اثر متمرکزکنندگی بارگذاری انفجاری را تشدید می‌کند. با تعیین ناحیه اثر یکنواخت‌کنندگی لایه پلیمری، رابطه‌ای بر اساس ضخامت لایه پلیمر، وزن ماده منفجره، فاصله خرج تا ورق، ابعاد ورق و ضخامت آن بر میزان خیز ماندگار ورق با استفاده از تحلیل واریانس به روش RSM ارائه گردید و تاثیر پارامترهای مختلف بر میزان خیز ماندگار ورق مورد بررسی قرار گرفت.

کلمات کلیدی: بارگذاری انفجاری، پاسخ سازه، محیط واسط پلیمری، روش‌های شبیه‌سازی عددی انفجار، تحلیل واریانس



۱- مقدمه..... ۱

۲- رفتار استاتیکی پوسته‌های استوانه و اثر نرخ کرنش

۱-۲- بررسی رفتار استاتیکی استوانه‌ها..... ۶

۲-۲- رفتار حساسیت به نرخ کرنش در مواد..... ۱۷

۳- آماده سازی نمونه‌ها

مقدمه..... ۲۴

۱-۳- نمونه‌های استوانه مخروط..... ۲۴

۲-۳- نمونه‌های استوانه‌ای..... ۲۹

۴- دستگاه تست هیدرواستاتیک هیدرواستاتیک مخازن

مقدمه..... ۳۴

۱-۴- قابلیت‌های کلی دستگاه تست بارگذاری با نرخ متغیر..... ۳۴

۲-۴- تجهیزات دستگاه..... ۳۸

۳-۴- مدار هیدرولیکی دستگاه..... ۴۱

۴-۴- داده‌برداری دستگاه..... ۴۶

۵-۴- سازه دستگاه (frame)..... ۴۸

۵- نحوه انجام آزمایش

مقدمه..... ۵۱

۱-۵- آزمون‌های انجام شده بر روی مخازن..... ۵۳

۲-۵- نحوه داده‌برداری از دستگاه..... ۵۷

۳-۵- اندازه‌گیری نمونه‌ها..... ۵۹

۶- تحلیل نتایج و نتیجه‌گیری

۱-۶- بررسی رفتار پوسته‌های استوانه‌ای..... ۶۳

۲-۶- بررسی رفتار پوسته‌های استوانه مخروط..... ۸۳

۳-۶- مقایسه رفتار سازه‌های استوانه و استوانه مخروط با شعاع برابر..... ۸۷



مقدمه:

امروزه آزمایشات روی پوسته‌های جدار نازک تحت بارگذاری‌های داخلی و آنالیز رفتار این پوسته‌ها در حالت استاتیکی و شبه‌استاتیکی از اهمیت زیادی برخوردار است. کاربرد فراوان سازه‌های جدار نازک از جنس‌های مختلف در صنایع اتومبیل‌سازی، صنایع هوایی، این اهمیت را بیشتر آشکار می‌سازد. به طور مثال بررسی رفتار مخازن جدار نازک آلومینیوم در صنایع مختلف و پیش‌بینی فشارهای مجاز کاری برای این‌گونه مخازن، این واقعیت را نشان می‌دهد. طراحی و ساخت دستگاه‌های تست بارگذاری مخازن در صنایع با در نظر گرفتن موارد مهمی از قبیل فشار کاری نمونه‌ها، ابعاد، هندسه و اندازه مخازنی که تست روی آنها صورت می‌گیرد و نیز نرخ بارگذاری داخلی انجام می‌شود. مکانیزم نوع بارگذاری در این دستگاه‌ها متفاوت است و اصلی‌ترین نوع بارگذاری، بارگذاری هیدرواستاتیکی بوسیله یک مدار هیدرولیکی است. در این دستگاه فشار کاری سیستم را می‌توان با توجه به فشار کاری المان‌های مدار هیدرولیک در نظر گرفت و تغییر داد. ابعاد مخازن نیز می‌تواند بیانگر ظرفیت ابعادی دستگاه باشد. نکته قابل توجه در این میان، این است که بتوان نرخ بارگذاری را در این دستگاه تغییر داد، در نتیجه رفتار استاتیکی و دینامیکی این مخازن و پوسته‌ها را مورد بررسی قرار داد.

پاسخ پوسته‌های جدار نازک و مخازن در مقابل بارگذاریها با نرخ مختلف، هم توسط طراحان سازه‌های صنعتی و هم کارشناسان امر شکل دهی فلزات، به عنوان پدیده‌ای مهم مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است. در این میان درک تغییر شکل و مکانیزم شکست تحت شرایط بارگذاری اعمال شده به سازه گام مهمی در طراحی یک سازه مستحکم در شرایط مطمئن کاری است. تحقیق و بررسیها انجام شده روی استوانه‌های جدار نازک و پوسته‌ها به دلیل پیچیده تر بودن رفتار آن نسبت به ورقها و تیرها همواره از اهمیت مضاعفی برخوردار است. بارگذاری بر روی سازه‌ها به چند دسته عمده استاتیکی، شبه استاتیکی و دینامیکی در یک رنج وسیع دسته بندی می شوند. در ابتدا تحلیل رفتار استاتیکی این سازه‌ها باید با منطق درستی همراه باشد تا پیش بینی درستی از رفتار سازه در حالت بارگذاری دینامیکی ارائه شود. در زمینه رفتار دینامیکی سازه‌ها فاکتورهای مهمی از جمله به دست آوردن مقاومت سازه و زمان بارگذاری

هدف اصلی می باشد. حاصل کار محققین در این زمینه را می توان در کتاب ارزشمندی که توسط Jones [1] جمع آوری گشته است یافت. برای افزایش دقت پیش بینی های تحلیلی از رفتار سازه باید پدیده حساسیت به نرخ کرنش^۱ و اثر آن بر رفتار ماده و سازه مورد توجه قرار گیرد. رفتار مکانیکی مواد در هنگام بارگذاری تابعی از نرخ بارگذاری وارد بر آنها می باشد. برای وارد کردن اثر نرخ کرنش بر رفتار دینامیکی مدل های مختلفی ارائه شده اند، که از آن جمله می توان به مدل های رایج تر Cowper-Symonds ، Johnson-Cook [2] و Zirelli-Armstrong اشاره کرد. در این تحقیق برای وارد کردن اثر نرخ کرنش بر رفتار دینامیکی و محاسبه تنش دینامیکی از مدل Cowper-Symonds استفاده شده است. در تحقیق پیش رو در ابتدا مطالعاتی بر روی کارهای انجام شده در زمینه رفتار سازه ها و مواد تحت بارگذاریهای مختلف، همچنین ابزارها و امکانات مورد استفاده جهت انجام بارگذاری و نتایج حاصل از این تحقیقات صورت پذیرفت. در ادامه با انجام کارهای تجربی با بارگذاری استاتیکی، شبه استاتیکی و دینامیکی حد میانه بر روی سازه های جدار نازک سعی بر آن بوده است که بتوان مشاهدات کاملی، در محدوده وسیعی از بارگذاری و نرخ کرنش بر روی سازه ها، به دست آورد. به همین منظور طراحی و ساخت دستگاه بارگذاری پوسته ها و مخازن در دستور کار قرار گرفت. دستگاه مذکور که با یک سیستم هیدرولیکی کار می کند، قابلیت اعمال بارگذاری داخلی مخازن جدار نازک را تا حد فشار 300bar(30Mpa) و نیز داده برداری در حالت استاتیک و دینامیک را دارا می باشد. با ساخت دستگاه بارگذاری کار ساخت و آماده سازی نمونه ها جهت تست انجام شد. نمونه ها به صورت پوسته های استوانه ای و استوانه مخروط از جنس آلومینیوم آلیاژی، ساخته و آماده سازی گردید. در ادامه کار این پایان نامه آزمایشها و بارگذاری ها با نرخ متفاوت بر روی سازه ها اعمال شد و نتایج ثبت گردید. با بدست آوردن نتایج، کار تحلیل و بررسی آنها انجام شد که در این بخش نتایج به کمک تحلیلها و تئوریهای موجود بررسی گردید. نتیجه تحلیل و بررسی بر روی سازه ها استخراج و ارائه مدل های نیمه تجربی در مورد رفتار استاتیکی پوسته های استوانه ای، اثر مقیاس بندی سازه ها در پیش بینی رفتار آنها، رابطه کرنش

^۱ Strain Rate Sensitivity

شکست سازه با تغییرات نرخ کرنش و مهمتر از همه رابطه اثر نرخ کرنش در افزایش استحکام سازه (افزایش تنش جریان) بود. در پایان نتایج حاصل از این آزمایشات، با نتایج آزمایشهای بارگذاری دینامیکی انفجار بر روی همین سازه ها که به صورت همزمان توسط همکاران گروه در آزمایشگاه شکل دهی نوین دانشکده مکانیک دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی انجام شده بود، مقایسه گردید.

2- رفتار استاتیکی پوسته های

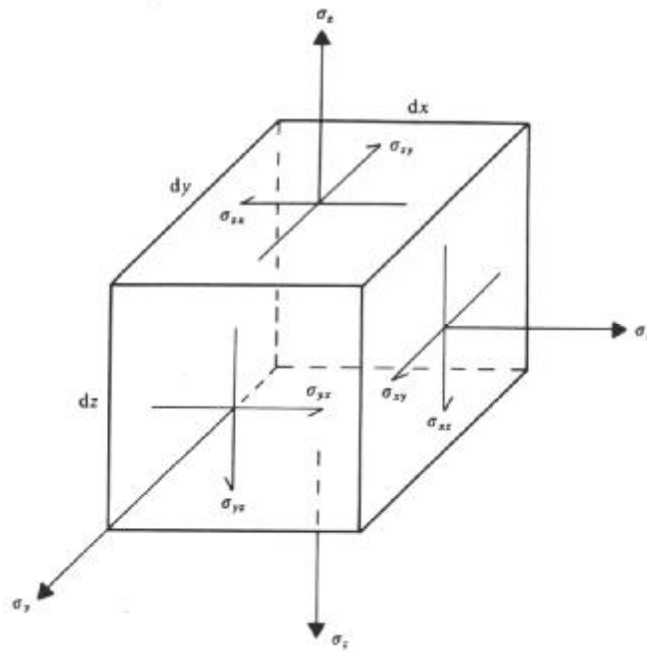
استوانه ای و اثر نرخ کرنش

1-2- بررسی رفتار استاتیکی استوانه ها

محدوده وسیعی از مواد شکل پذیر، که در سازه های مهندسی به کار می روند، پس از تسلیم اولیه، ظرفیت قابل توجهی را در خود به صورت ذخیره نگاه می دارند. به عنوان مثال، کرنش تسلیم تک محوری فولاد نرم حدوداً ۰,۰۰۱ است، حال آنکه این ماده در کرنش مهندسی حدود ۰,۳ می شکنند. می توان این مقاومت ذخیره شده را در طراحی سازه های مهندسی و برای بدست آوردن ضریب اطمینان واقعی جسم، با برآورد بار حد سازه، مورد استفاده قرار داد. در واقع به همین علت است که رفتار پلاستیکی سازه ها تحت بار استاتیکی و هم چنین دینامیکی به صورت گسترده ای مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است. با توجه به ضرورت درک روابط استاتیک- پلاستیک به منظور ارزیابی بهتر سازه در این بخش به تفصیل در مورد رفتار سازه در محدوده استاتیک- پلاستیک بحث شده است. نظر به این که روند جریان در پوسته ها، توسط معیار های تسلیم چند محوری کنترل می گردد، انتظار می رود که روند تحلیل تئوری مربوطه پیچیده تر از ورق ها و تیر ها باشد. [۱]

1-1-2- تنش ها و کرنش های تعمیم یافته

ساده سازی های انجام شده برای تیرها اکنون برای دستیابی به روابط شکست پلاستیک ورق ها و پوسته ها، گسترش بیشتری می یابند. بنابراین، ضخامت سازه های ورقی یا پوسته ای در مقایسه با سایر ابعاد ورق یا پوسته در صفحه میانی آن، ناچیز انگاشته می شود. با این حساب، تنش S_z ، نشان داده شده در شکل (۱-۲) که تنش عمود بر صفحه میانی (به عبارتی در راستای ضخامت ورق) می باشد، ناچیز فرض می شود. هم چنین، مشابه تئوری الاستیک ورق ها و پوسته ها، همه تنش ها (شکل ۱-۲) به وسیله ۱۰ منتجه تنش یا به عبارتی تنش های تعمیم یافته نمایش داده می شوند که عبارتند از:



شکل (۱-۲) : تنش ها در یک المان سه بعدی از پوسته [۱]

$$N_X = \int_{-H/2}^{H/2} s_X dZ \quad (۱-۲)$$

$$N_Y = \int_{-H/2}^{H/2} s_Y dZ \quad (۲-۲)$$

$$N_{XY} = N_{YX} = \int_{-H/2}^{H/2} s_{XY} dZ \quad (۳-۲)$$

$$M_X = \int_{-H/2}^{H/2} s_X Z dZ \quad (۴-۲)$$

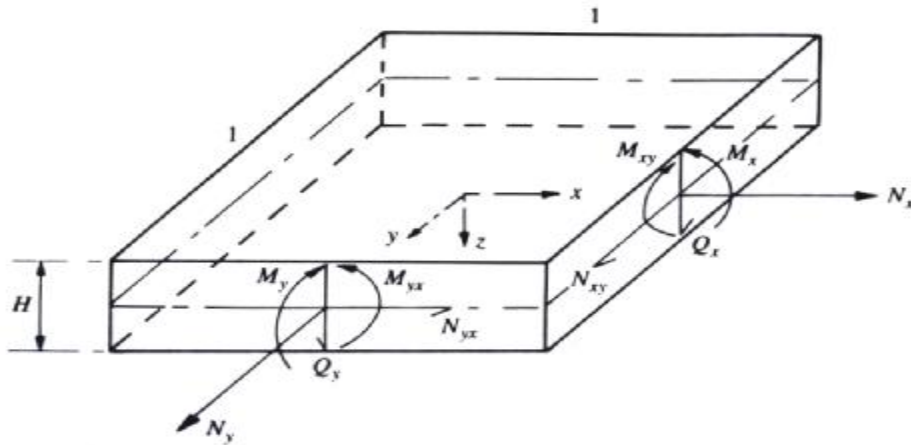
$$M_Y = \int_{-H/2}^{H/2} s_Y Z dZ \quad (۵-۲)$$

$$M_{XY} = M_{YX} = \int_{-H/2}^{H/2} s_{XY} Z dZ \quad (۶-۲)$$

$$Q_X = \int_{-H/2}^{H/2} s_{XZ} dZ \quad (۷-۲)$$

$$Q_Y = \int_{-H/2}^{H/2} s_{YZ} dZ \quad (۸-۲)$$

قابل ذکر است که مولفه های N ، M و Q به ازای واحد طول تعریف شده اند. تنشهای ذکر شده بر المان در شکل (۲-۲) آورده شده است



شکل (۲-۲) : تنش های کلی در یک المان سه بعدی

در روابط (۱-۲) تا (۸-۲)، ضخامت یکنواخت ورق می باشد.

2-1-2- تئوری های شکست استاتیک-پلاستیک

برای تخمین فشار شکست^۱ سازه تحت هر سیستمی از بارهای استاتیک، تئوری های مرزی (حد بالا و حد پائین) بوجود آمده اند. تئوری های حد بالا و حد پائین که شرایط استاتیک (تعادل) را بیان می کند، در ادامه آورده شده اند این تئوری ها در واقع بیان کننده یک محدوده برابرخداد بار فرو ریزش سازه می باشد .

تئوری حد بالا^۲

باتوجه به تمامی بارهای خارجی اعمال شده بر سازه، بیشترین باری که منطبق بر سطح تسلیم

^۱ منظور از فشار شکست (Collapse Pressure) در اینجا، فشاری است که در آن کل مقطع وارد حالت پلاستیک می شود.

مربعی که در ادامه به آن اشاره می شود را به عنوان حد بالا شکست (P^U) در نظر گرفته می شود. این بار

سازه را در آستانه تسلیم (تمام سطح سازه وارد ناحیه پلاستیک شود) قرار می دهد.

تئوری حد پائین^۱

چنانچه بتوان سیستمی از تنش های کلی در سازه ای که با بارهای خارجی اعمالی در تعادل است، به گونه ای یافت که در هیچ جا شرایط تسلیم را ارضا نکند، سازه دچار شکست نشده است، یا این که در آستانه شکست قرار دارد. این سیستم از تنشهای در واقع منطبق بر 0,75 سطح تسلیم مربعی حد بالا قرار می گیرد که این حد، حد پایین شکست (P^L) بیان می شود.

2-1-3- معادلات اساسی برای پوسته های استوانه ای

اگر یک المان استوانه ای جدار نازک مفروض، مانند آنچه که در شکل (۲-۲) نمایش داده شده است، در راستای محور خود تحت بار گذاری نباشد؛ (مثلاً $N_x = 0$)، آنگاه معادله تعادل نیروها و ممان برای این المان

پوسته ای به شرح زیر خواهد بود:

$$R \frac{dQ_x}{dx} + N_q - RP = 0 \quad (۹-۲)$$

$$\frac{dM_x}{dx} - Q_x = 0 \quad (۱۰-۲)$$

که در این معادلات P توزیع فشار متقارن محوری است.

در این حالت میزان تغییرات انحنا در جهت X و محیطی سطح میانی عبارتند از :

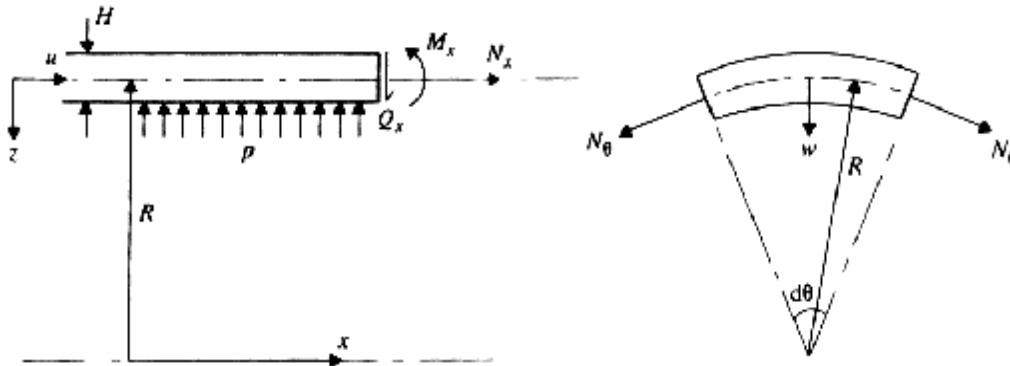
^۱ Lower Bound Theorem

فصل دوم: رفتار استاتیکی پوسته های استوانه ای و اثر نرخ کرنش

$$k_X = \frac{-d^2 w}{dx^2} \quad (11-2)$$

$$k_q = \frac{1}{R} - \frac{1}{R-w} \equiv \frac{-w}{R^2} \quad (12-2)$$

که در آن w میزان جابه جایی عرضی سطح میانی پوسته می باشد (شکل ۳-۲). معادلات (۱۰-۲) تا شکل (۱۲-۲) برای پوسته های استوانه ای از هر جنسی برقرار می باشند



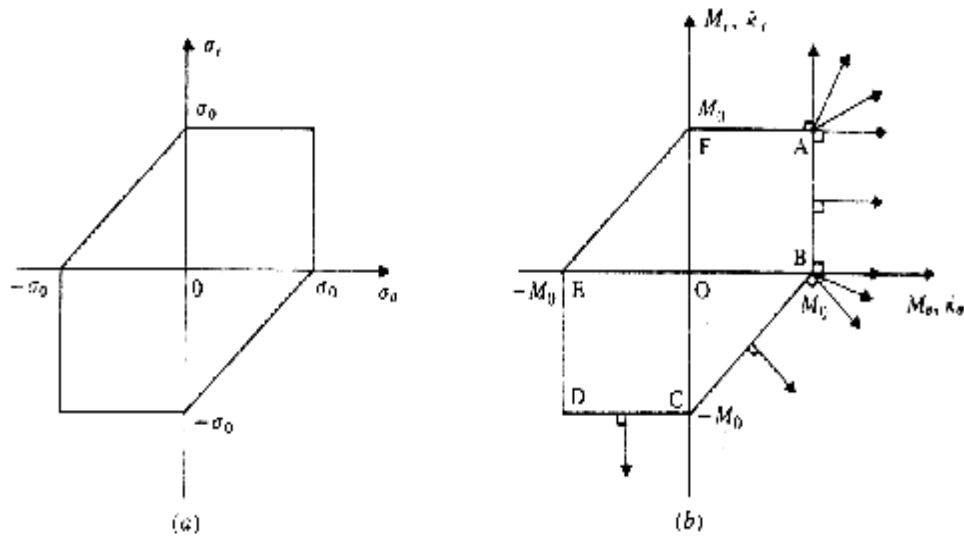
شکل (۳-۲): علامت گذاری های مربوط به یک پوسته استوانه ای

$$M_0 = s_0 H^2 / 4$$

پر واضح است که Q_x, M_x, N_q تنها تنش های تعمیم یافته ای هستند که در معادلات تعادل ظاهر شده اند. هم چنین نیروی برشی عرضی Q_x هنگامی که کرنش برشی متناظر با آن نادیده گرفته می شود، در معادلات ظاهر نمی شوند. لذا نگر داشتن دو تنش تعمیم یافته M_x, N_q هنگام ایجاد شرایط تسلیم برای پوسته استوانه ای که تحت فشار متقارن محوری قرار دارد و در جهت طولی بارگذاری نشده است، لازم به نظر می رسد. اگر این پوسته از ماده ای صلب و کاملاً پلاستیک^۱ تشکیل شده باشد از معیار ترسکا در حالت پلاستیک پیروی کند. خواهیم داشت (شکل ۴-۲):

$$\text{Max}\{|s_x|, |s_q|, |s_x - s_q|\} \leq s_0 \quad (13-2)$$

^۱ Rigid perfectly plastic



شکل (۲-۴): (a) معیار ترسکا برای حالت تنش دو بعدی - (b) شرایط تسلیم ترسکا برای ممان های اصلی

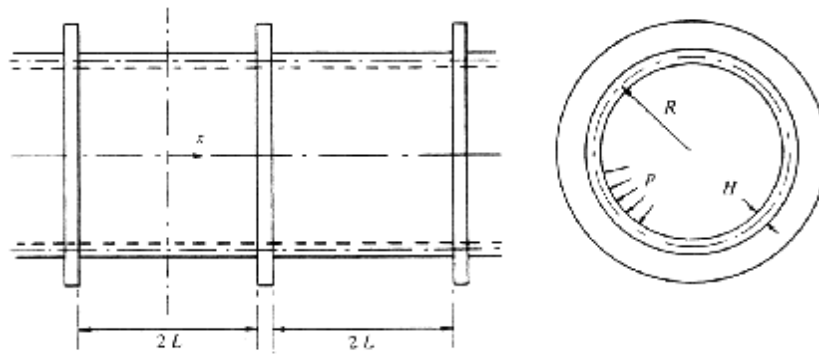
با به کارگیری قاعده تعامد

در مجموع آنالیزهای مختلفی برای تئوری مربوط به شکست استوانه بیان شده است که هر کدام از آنها مسئله را با پیچیدگی مواجه می کند. آنالیز تئوری مربوط به فشار استاتیکی داخلی منجر به شکست در پوسته های استوانه ای، به کمک تئوری تسلیم مربعی در شکل (۳-۶) که در ادامه گفته خواهد شد، ساده سازی شده است؛ این منحنی به عنوان یک منحنی تراکنش محدود که محیط بر منحنی اصلی است، می باشد. این منحنی هنگامی که در مقیاس ۰,۷۵ رسم شود، چنانچه در این شکل دیده می شود، محاط در منحنی حقیقی می باشد.

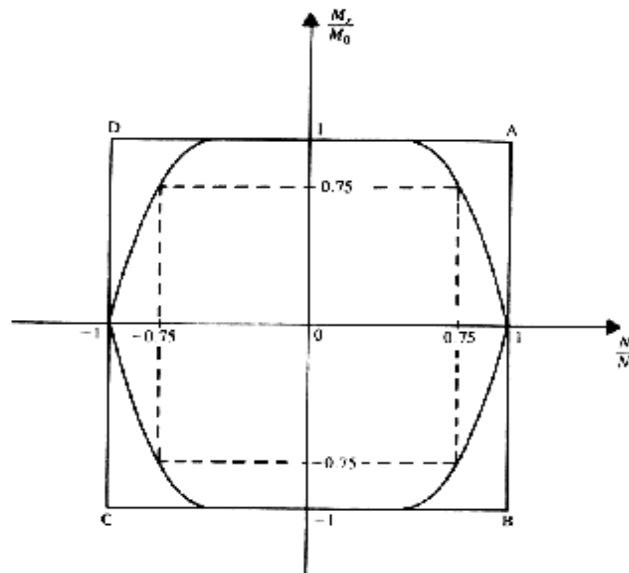
2-1-1-4 فشار شکست استاتیکی یک پوسته استوانه ای بلند

در این بخش حالت خاصی از پوسته های استوانه ای بلند بررسی می شود که در آن پوسته به وسیله رینگ های (حلقه های) کاملاً صلب که به فاصله مساوی در طول پوسته استوانه ای قرار گرفته اند؛ تقویت شده است.

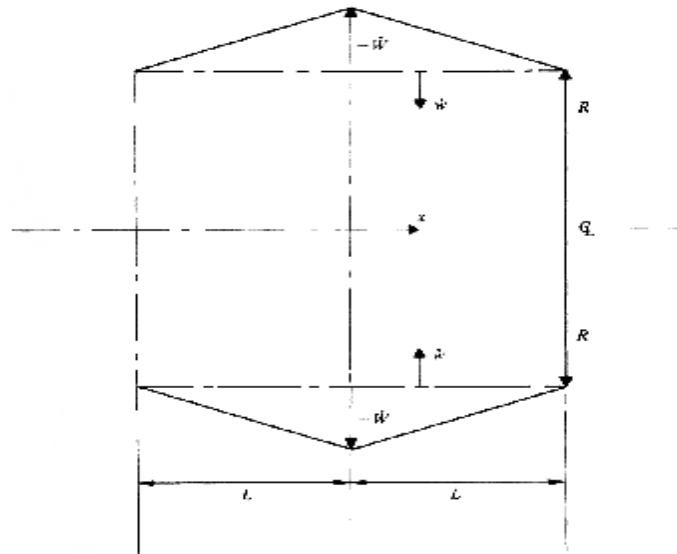
است و تحت اثر توزیع یکنواخت فشار داخلی، قرار گرفته است؛ شکل (۵-۲). لذا ضروریست که فقط یک تکه بررسی شود که ممکن است به عنوان یک پوسته استوانه‌ای کوتاه به طول $(2L)$ لحاظ شود که از هر دو سر گیردار است. فشار شکست استاتیکی این پوسته خاص وقتی که ماده صلب و کاملاً پلاستیک است و از سطح تسلیم مربعی بر هم کنش محدود شکل (۶-۲) پیروی می‌کند، در این قسمت مورد بررسی قرار می‌گیرد.



شکل (۵-۲) پوسته استوانه تقویت شده به وسیله حلقه های صلب تحت اثر فشار داخلی



شکل (۶-۲) منحنی های تسلیم کرانه ای اندر کنش (مربعی) برای اثر ترکیبی M_x, N_q ،
 (————) منحنی دقیق، منحنی محیطی ABCD و (-----) محاطی



شکل (۷-۲) میدان سرعت عرضی متقارن محوری (همراه با شکست استاتیک - پلاستیک)

برای پوسته استوانه ای تحت فشار داخلی p ، که در دو سر دهانه ای به طول $2L$ گیر دار است

به نظر می‌رسد که مد شکست، به مانند شکل (۷-۲) موجه باشد. پوسته با یک تغییر مکان شعاعی، تغییر شکل می‌دهد که مقدار $N_q = N_0$ را در فاصله $-L \leq X \leq L$ ایجاد می‌کند. لذا مفصل پلاستیک محیطی (واقع بر روی محیط دایره‌ای مقطع استوانه) در نقاط $x=L$ و $x=-L$ در نقطه A از شکل (۶-۲) قرار دارند. در حالی که مفصل پلاستیک ایجاد شده در $x=0$ در نقطه B از شکل (۶-۲) قرار می‌گیرد. مطلب فوق، این نکته را فوراً مطرح می‌کند که نمایه تنش AB ، منحنی حاکم بر رفتار پوسته در ناحیه $0 \leq X \leq L$ می‌باشد و یا.

$$N_q = N_0 \quad , \quad -M_0 \leq M_x \leq M_0 \quad (۱۴-۲)$$

5-1-2- محاسبات تئوری حد بالا و حد پایین

اگر سطح تسلیم مربع ABCD در شکل (۶-۲) در نظر گرفته شود، آنگاه شکست یا باید تحت

حالت زیر رخ دهد (یعنی خطوط AD یا BC):

$$-N_0 \leq N_q \leq N_0, M_x = M_0$$

یا تحت شرایط (یعنی خطوط AB یا DC):

$$N_q = N_0, -M_0 \leq M_x \leq M_0$$

برای این مساله خاص همان طور که از هندسه مساله مشخص است ممان در کل طول استوانه متغیر خواهد بود، پس می توان خط AB را به عنوان معیار شکست در نظر گرفت.

از آنجا که مسئله مورد بررسی نسبت به صفحه عمودی گذرا از $x=0$ ، مطابق شکل (۲-۵)، متقارن است، لذا قسمت $-L \leq X \leq 0$ را بررسی نمی کنیم. با ترکیب معادلات (۲-۹) و (۲-۱۰) داریم:

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} + \frac{N_q}{R} = p \quad (۲-۱۵)$$

که به صورت زیر در می آید:

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} = p - \frac{N_0}{R} \quad (۲-۱۶)$$

با حل معادله دیفرانسیل فوق داریم:

$$M_x = \left(p - \frac{N_0}{R} \right) \frac{X^2}{2} + C_1 X - M_0 \quad (۲-۱۷)$$

که از $(M_x = M_0 \text{ at } X = 0)$ در آن استفاده شده است.

هم چنین از معادله (۲-۱۰) واضح است که: $\left(\frac{dM_x}{dx} = 0 \text{ at } X = 0 \right)$ زیرا که مقدار Q_x در صفحه

تقارن برابر با صفر است. بنابراین با قرار دادن شرط فوق در (۲-۲۰) داریم

$$M_x = \left(p - \frac{N_0}{R} \right) \frac{X^2}{2} - M_0 \quad (۲-۱۸)$$

بنابراین با ملاحظه اینکه عبارت (۲-۲۱) نتیجه می دهد که در هر دو سر گیردار داریم: $(M_x = M_0)$ و با

توجه به تقارن نسبت به صفحه گذرا از $x=Q$ با قرار دادن $(M_x = M_0 \text{ at } X = L)$ در معادله (۲-۲۱)

داریم:

$$M_0 = \left(p_c - \frac{N_0}{R} \right) \frac{L^2}{2} - M_0 \quad (۱۹-۲)$$

$$\Rightarrow p_c = \frac{4M_0}{L^2} + \frac{N_0}{R}$$

به یاد داریم که:

$$M_0 = s_0 \frac{H^2}{4} , \quad N_0 = s_0 H$$

برای بدست آوردن حد بالا (P^U):

$$p_c = \frac{N_0}{R} \left(1 + \frac{RH}{L^2} \right) \quad (۲۰-۲)$$

که در آن فاکتور هندسی استوانه ها به صورت زیر معرفی شده است:

$$w^2 = \frac{2L^2}{RH} \quad (۲۱-۲)$$

و در نهایت تئوری شکست در حد بالا به صورت زیر بیان می شود:

$$p_c = \frac{N_0}{R} \left(1 + \frac{2}{w^2} \right) \quad (۲۲-۲)$$

تئوری حد پایین (P^L) با توجه به سطح تسلیم مربعی ۰,۷۵، شکل (۳-۶):

$$p_c = 0.75 \frac{N_0}{R} \left(1 + \frac{2}{w^2} \right) \quad (۲۳-۲)$$

در نتیجه برای پیشبینی شکست پوسته های استوانه ای، به وسیله معادلات (۲۴-۲) و (۲۵-۲) بیان شد

که مقدار دقیق فشار شکست یک پوسته استوانه ای تقویت شده به وسیله حلقه های صلب که در فواصل

مساوی قرار گرفته اند، بین دو مقدار کمینه و بیشینه محدود می شود؛ به عبارتی

$$0.75 \frac{N_0}{R} \left(1 + \frac{2}{w^2} \right) < exact \ collapse \ pressure < \frac{N_0}{R} \left(1 + \frac{2}{w^2} \right) \quad (۲۴-۲)$$