دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات)

عنوان

تحلیل پوششی داده‌ها با داده‌های نامطلوب

تدوین

محمود مهدیلوزاد

استاد راهنما

دکتر غلامرضا جهانشاهلو

بهمن ۱۳۸۹

تقدیم به

پدر مهربان

و

مادر فداکارم

تقدیر وتشکر

حمد و سپاس خداوند بزرگ مرتبه و عالم را که هرچه آموختەم و خواهم آموخت، قطره‌ای از اقیانوس بیکران علم و معرفت اوست.

اعضای محترم خانواده‌ام خصوصاً پدر و مادرم، در تمامی مراحل زندگی یار و یاور من بوده‌اند و برای رسیدن من به این مرحله زحمات زیادی کشیده‌اند. از زحمات بی‌شائبه آنها که فراتر از آن چیزی بود که می‌توانست باشد، تشکر و قدردانی می‌کنم.

از جناب آقای دکتر غلامرضا جهانشاهلو که در طول این دوره به من کمک‌های زیادی کردند و درس‌های فراوانی را چه در زمینه‌ی علمی و چه اخلاقی از ایشان فرا گرفتم، نهایت سپاس‌گزاری را دارم.

از جناب آقای دکتر سعید محرابیان که در طول این دوره به من کمک‌های زیادی کردند و زحمت داوری این پایان‌نامه را بر عهده داشتند، تشکر و قدردانی می‌کنم.

از جناب آقای دکتر فرهاد حسین‌زاده لطفی که داوری این پایان‌نامه را تقبل کردند، سپاس‌گزارم.

از جناب آقای اسرافیل رشدی که در طول این دوره به من کمک‌های زیادی کردند و زحمات فراوانی متقبل شدند، تشکر و قدردانی می‌کنم.

از تمامی دوستانم که در طول این دوره و نگارش پایان‌نامه به من کمک‌های زیادی کردند مخصوصاً جناب آقایان، مصطفی داوطلب، رامین رمضانی، مجید دهقان، یاسر جلیلیان، علی جمشیدی، اسلام مرادی، حسن عسکری، مجتبی مصطفایی و رضا سیلاوی تشکر و قدردانی می‌کنم.

چکیده

تحلیل پوششی داده‌ها یک روش بر پایه‌ی برنامه‌ریزی ریاضی برای ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده با چند ورودی و چند خروجی است. در مدل‌های استاندارد DEA (شعاعی و غیر شعاعی) با کاهش ورودی یا افزایش خروجی، واحد تصمیم‌گیرنده‌ی تحت ارزیابی روی مرز کارا تصویر می‌شود. اگر در یک تکنولوژی تولید ورودی یا خروجی نامطلوب داشته باشیم، بایستی میزان این ورودی‌ها یا خروجی‌ها به‌ترتیب افزایش و کاهش یابند. ازاین‌رو نتایج حاصل از مدل‌های استاندارد DEA، اندازه‌ی کارایی یک واحد تصمیم‌گیرنده را به‌درستی منعکس نمی‌کنند. با در نظر گرفتن متون موجود در این زمینه روش‌های گوناگون شرکت دادن خروجی‌های نامطلوب در مدل‌های DEA را می‌توان به دو دسته‌ی کلی روش‌های مستقیم و غیرمستقیم تقسیم‌بندی نمود. روش‌های مستقیم از مقادیر اصلی خروجی‌های نامطلوب استفاده می‌کنند اما اصول مربوط به ساختار مجموعه‌ی تکنولوژی را تغییر می‌دهند. در عوض روش‌های غیرمسیقیم مقادیر اصلی خروجی‌های نامطلوب را با استفاده از یک تابع اکیداً نزولی تغییر می‌دهند. در این پایان‌نامه روش‌های مستقیم موجود را با توجه به نوع اصل امکان‌پذیری فرض‌شده برای خروجی‌های نامطلوب به پنج دسته‌ی: روش‌های هذلولوی، تابع فاصله‌ی خروجی جهت‌دار و مدل‌های uo، Iuo، Nuo با فرض اصل امکان‌پذیری ضعیف، روش INP با فرض اصل امکان‌پذیری قوی توسیع‌یافته و روش یانگ با فرض اصل امکان‌پذیری ضعیف یا قوی توسیع‌یافته بر حسب ماهیت تکنیکی خروجی‌های نامطلوب، تقسیم‌بندی نموده‌ایم. هم‌چنین انواع تکنولوژی‌های DEA محیطی با بازده به مقیاس‌های ثابت، متغیر و غیرافزایشی تحت فرض اصل امکان‌پذیری ضعیف خروجی‌های نامطلوب را بررسی نموده‌ایم و سپس با بسط آن‌ها مجموعه‌ی تکنولوژی‌های جدیدی را با بازده به مقیاس دلخواه تحت فرض اصل امکان‌پذیری ضعیف یا قوی توسیع‌یافته بر حسب ماهیت تکنیکی خروجی‌های نامطلوب ارائه نموده‌ایم. روش‌های غیرمستقیم برای شرکت دادن خروجی‌های نامطلوب عبارتند از: ADD، $TR\beta$ و MLT در پایان به محاسبه‌ی اندازه‌ی کارایی محیطی با استفاده از مدل‌هایی که بر مبنای متغیرهای کمکی هستند، پرداخته‌ایم.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، کارایی، داده‌های نامطلوب، بازده به مقیاس، تکنولوژی DEA محیطی، تابع فاصله‌ی خروجی جهت‌دار.

رده‌بندی موضوعی ریاضی ۲۰۱۰: ۹۱B۷۶، ۹۰B۳۰، ۹۰B۵۰، ۹۰Cxx، ۹۷M۴۰.

فهرست مطالب

پیش‌گفتار ..... أ

فصل اول: **تعاریف و مفاهیم اولیه** DEA ۱

۱-۱ مقدمه ۱

۱-۲ واحد تصمیم گیرنده ۲

۱-۳ کارایی ۲

۱-۴ تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) ۳

۱-۵ مجموعه‌ی امکان تولید (PPS) ٤

۱-۶ مدل CCR ۵

۱-۷ مدل BCC ۱۵

۱-۸ مدل جمعی (ADD) ۱۹

۱-۸-۱ تفسیری از مدل جمعی ۲۰

۱-۹ مدل SBM ۲۱

۱-۹-۱ تعریف SBM ۲۱

۱-۹-۲ تفسیری از SBM ۲۲

۱-۹-۳ حل مسئله‌ی SBM ۲۲

۱-۹-٤ دوآل SBM به عنوان ماکزیمم‌سازی سود ۲۳

۱-۹-۵ مدل SBM وزن‌دار شده ۲٤

۱-۱۰ پایایی ۲٤

۱-۱۱ پایداری ۲۵

فصل دوم: **شرکت دادن خروجی‌های نامطلوب در مدل‌های** DEA **با روش‌های مستقیم** ۲۶

۲-۱ مقدمه ۲۶

۲-۲ روش‌های مستقیم با فرض امکان‌پذیری ضعیف خروجی‌های نامطلوب ۲۷

۲-۲-۱ روش هذلولوی ۲۷

۲-۲-۱-۱ اندازه‌های کارایی خروجی هذلولوی ۳۱
۲-۲-۱-۱ اندازه‌های کارایی بهره‌وری هذلولوی اصلاح شده و معمولی ۳۵
۲-۲-۲ روش تابع فاصله‌ی خروجی جهت‌دار ۳۶
Nuo، Iuo، uo
۲-۲-٤ تکنولوژی DEA محیطی با بازده به مقیاس متغیر ٤۶
۲-۲-۵ تکنولوژی DEA محیطی با بازده به مقیاس غیرافزایشی ۵۱
۲-۲-۶ تکنولوژی DEA محیطی با بازده به مقیاس غیرکاهشی ۵۲
۲-۲-۷ تکنولوژی DEA محیطی با بازده به مقیاس دلخواه ۵۳
۲-۳ روش‌های مستقیم با فرض امکان‌پذیری قوی توسیع یافته خروجی‌های نامطلوب ۵۵
۲-۳-۱ در نظر گرفتن خروجی‌های نامطلوب به‌صورت ورودی‌ها (INP) ۵۵
۲-۴ روش‌های مستقیم با فرض امکان‌پذیری قوی توسیع یافته و ضعیف خروجی های نامطلوب برحسب ماهیت تکنیکی‌شان ۶۰
۲-۴-۱ روش یانگ: ۶۰
۲-۴-۲ تکنولوژی $T^{w\&s}$ با بازده به مقیاس دلخواه: ۶۲
فصل سوم: **شرکت دادن خروجی‌های نامطلوب در مدل‌های DEA با روش های غیرمستقیم** ۶۴
۳-۱ مقدمه ۶۴
۳-۲ روش معکوس جمعی $[ADD]$: ۶۵
۳-۲-۱ اندازه‌های کارایی ناجداساز: ۶۵
۳-۳ روش $[TR\beta]$: ۶۹
۳-۴ روش معکوس حاصل‌ضربی $[MLT]$: ۶۹
فصل چهارم: **اندازه‌های مبتنی بر متغیرهای کمکی با وجود خروجی های نامطلوب** ۷۰
۴-۱ مقدمه ۷۰
۴-۲ مدل USBM با خروجی‌های نامطلوب ۷۱
۴-۲-۱ تعابیر اقتصادی: ۷۲
۴-۲-۲ بازده به مقیاس: ۷۳
۴-۲-۳ اعمال وزن بر ورودی‌ها و/یا خروجی‌ها: ۷۴
۴-۳ خروجی‌های مطلوب و نامطلوب جداناپذیر: ۷۴

۴-۴ اندازه‌های کارایی $SBEI_1$ و $SBEI_2$ ۷۶
۴-۵ مدل SBM بر مبنای تکنولوژی DEA محیطی با بازده به مقیاس متغیر ۸۰
مراجع ۸۲
واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی ۸۷
واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی ۹۵

پیش‌گفتار

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) از مسائل برنامه‌ریزی خطی استفاده می‌کند تا کارایی و ناکارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده‌ی متجانس با چند ورودی وچند خروجی را ارزیابی کند. DEA مرز کارا را مشخص می‌کند و سپس کارایی DMUها را با افزایش سطح خروجی یا کاهش سطح ورودی بهبود می‌بخشد. اما ممکن است هردو فاکتور ورودی و خروجی نامطلوب[۱] (بد) و مطلوب[۲] (خوب) وجود داشته باشند.

نمونه‌هایی از خروجی‌های نامطلوب عبارتند از: گازهای گلخانه ای تولیدی صنایع، صدا، ضایعات، پرداخت مالیات در مراکز تجاری و... . نمونه‌هایی از خروجی‌های مطلوب عبارتند از: سود حاصله، تعداد مشتری‌ها و. . . .

اگر در تولید ناکارایی وجود داشته باشد، بایستی خروجی‌های نامطلوب کاهش یابند تا ناکارایی را بهبود دهند. یعنی هنگام ارزیابی یک DMU بایستی با خروجی‌های مطلوب و نامطلوب به‌طور متفاوت رفتار کنیم. اما در مدل DEA استاندارد امکان کاهش خروجی‌ها وجود ندارد و تنها ورودی‌ها را می‌توانیم کاهش دهیم (به‌طور مشابه اجازه‌ی افزایش ورودی ها را نداریم و تنها می‌توانیم خروجی‌ها را افزایش دهیم). بنابراین نتایج حاصل از مدل‌های DEA نمی‌تواند فرآیند تولید را به‌درستی منعکس کنند. لذا تکنیک‌های مختلفی ارائه شده اند که خروجی‌های مطلوب و نامطلوب را در فرآیند مدل-سازی در نظر می‌گیرند که در این بخش آن‌ها را بررسی می‌کنیم.

دو کار اساسی که در فرآیند مدل‌سازی بایستی انجام شوند عبارتند از:

۱) در نظر گرفتن خروجی‌های نامطلوب در فرآیند مدل‌سازی همراه با خروجی‌های مطلوب
۲) زمانی‌که خروجی‌های مطلوب افزایش می‌یابند، خروجی‌های نامطلوب بایستی کاهش یابند.

---
۱ *Undesirable*
۲ *Desirable*

به‌طور مشابه ممکن است بعضی از ورودی‌ها نامطلوب باشند و نیاز به افزایش آن‌ها باشد. به عنوان مثال هدف فرآیند بازیافت این است که از ماکزیمم مقدار ورودی زاید (مانند پلاستیک، آهن قراضه و ...) استفاده کند. اساساً به دو علت این ورودی‌ها ماکزیمم می‌شوند:

۱) با ماکزیمم کردن استفاده از این ورودی‌ها می‌توان استفاده از ورودی‌های دیگر را با جایگزینی این ورودی‌ها کاهش داد. با این روش هزینه‌های تولید را می‌توان کاهش داد.
۲) اگر تولیدات زاید خروجی بازیافت شوند، با استفاده از این تولیدات به عنوان ورودی از مشکلات ناشی از دفع و نگرانی‌های محیطی مرتبط با این نوع خروجی‌ها جلوگیری می‌شود.

روش‌های گوناگونی برای شرکت دادن خروجی‌های نامطلوب در مدل‌های DEA وجود دارند. این روش‌ها به دو دسته ی "روش‌های مستقیم" و "روش‌های غیر مستقیم" تقسیم می‌شوند.

۱) روش‌های مستقیم داده‌های خروجی‌های نامطلوب را به‌طور مستقیم در مدل‌های DEA شرکت می‌دهند، اما در عوض اصول مربوط به ساختار مجموعه تکنولوژی را تغییر می‌دهند تا خروجی‌های نامطلوب به‌طور مناسب در نظر گرفته شوند. این روش‌ها هم با توجه به نوع امکان‌پذیری فرض شده برای خروجی‌های نامطلوب به سه دسته تقسیم بندی می‌شوند.
روش‌های مستقیم با فرض اصل امکان‌پذیری ضعیف برای خروجی‌های نامطلوب عبارتند از:
   - ✓ روش هذلولوی
   - ✓ روش تابع فاصله‌ی خروجی جهت‌دار
   - ✓ مدل‌های Nuo، Iuo، uo

روش مستقیم با فرض اصل امکان‌پذیری قوی توسیع‌یافته برای خروجی‌های نامطلوب عبارت است از:
- ✓ در نظر گرفتن خروجی‌های نامطلوب به‌صورت ورودی‌ها و فرض امکان‌پذیری قوی برای آن‌ها که به روش INP معرف است.

روش مستقیم با فرض اصل امکان‌پذیری ضعیف یا قوی توسیع‌یافته برای خروجی‌های نامطلوب بر حسب ماهیت تکنیکی‌شان، عبارت است از:

- ✓ روش یانگ

۲) روش‌های غیرمستقیم (تبدیل داده‌ها) مقادیر خروجی‌های نامطلوب را به‌وسیله تابع نزولی تبدیل می‌کنند به‌طوری‌که داده‌های تبدیل شده می‌توانند به‌صورت خروجی‌های نرمال (مطلوب) در مجموعه‌ی تکنولوژی در نظر گرفته شوند. در این‌صورت با افزایش مقادیر تبدیل

شده، مقادیر خروجی‌های نامطلوب اصلی کاهش می‌یابند. تبدیلاتی که تا کنون مورد استفاده قرار گرفته اند عبارتند از :

- ✓ $f(u) = -u$ که به روش معکوس جمعی (ADD) معروف است.
- ✓ $f(u) = -u + \beta$ که به روش $(TR\beta)$ معروف است.
- ✓ $f(u) = \frac{1}{u}$ که به روش معکوس حاصلضربی (MLT) معروف است.

مروری بر فصل‌ها:

- **فصل اول**

در این فصل تعاریف و مفاهیم اساسی DEA مورد بررسی قرار گرفته است. مدل‌های CCR، BCC، ADD و SBM معرفی شده‌اند و مزایا، اشکالات و خواص هر کدام طی قضایایی بررسی شده است. در ادامه مفهوم بازده به مقیاس و نحوه‌ی اندازه‌گیری آن با مدل‌های BCC، CCR آورده شده است. هم‌چنین در پایان دو مفهوم پایایی و پایداری نیز بررسی شده‌اند.

- **فصل دوم**

در این فصل به بررسی روش‌های مستقیم شرکت دادن خروجی‌های نامطلوب در مدل‌های DEA با توجه به نوع امکان‌پذیری فرض شده برای خروجی‌های نامطلوب پرداخته‌ایم.

ابتدا به بررسی روش هذلولوی پرداخته‌ایم که این روش برای اولین بار در سال **۱۹۹۸** توسط فار و همکاران مطرح شد. بعداً این روش در سال‌های **۱۹۹۹** و **۲۰۰۱** به‌ترتیب توسط چانگ و سپس توسط زویفو و همکاران اصلاح شده است که در این بخش به بررسی آن‌ها پرداخته‌ایم.

مطالب این فصل برگرفته از مقالات زیر است:

- *Fare, R., Grosskopf, S., Lovell, C.A.K., Pasurka, C., 1989. Multilateral Productivity comparisons when some outputs are undesirable: a Nonparametric Approach. Review of Economics and Statistics 71, 90–98.*
- *Chang, C.C., 1999. The nonparametric risk-adjusted efficiency measurement: an application to Taiwan's major rural financial intermediaries. American Journal of Agricultural Economics 81, 902–913.*
- *Zofio, J.L., Prieto, A.M., 2001. Environmental efficiency and Regulatory standards: the case of CO2 emissions from OECD Industries. Resource and Energy Economics 23, 63–83.*

سپس به بررسی روش تابع فاصله‌ی خروجی جهت‌دار پرداخته‌ایم. این روش برای اولین بار در سال **۱۹۹۷** توسط چانگ و همکاران مطرح و سپس در سال‌های **۲۰۰۴** و **۲۰۰۵** به‌ترتیب توسط فار و گروسکف و سپس سیفورد و زو بسط داده شد.

مطالب این فصل برگرفته از مقالات زیر است:

- *Chung, Y.H., Fare, R., Grosskopf, S., 1997. Productivity and undesirable outputs: a directional distance function Approach. Journal of Environmental Management 51 (3), 229–240.*
- *Fare, R., Grosskopf, S., 2004. Modeling undesirable factors in efficiency evaluation: Comment. European Journal of Operational Research 157(1), 242–245.*
- *Seiford, L.M., Zhu, J., 2005. A response to Comments on Modeling Undesirable factors in efficiency evaluation. European Journal of Operational Research 161, 579–581.*

در ادامه مدل‌های Nuo, Iuo, uo بررسی شده‌اند که در سال **۱۹۹۷** توسط تایتکا ارائه شده‌اند و مطالب آن از مقاله‌ی زیر برگرفته شده است:

- *Tyteca, D., 1997.Linear programming models for the measurement of environmental performance of firm's concepts and empirical results .Journal of Productivity Analysis 8,183–197.*

در ادامه به بررسی تکنولوژی‌های DEA محیطی با بازده به مقیاس متغیر و غیر افزایشی پرداخته‌ایم. سپس با استفاده از مطالب این بخش تکنولوژی های جدید DEA محیطی T_{ND}^{w} و T^{w} به‌ترتیب با بازده به مقیاس‌های غیر کاهشی و $L \le 1\lambda \le U$ را مدل‌سازی کرده‌ایم.

مطالب این فصل برگرفته از مقالات زیر است:

- *Kuosmanen, T., 2005. Weak Disposability in Nonparametric productivity analysis with undesirable outputs. American Journal of Agricultural Economics 87:1077–82.*
- *Fare, R., Grosskopf, S., 2008. A Comment on Weak Disposability in Nonparametric Productivity Analysis with Undesirable Outputs. American Journal of Agricultural Economics 91(2):535–538.*
- *Kuosmanen, T., Podinovski, V., 2009 Weak Disposability in Nonparametric Production Analysis: Reply to Fare and Grosskopf, American Journal of Agricultural Economics, 91(2):539–545.*

در ادامه به بررسی روش INP پرداخته‌ایم. این روش برای اولین بار در سال **۱۹۹۹**، توسط لیو و شارپ مطرح شده است.. از دیگر مطالعات صورت گرفته در این زمینه می‌توان به [**۱۶، ۱۸، ۲۱** و **۲۶**] اشاره نمود.

مطالب این فصل برگرفته از مقالات زیر است:

- *Korhonen, P., Luptacik, M., 2004. Eco-efficiency Analysis of Power Plants: An Extension of Data Envelopment Analysis. European Journal of Operational Research 154, 437-446.*
- *Liu, W. B., Meng, W., Li, X.X., Zhang, D.Q., 2010. DEA models with undesirable inputs and outputs. Annals of Operational Research, 173: 177–194.*

در ادامه به بررسی روش یانگ پرداخته‌ایم که مطالب آن برگرفته از مقاله‌ی زیر است:

- *Yang, H., Pollitt, M., 2010. Distinguishing Weak and Strong Disposability among Undesirable Outputs in DEA: The Example of the Environmental Efficiency of Chinese Coal-Fired Power Plants. Energy Policy, doi:10.1016/j.enpol.2010.03.075.*

در پایان این فصل با توجه به روش یانگ، تکنولوژی‌های DEA محیطی ارائه شده را با توجه به این روش بسط می‌دهیم و تکنولوژی‌های جدیدی را ارائه می‌کنیم.

- **فصل سوم**

در این فصل به بررسی روش‌های غیر مستقیم شرکت دادن خروجی‌های نامطلوب در مدل‌های DEA پرداخته‌ایم. مطالب این فصل برگرفته از مقالات زیر است:

- *Scheel, H., 2001. Undesirable Outputs in Efficiency Evaluations. European Journal of Operational Research 132, 400–410.*
- *Seiford, L.M., Zhu, J., 2002. Modeling undesirable factors in efficiency evaluation. European Journal of Operational Research 142, 16–20.*

- **فصل چهارم**

در این فصل به بررسی اندازه‌های کارایی محیطی مبتنی بر متغیرهای کمکی می‌پردازیم.

ابتدا به بررسی مدل USBM می‌پردازیم که اندازه‌ی کارایی با وجود خروجی‌های نامطلوب و مبتنی بر متغیرهای کمکی و بر پایه‌ی تکنولوژی T_c^{INP} است و در سال **۲۰۰۴** توسط تن ارائه شده است.

در سال **۲۰۰۶** تن و همکاران بحث خروجی‌های مطلوب و نامطلوب جداناپذیر را مطرح نموند و مدل قبلی را بسط دادند که این مدل و خواص آن‌را نیز بررسی خواهیم نمود.

در ادامه دو اندازه‌ی کارایی مبتنی بر متغیرهای کمکی را بررسی می‌کنیم که توسط زو و همکاران در سال **۲۰۰۶** برای مدل‌سازی اندازه‌ی محیطی بر پایه‌ی تکنولوژی DEA محیطی T^c ارائه شده‌اند.یکی از این اندازه‌ها یک اندازه‌ی مرکب با قدرت تشخیص بالا برای مدل‌سازی اندازه‌ی محیطی-اقتصادی است و دیگری را می‌توان جهت تخمین تاثیرات تنظیم‌کننده‌های محیطی به‌کار برد.

سپس به بررسی اندازه‌ی کارایی محیطی دیگری می‌پردازیم که مبتنی بر متغیرهای کمکی است و توسط لوزانو و همکاران در سال **۲۰۱۰** ارائه شده است. این مدل بر مبنای تکنولوژی با عنوان تکنولوژی *DEA* محیطی با بازده به مقیاس متغیر ارائه شده است اما در واقع بر مبنای تکنولوژی *DEA* محیطی شفارد با بازده به مقیاس متغیر $\left(T_{v-sh}^{w}\right)$ نوشته شده است که فرم صحیح تکنولوژی *DEA* محیطی با بازده به مقیاس متغیر نمی‌باشد. لذا این مدل اشتباه است و فرم اصلاح شده‌ی آن را بر مبنای فرم صحیح تکنولوژی *DEA* محیطی $\left(T_{v-k}^{w}\right)$ بررسی شده در فصل دوم ارائه خواهیم نمود.

مطالب این فصل برگرفته از مقالات زیر است:

- *Tone, K., 2004. Dealing with undesirable outputs in DEA: a Slacks-Based Measure (SBM) approach. The operation research society of Japan, 44–45.*
- *Tone, K., Tsutsui, M., 2006. Dealing with undesirable outputs in DEA: a Hybrid Measure of Efficiency Approach. The operation research society of Japan, 34–35.*
- *Zhou, P., Ang, B.W., Poh, K.L., 2006. Slacks-based efficiency measures or modeling environmental performance. Ecological Economics, 60, 111–118.*
- *Lozano, S., Gutierrez, E., .Slacks-based measure of efficiency of airports with airplanes delays as undesirable outputs. Computers & Operations Research, doi:10.1016/j.cor.2010.04.007.*

فصل اول

تعاریف و مفاهیم اولیه DEA

۱-۱ مقدمه

به منظور ارزیابی عملکرد واحدها و بخش‌ها، فعالیت‌های علمی زیادی صورت گرفته است. مسلماً رابطه‌ی عملکرد با عوامل تأثیرگذار، تابعی به‌صورت $Y = f(U,V)$ است که در آن ورودی (U,V)، خروجی Y را تولید می‌کند. بردار ورودی از دو قسمت عوامل قابل کنترل (U) و عوامل غیر قابل کنترل (V) تشکیل شده است.

تابع تولید، تابعی است که برای هر ترکیب از ورودی‌ها، ماکسیمم خروجی را می‌دهد. این تابع در علم اقتصاد از اهمیت بسیاری برخوردار است. زیرا با داشتن آن می‌توان مشخص کرد که یک واحد خوب عمل می‌کند یا نه. به علت پیچیدگی فرآیند تولید، تغییر در تکنولوژی تولید و چند مقدار بودن تابع تولید، تابع تولید در دسترس نیست. در روش‌های پارامتری با استفاده از یک سری مشاهدات و داده‌ها سعی می‌کنند این تابع را تخمین بزنند. برای این منظور از فرآیند برازش منحنی استفاده می شود. ولی به‌دست آوردن تابع تولید با استفاده از این فرآیند ایراداتی دارد که در زیر به تعدادی از آن‌ها اشاره می‌کنیم.

۱) روابط بین ورودی‌ها و خروجی‌ها به طور دلخواه در نظر گرفته می‌شود. مثلاً در اقتصاد رابطه‌ی $Q = x\ A_1^{X_1}A_2^{X_2}\dots A_n^{X_n}$ را برای تابع تولید در نظر می‌گیرند، که در آن A_1 ، A_2 و$\cdots$و A_n ورودی‌ها، Q خروجی و x_1 ، x_2 و$\cdots$و x_n پارامترهای تابع‌اند، که باید تعیین شوند.

۲) اگر بعد بردار خروجی بیش از یک باشد، این روش را نمی‌توان به‌کار برد و برای مسائلی به‌کار می‌رود که فقط یک خروجی دارند.

۳) منحنی به‌دست آمده، تمایل مرکزی دارد و باید به گونه‌ای آن را برطرف کرد.

عیوب فوق اساسی ترین ایرادات روش پارامتری بود، لذا در سال **۱۹۵۷** فارل[۱] **[۱۵]**، روش غیر پارامتری را ارائه کرد که اساس کار چارنز[۲]، کوپر[۳] و رودز[۴] بود و در ادامه به آن می پردازیم.

۱-۲ واحد تصمیم گیرنده

منظور از واحد تصمیم گیرنده، عبارت است از واحدی که با دریافت بردار ورودی مانند $(x_1,x_2,...,x_m)$ ، بردار خروجی $(y_1,y_2,...,y_s)$ را تولید می‌کند. منظور از واحدهای تصمیم گیرنده‌ی متجانس این است که واحدها عمل مشابه دارند و با دریافت ورودی‌های مشابه، خروجی‌های مشابه تولید می‌کنند. مانند شعب یک بانک، کارخانجات یک شرکت خاص یا ادارات یک سازمان دولتی.

فرض کنیم n واحد تصمیم گیرنده داریم که با $DMU_j=(x_j,y_j)$ ، $(j=1,2,...n)$ نشان خواهیم داد. به طوریکه $x_j\in\mathbb{R}^m$ ، و $x_j\geq 0$ $x_j\neq 0$ ، $(j=1,2,...n)$ ، نشان دهنده‌ی بردار ورودی و $y_j\in\mathbb{R}^s$ ، و $y_j\geq 0$ $y_j\neq 0$ ، $(j=1,2,...n)$ نشان دهنده‌ی بردار خروجی است.

DMU_o $(o\in\{1,2,...n\})$ ، نشان‌دهنده‌ی واحد تحت ارزیابی بوده و نماد $(*)$ نشان دهنده مقدار بهینه بودن متغیر است. ماتریس ورودی X، ماتریسی است که ستون‌های آن را بردارهای ورودی DMU_j ها، $(j=1,2,...n)$ را تشکیل داده است، یعنی $X=[x_1,...,x_n]$ و به‌طور مشابه ماتریس خروجی Y به‌صورت $Y=[y_1,...,y_n]$ در نظر گرفته می‌شود.

۱-۳ کارایی

کارایی به معنای خوب کار کردن، تحت تأثیر شاخص‌های درون سازمانی مثل سود هر واحد، فروش هر واحد و از این قبیل قرار دارد، که به‌صورت نسبت خروجی به ورودی بیان می شود:

ورودی/خروجی = کارایی

کارایی مطلق یک DMU ، مقایسه‌ی عملکرد آن با استانداردهای کلی و کارایی نسبی، سنجش عملکرد یک DMU، نسبت به واحدهای دیگر آن مجموعه است.

---

۱ *Farrell*
۲ *Charnes*
۳ *Cooper*
٤ *Rohds*

چون استانداردهای کلی معمولا تعریف نشده و در صورت تعریف شدن، رسیدن به آن مشکل است، لذا کاربرد کارایی نسبی گسترده تر از کاربرد کارایی مطلق است.

اگر واحد تصمیم‌گیرنده‌ی مورد نظر دارای یک ورودی و یک خروجی باشد، با استفاده از رابطه فوق کارایی آن قابل محاسبه بوده و اندازه‌ی حاصل، کارایی مطلق آن واحد به شمار می آید.

در صورت وجود چند ورودی و چند خروجی برای واحد تصمیم‌گیرنده‌ی مورد نظر، نسبت مجموع وزن‌دار شده‌ی خروجی به مجموع وزن‌دار شده‌ی ورودی به‌صورت

$$E_o = \frac{u_1 y_{1o} + \cdots + u_s y_{so}}{v_1 x_{1o} + \cdots + v_m x_{mo}} \qquad (۱.۱)$$

کارایی آن واحد را اندازه‌گیری می کند، که در آن u_r قیمت خروجی rام یعنی $y_r \left(r = 1,...,s\right)$ و v_i هزینه ورودی iام یعنی $\mathrm{x}_i \left(i = 1,...,m\right)$ است. کارایی فوق به "کارایی اقتصادی" معروف است.

قابل ذکر است که تخصیص وزن‌های مناسب به ورودی‌ها و خروجی‌ها، نقش تعیین کننده‌ای در اندازه‌ی کارایی دارد.

کارایی نسبی، از تقسیم اندازه‌ی کارایی هر واحد به بزرگترین آن‌ها حاصل می شود. بنابراین اندازه-ی کارایی هر واحد، همواره کوچکتر یا مساوی یک بوده و حداقل یک واحد کارایی نسبی برابر یک دارد.

به‌طور مثال کارایی نسبی واحد تصمیم‌گیرنده‌ی o به‌صورت زیر به‌دست می آید:

$$RE_o = \frac{E_o}{\underset{j}{Max}\left\{E_j\right\}} \qquad (۲.۱)$$

۱-۴ تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)

تحلیل پوششی داده‌ها $\left(DEA\right)$شامل تکنیک‌ها و روش‌هایی برای ارزیابی کارایی و یا سنجش بهره‌وری واحدهای تصمیم‌گیرنده است.

DEAدر واقع تعمیم کار فارل در ابداع اولین روش غیر پارامتری است. فارل با استفاده از ورودی-ها و خروجی‌های واحدهای تصمیم‌گیرنده و اصول حاکم بر آن‌ها، مجموعه‌ای با عنوان مجموعه‌ی امکان تولید، ارائه و قسمتی از مرز آن را به عنوان تابع تولید معرفی نمود. این مرز را "مرز کارا" نیز می نامند و واحدهای تصمیم‌گیرنده‌ای که روی این مرز قرار می گیرند، کارا ارزیابی می شوند. از آن-جایی‌که DEA ، تکنیک ارزیابی کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده است، حداقل یکی از واحدها روی مرز و بقیه واحدها در زیر آن قرار دارند. نام تحلیل پوششی داده‌ها از ویژگی پوششی بودن، منشأ گرفته است.

این روش در مقایسه با روش‌های قبلی دارای مزیت‌هایی است که در ادامه به آن اشاره می کنیم.

در روش‌های *DEA* بر خلاف برخی روش‌های عددی، مشخص بودن وزن‌ها از قبل و تخصیص آن‌ها به ورودی‌ها و خروجی‌ها لازم نیست. هم‌چنین این روش‌ها نیازی به اشکال تابعی از قبل تعیین شده (مانند روش‌های رگرسیون آماری) و یا شکل صریح تابع تولید (مانند برخی روش‌های پارامتری) ندارند.

تحلیل پوششی داده‌ها، امکاناتی را برای مطالعه واحدهایی با چند ورودی و چند خروجی فراهم می‌کند. اسلوب تحلیل پوششی داده‌ها بر پایه جبر خطی بنا نهاده شده است و توانایی آن بیشتر به دلیل استفاده از برنامه‌ریزی خطی است. برنامه‌ریزی خطی، تحلیل پوششی داده‌ها را قادر می‌سازد، تا از روش‌های حل مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی و قضایای دوآلیتی استفاده کند و به این ترتیب منبع و مقدار ناکارایی را برای هر ورودی و خروجی مشخص کند.

DEA هم‌چنین فرصت‌های زیادی را برای همکاری میان تحلیل‌گر و تصمیم‌گیرنده ایجاد می کند. این همکاری‌ها می تواند در راستای انتخاب ورودی و خروجی واحدهای تحت ارزیابی و چگونگی عملکرد و الگویابی نسبت به مرز کارا باشد.

۱-۵ مجموعه‌ی امکان تولید (PPS)

تعریف ۱-۵-۱ (مجموعه‌ی امکان تولید). مجموعه‌ی فعالیت‌های شدنی، مجموعه‌ی امکان تولید نامیده شده و به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^{m+s}: \text{ بردار خروجی } y\geq 0 \text{ بتواند به وسیله بردار ورودی } x\geq 0 \text{ تولید شود}\}$$

مدل‌های *DEA* هر کدام به یک مجموعه‌ی امکان تولید یکتا وابسته هستند که مجموعه‌ی امکان تولید نیز به طور یکتا، توسط یک مجموعه از فرض‌ها و اصول معین ساخته می‌شود. برای معرفی مدل‌ها، از اصول زیر روی مجموعه‌ی امکان تولید T استفاده می‌شود:

اصل۱ (شمول مشاهدات).

همه‌ی فعالیت‌های مشاهده شده، یعنی $\text{DMU}_j=(x_j,y_j)$ ، $(j=1,2,...n)$، به T تعلق دارند. این بدیهی ترین اصلی است که روی T تحمیل شده و همه‌ی مدل‌های *DEA* این اصل را دارا هستند.

اصل۲ (تحدب).

اگر $(x,y),(\overline{x},\overline{y})\in T$ آن‌گاه برای هر $\lambda\in[0,1]$ ، $(\lambda x+(1-\lambda)\overline{x},\lambda y+(1-\lambda)\overline{y})\in T$، یا به‌صورت نمادین:

$$\forall\ (x,y),(\overline{x},\overline{y})\in T\ ,\ \forall\ \lambda\in[0,1]\ ;\ (\lambda x+(1-\lambda)\overline{x},\lambda y+(1-\lambda)\overline{y})\in T \quad (۳.۱)$$

به عبارت دیگر T یک مجموعه‌ی محدب است.

اصل۳ (بیکرانی اشعه یا بازده به مقیاس ثابت).

به ازای هر $(x,y)\in T$ و هر $\lambda\geq 0$ ، داریم $(\lambda x,\lambda y)\in T$، یا به‌صورت نمادین:

$$\forall\ (x,y)\in T\ ,\ \forall\ \lambda\geq 0\ ;\ (\lambda x,\lambda y)\in T \quad (۴.۱)$$

اصل۴ (امکان‌پذیری).

اگر $(\overline{x},\overline{y})\in T$ و $x\geq\overline{x}$ ، آن‌گاه $(x,\overline{y})\in T$ و اگر $y\leq\overline{y}$ آن‌گاه $(\overline{x},y)\in T$، یا به‌صورت نمادین:

$$\forall\ (\overline{x},\overline{y})\in T\ ,\begin{cases}\forall x\ ;\ x\geq\overline{x}\ \Rightarrow(x,\overline{y})\in T\\ \forall y\ ;\ y\leq\overline{y}\Rightarrow(\overline{x},y)\in T\end{cases} \quad (۵.۱)$$

این اصل بیان می‌کند که اگر خروجی $\overline{y}$ توسط $\overline{x}$ تولید شود، آن‌گاه همین خروجی توسط هر ورودی بزرگتر از $\overline{x}$ نیز می‌تواند تولید شود و همچنین هر خروجی کمتر از $\overline{y}$ نیز می‌تواند توسط ورودی $\overline{x}$ تولید شود.

اصل۵ (کمینه درونیابی).

T اشتراک همه‌ی مجموعه‌هایی مانند T است که در اصل ۱ و بعضی از اصول دیگر فوق صدق می‌کند.

۱-۶ مدل CCR[۱]

این مدل، اولین مدل *DEA* برای اندازه‌گیری کارایی واحدهای تصمیم گیرنده است که در سال **۱۹۷۸** توسط چارنز، کوپر و رودز **[۴]**، ارائه شد.

قضیه ۱-۶-۱ [۴۳]. یک مجموعه‌ی منحصر به فرد وجود دارد که در اصول ۱ تا با ۵ صدق می‌کند. این مجموعه به‌صورت زیر است:

$$T_{CCR}=\left\{(x,y)\ :\ x\geq\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j\ ,\ y\leq\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_j\ ,\ \lambda_j\geq 0\ (j=1,\ldots,n)\right\}. \quad (۶.۱)$$

---

[۱] *Charnes, Cooper, Rhodes (CCR)*

تعریف ۱-۶-۲.(برتری پاراتو) بردار X غالب بر بردار Y است اگروتنهااگر $X \geq Y$ و $X \neq Y$.در این‌صورت گوییم بردار Y بوسیله ی بردار X مغلوب می شود. به عبارت دیگر بردار X غالب بر بردار Y است اگر $x_j \geq y_j \ (j = 1,...,n)$ و نامساوی حداقل برای یک مولفه به‌طور اکید برقرار باشد.

گوییم $DMU_k = (x_k, y_k)$ توسط $DMU_j = (x_j, y_j)$ مغلوب شده یا به طور معادل DMU_j غالب بر DMU_k است اگروتنهااگر $(-x_j, y_j) \geq (-x_k, y_k)$ و نامساوی حداقل در یکی از مؤلفه‌ها به‌صورت اکید برقرار است و این را به‌صورت $(-x_j, y_j) \geq (-x_k, y_k)$ نشان می‌دهیم.

اگر در T_{CCR} امکان تولیدی مانند (x, y) یافت نشود که غالب بر (x_o, y_o) باشد، یعنی هیچ (x, y) یافت نشود که $(-x, y) \geq (-x_o, y_o)$ و نامساوی حداکثر در یکی از مؤلفه‌ها به‌صورت اکید برقرار باشد، آن‌گاه گوییم که (x_o, y_o) کارای نسبی است. در غیر این صورت ناکارا می‌باشد.

اگر یکی از حالات زیر رخ دهد آن‌گاه به وضوح (x_o, y_o) ناکارا خواهد بود:

۱) اگر بتوان امکان تولیدی در T_{CCR} یافت که با ورودی کمتر از x_o ، خروجی بیشتر یا مساوی y_o داشته باشد.

۲) اگر بتوان امکان تولیدی در T_{CCR} یافت که با خروجی بیشتر از y_o، ورودی کمتر یا مساوی x_o داشته باشد.

۳) اگر بتوان امکان تولیدی در T_{CCR} یافت که با ورودی کمتر از x_o، خروجی بیشتر از y_o داشته باشد.

حالت اول به حل مدل زیر منجر می‌شود:

$$\begin{aligned} &Min \quad \theta \\ &s.t. \quad (\theta x_o, y_o) \in T_{CCR} \end{aligned} \tag{۷.۱}$$

با توجه به قضیه (۱-۶-۱) و اصل شهودی تجرید و از اینکه $(\theta x_o, y_o) \in T_{CCR}$ ، مدل (۷.۱)، به مدل (۸.۱) تبدیل می شود. مدل (۸.۱)، که به مدل CCR در فرم پوششی[۱] با ماهیت ورودی[۲] معروف است، همواره شدنی بوده و بهینه متناهی دارد و جواب بهین در شرط $0 < \theta^* \leq 1$ صدق می‌کند.

$$\begin{aligned} &Min \quad \theta \\ &s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \leq \theta x_o \\ &\qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \geq y_o \\ &\qquad \lambda_j \geq 0 \qquad j = 1,2,...,n \end{aligned} \tag{۸.۱}$$

[۱] *Envelopment form*
[۲] *Input oriented*