دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی


پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی (محض)

# ضرب‌های همدیس اینشتینی و خمینه‌های کهلری


توسط

**معصومه زارعی**

استاد راهنما

**دکتر عباس حیدری**

استاد مشاور

**دکتر سید محمد باقر کاشانی**



بهمن ۸۸

تقدیم به

آنان که که بسان مهر فروزنده آسمان زندگی‌ام را نور بخشیده‌اند؛
دو ستاره‌ی پرفروغی که از درخشندگی در شب‌های تار ناامیدی من نهراسیدند و در پیچ و خم مسیر کمال مرا آموختند که خواستن توانستن است.
کسانی که زندگی‌ام برایشان همه رنج است و وجودشان برایم همه مهر:

پدر عزیزم که مفهوم بی‌دریغ استواری و صداقت است؛ او که وسعت افق‌های پیش رویم همه از نگاه‌های بلندش روشن می‌شود.

مادر مهربانم که آیینه‌ی تمام نمای شور زندگی است. او که دلخوشی‌های امروزم را مدیون تشویق‌های دیروز و دلواپسی‌های همیشگی‌اش هستم.

# قدردانی

«منت خدای را عز و جل که طاعتش موجب قربت است و به شکر اندرش مزید نعمت.» سپاس می‌گزارم آن وجود یگانه را که وجود و یگانگی‌اش را در پرتو گزاره‌های وجود و یگانگی ریاضیات — که خلقت بی‌نظیر اوست — به‌درستی دریافتم و به شکرانه‌ی این نعمت همواره سر بر آستان بندگی‌اش می‌سایم.

سپاس بی‌کران خود را به دو معلم بزرگ زندگیم، پدر بزرگوارم و مادر عزیزم، تقدیم می‌دارم که مرا آموختند همواره بیاموزم و قدر بدانم بزرگانی را که سخاوتمندانه دانش خویش را به من بخشیدند.

از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر عباس حیدری سپاسگزارم و راهنمایی‌های ارزنده‌ی ایشان را ارج می‌نهم.

از استاد فرزانه جناب آقای دکتر سید محمدباقر کاشانی که بیش از هر چیز تعهد و بزرگ منشی ایشان را می‌ستایم کمال تشکر را دارم.

اما، تشکر ویژه‌ی خود را به عموی عزیزم و همسر بزرگوارشان تقدیم می‌دارم. آنان که محبت‌های بی‌دریغ‌شان را هرگز فراموش نخواهم کرد.

از دوستان عزیزم خانم‌ها: غربی، سیروش، خسروی‌پور، صفایی، حسینی، باقری‌نژاد، پورقاسم، آقاسی‌زاده، ایمانی و مجاهدفر نیز تشکر می‌کنم.

معصومه زارعی

بهمن ۱۳۸۸

# ضرب‌های همدیس اینشتینی و

# خمینه‌های کهلری


چکیده

در این پایان نامه، پس از معرفی خمینه‌های حدوداً کهلری ثابت می‌شود چنین خمینه‌هایی یک التصاق هرمیتی با تاب تماماً پادمتقارن می‌پذیرند. پس از آن، خمینه‌های حدوداً کهلری اکید تخت با متریک (الزاماً) نامعین رده بندی می‌شوند. در ادامه، خمینه‌های ریمانی فشرده‌ی $(M, g)$ که استوانه‌ی ریمانی آن‌ها همدیس اینشتینی است مطالعه شده و این نتیجه‌ی مهم به‌دست می‌آید که $(M, g)$ یک خمینه‌ی اینشتینی با خمیدگی عددی مثبت است. در پایان، خمینه‌های ریمانی ۵–بعدی فشرده‌ای که استوانه‌ی ریمانی آن‌ها به رده‌ی $\mathcal{W}_۱ + \mathcal{W}_۴$ از رده بندی گری – هرولا تعلق دارد رده بندی می‌شوند.



واژه‌های کلیدی : خمینه‌های حدوداً کهلری، خمینه‌های حدوداً کهلری اکید، التصاق هرمیتی، متریک‌های همدیس اینشتینی، رده بندی گری – هرولا

# فهرست مندرجات

# مقدمه

هندسه حدوداً کهلری با مفهوم هولونومی ضعیف که در سال ۱۹۷۱ توسط گری[۱] ارائه شد در ارتباط است [۱۴]. در واقع، خمینه‌های حدوداً کهلری با هولونومی ضعیف $U(n)$ متناظر بوده و در دهه‌ی هفتاد توسط گری به‌طور جدی مطالعه شدند [۹، ۱۰، ۱۲]. این خمینه‌ها به عنوان یکی از رده‌های ۱۶ گانه‌ی خمینه‌های تقریباً هرمیتی در رده بندی گری — هرولا[۲] ظاهر می‌شوند. اقبال اخیر به این خمینه‌ها بیشتر به دلیل کاربرد آن‌ها در فیزیک نظری است. هر خمینه‌ی حدوداً کهلری یک التصاق هرمیتی با تاب تماماً پادمتقارن می‌پذیرد که این نوع التصاق‌ها اخیراً در فیزیک نظری مورد توجه قرار گرفته است. به عنوان مثال، در نظریه ابرجاذبه، هندسه‌ی فضای مدولی رده‌ای از سیاهچاله‌ها به‌وسیله‌ی التصاقی با تاب تماماً پادمتقارن مطالعه می‌شود [۸]. به‌علاوه، وجود اسپینورهای[۳] موازی متناظر با التصاقی با تاب تماماً پادمتقارن بر یک خمینه‌ی ریمانی اسپین در نظریه‌ی ریسمان دارای اهمیت است چرا که با برخی سالیتون‌های ریسمانی در ارتباط است [۲۶].

پایان نامه‌ی حاضر شامل دو بخش است. بخش اول که به تشریح مرجع [۶] می‌پردازد در فصل دوم ارائه می‌شود. در این بخش بعد از معرفی خمینه‌های حدوداً کهلری، ثابت می‌شود که چنین

[۱] Gray

[۲] Gray-Hervella

[۳] spinor

خمینه‌هایی یک التصاق هرمیتی با تاب تماماً پادمتقارن می‌پذیرند. پس از آن، خمینه‌های حدوداً کهلری اکید تخت با متریک (الزاماً) نامعین رده بندی می‌شوند. بویژه، ثابت می‌شود هیچ خمینه‌ی حدوداً شبه‌کهلری تخت با متریک مثبت معین وجود ندارد.

در بخش دوم متریک‌های همدیس اینشتینی و خمینه‌های حدوداً کهلری مورد بررسی قرار می‌گیرند. مطالب این بخش تشریح مرجع [۲۰] بوده و در فصل سوم ارائه می‌شود. بعد از مطالعه‌ی متریک‌های همدیس اینشتینی استوانه‌ای، رده بندی گری – هرولا از خمینه‌های تقریباً هرمیتی ارائه می‌شود. مطالب این فصل با رده بندی خمینه‌های ریمانی ۵–بعدی فشرده‌ی $(M,g)$ که استوانه‌ی ریمانی آن‌ها یک ساختار تقریباً هرمیتی متعلق به رده‌ی $\mathcal{W}_۱ + \mathcal{W}_۴$ از رده بندی گری – هرولا می‌پذیرد، به پایان می‌رسد.

فصل ۱

# پیش نیازها

در این فصل پیش نیازهای لازم برای ورود به بحث فراهم شده است. در بخش اول پس از معرفی ساختار تقریباً مختلط و خمینه‌های تقریباً کهلری به دو قضیه‌ی مهم اشاره می‌شود. در قضیه‌ی ۱.۱.۱ شرط لازم و کافی برای این که خمینه‌ای یک ساختار تقریباً مختلط بپذیرد ارائه می‌گردد و در قضیه‌ی ۲.۱.۱ شرط لازم و کافی برای انتگرال پذیری چنین ساختاری بیان می‌شود. در بخش دوم با معرفی گروه هولونومی و برخی قضیه‌های مربوط به آن، مقدمات لازم برای اثبات قضیه‌های فصل ۳ فراهم می‌گردد.

## ۱.۱ ساختار تقریباً هرمیتی

تعریف ۱.۱.۱ ([۱۸] صفحه‌ی ۹۳) منظور از یک کلاف اصلی یک چهار تایی $(P, M, \pi, G)$ است که در آن $P$ و $M$ خمینه های هموار، $\pi : P \longrightarrow M$ یک استغراق [۱] و $G$ یک گروه لی است که

[۱] submersion

از راست بر $P$ به گونه‌ای عمل می‌کند که:

$(i)$ برای هر $g \in G$ و $u \in P$ داریم $\pi(ug) = \pi(u)$،

$(ii)$ به ازای هر $x \in M$ همسایگی $U$ از $x$ و وابرسانی

$$\psi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G,$$

$$\psi(u) = (\pi(u), \varphi(u))$$

وجود دارد که در آن $\varphi$ یک نگاشت هموار است که در شرط پایین صدق می کند:

$$\varphi(ug) = \varphi(u)g, \qquad \forall u \in \pi^{-1}(U), g \in G.$$

**مثال ۱.۱.۱** ([۱۸] صفحه‌ی ۹۴) اگر $M$ یک خمینه‌ی هموار و $G$ یک گروه لی باشد آن گاه $(M \times G, M, Pr_1, G)$ یک کلاف اصلی است که آن را کلاف اصلی بدیهی می‌گویند.

**مثال ۲.۱.۱** ([۱۸] صفحه‌ی ۹۴) فرض کنید $M$ یک خمینه‌ی هموار باشد، برای $x \in M$ قرار دهید

$$F_xM = \{\{e_1, \ldots, e_n\} | \text{ یک پایه مرتب برای } T_xM \text{ است. } \{e_i\}_{i=1}^{n}\}$$

و

$$FM := \bigcup_{x \in M} F_xM.$$

اگر $A = (a_{ij}) \in GL(n, \mathbb{R})$ و $e = (e_1, \ldots, e_n) \in FM$، آن گاه عمل راست گروه لی $GL(n, \mathbb{R})$ برخمینه‌ی $FM$ به صورت $eA = (u_1, \ldots, u_n)$ است که درآن $u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$. در این صورت

$(FM, M, \pi, GL(n, \mathbb{R}))$ یک کلاف اصلی است با

$$\pi : FM \longrightarrow M$$
$$F_x M \ni e \longmapsto x.$$

**تعریف ۲.۱.۱** ([۱۸] صفحه‌ی ۹۷) فرض کنید $(P, M, \pi, G)$ و $(Q, M, \tau, H)$ دو کلاف اصلی باشد. یک کاهش از $G$ به $H$ از نشاننده‌ی هموار $f_۱ : Q \to P$ و تکریختی گروههای لی $f_۲ : H \to G$ تشکیل شده است که برای هر $h \in H$ و $u \in U$، $f_۱(uh) = f_۱(u)f_۲(h)$ و به علاوه نمودار پایین جا به جایی باشد.

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{f_۱} & P \\ \tau\downarrow & & \downarrow\pi \\ M & \longrightarrow & M \\ & ۱_M & \end{array}$$

**تعریف ۳.۱.۱** ([۱۸] صفحه‌ی ۱۰۰) فرض کنید $M$ یک خمینه‌ی هموار، $G$ یک زیر گروه لی $GL(n, \mathbb{R})$، $B_G(M)$ یک زیر کلاف $FM$ و $f : (B_G(M), M, \pi|_{B_G(M)}, G) \longrightarrow (FM, M, \pi, GL(n, \mathbb{R}))$ یک کاهش باشد. آن‌گاه $B_G(M)$ را یک $G-$ساختار بر خمینه‌ی $M$ می‌نامند.

**تعریف ۴.۱.۱** ([۱۸] صفحه‌ی ۱۰۵) $G-$ساختار $B_G(M)$ بر $M$ را انتگرال پذیر گویند هرگاه $M$ دارای اطلسی مانند $\{U, (x_۱, \dots, x_n)\}$ باشد که برای هر $x \in U$، $\{\frac{\partial}{\partial x_i}(x)\}_{i=۱}^n \in B_G(M)$.

تعریف ۵.۱.۱ ([۱۸] صفحه‌ی ۱۵۱) منظور از یک ساختار تقریباً مختلط بر $M$ یک میدان تانسوری نوع $(۱,۱)$ بر $M$ مانند $J$ است که $J^۲ = -Id$. خمینه‌ی $M$ همراه با یک ساختار تقریباً مختلط را یک خمینه‌ی تقریباً مختلط نامند.

**نکته:** فرض کنید $(M, J)$ یک خمینه‌ی تقریباً مختلط باشد. برای هر $x \in M$، $J_x : T_xM \longrightarrow T_xM$ یک تبدیل خطی است که $J_x{}^۲ = -Id$. فرض کنید $(M, J)$ یک خمینه‌ی تقریباً مختلط باشد، برای هر $x \in M$ فضای برداری حقیقی $T_xM$ با ضربی که در پایین تعریف می‌شود به یک فضای برداری مختلط تبدیل می شود. فرض کنید $v \in T_xM$ و $a + ib \in \mathbb{C}$

$$(a + ib)v := av + bJ_x(v).$$

قضیه ۱.۱.۱ ([۱۸] صفحه‌ی ۱۵۳) فرض کنید $M^{۲n}$ یک خمینه‌ی هموار باشد. همچنین، $Gl(n, \mathbb{C})$ را با یک تکریختی طبیعی درون $Gl(۲n, \mathbb{R})$ در نظر گیرید. $M$ یک ساختار تقریباً مختلط می‌پذیرد اگر و تنها اگر یک $GL(n, \mathbb{C})$−ساختار بپذیرد.

گزاره ۱.۱.۱ ([۱۳]) $S^۲$ و $S^٦$ تنها کره‌هایی هستند که ساختار تقریباً مختلط می‌پذیرند.

تعریف ٦.۱.۱ ([۱۸] صفحه‌ی ۱۵۴) فرض کنید $M$ یک فضای توپولوژیک هاسدورف و شمارای نوع دوم باشد. گوییم $M$ یک خمینه‌ی مختلط $n$−بعدی است هرگاه هر نقطه‌ی آن مانند $x$ یک همسایگی $U$ داشته باشد که با بازی از $\mathbb{C}^n$ همانسان باشد. اگر $\phi : U \longrightarrow \phi(U) \subseteq \mathbb{C}^n$ همانسانی باشد آنگاه $(U, \phi)$ را یک نقشه‌ی $M$ گویند. فرض کنید$(U, \phi)$ و $(V, \psi)$ دو نقشه از خمینه‌ی مختلط $M$ باشد. گوییم این دو نقشه سازگار است هر گاه $U \cap V = \emptyset$ یا اگر $U \cap V \neq \emptyset$، $\phi \circ \psi^{-۱}$ و $\psi \circ \phi^{-۱}$

هولومورفیک باشند. منظور از یک ساختار مختلط بر $M$ خانواده‌ای از نقشه‌های $M$ مانند $\{(U,\phi)\}$ است که

۱) $M = \bigcup U$؛

۲) هر دو نقشه‌ی $M$ سازگار باشد؛

۳) $\{(U,\phi)\}$ بیشین باشد.

اگر $M$ یک خمینه‌ی مختلط $n$−بعدی باشد می‌توان آن را به یک خمینه‌ی حقیقی $2n$−بعدی تبدیل کرد. در واقع هر نقشه‌ی $(U,\phi)$ از $M$ با مؤلفه‌های مختلط $(z_1,\dots,z_n)$ یک نقشه‌ی حقیقی با مؤلفه‌های $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)$ می باشد که در آن $z_j = x_j + iy_j$ برای هر $1 \leq j \leq n$.

گزاره ۲.۱.۱ ([۱۸] صفحه‌ی ۱۵۴) هر خمینه‌ی مختلط به طور طبیعی یک ساختار تقریباً مختلط می‌پذیرد.

اثبات : فرض کنید $(U,(z_1,\dots,z_n))$ یک نقشه‌ی دلخواه از خمینه‌ی مختلط $M$ باشد. در این صورت $(U,(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n))$ نقشه‌ای از $M$ به عنوان یک خمینه‌ی حقیقی است که در آن $z_j = x_j + iy_j$. تانسور $J$ را به صورت موضعی چنین تعریف می کنیم:

$$J(\frac{\partial}{\partial x_i}) = \frac{\partial}{\partial y_i}$$

و

$$J(\frac{\partial}{\partial y_i}) = -\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

نشان می دهیم تعریف $J$ مستقل از انتخاب نقشه‌ی $(U,(x,y))$ است. فرض کنید $(V,(w_1,\dots,w_n))$ نقشه‌ی دیگری از $M$ باشد که $U \cap V \neq \emptyset$ و $(V,(u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_n))$ نقشه‌ی حقیقی متناظر با

آن باشد. $J'$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$J'(\frac{\partial}{\partial u_i}) = \frac{\partial}{\partial v_i}$$
$$J'(\frac{\partial}{\partial v_i}) = -\frac{\partial}{\partial u_i}.$$

چون $w_i$ها هولومورفیک هستند برای هر $i,j$، $1 \leq i,j \leq n$، داریم

$$\frac{\partial u_j}{\partial y_i} = -\frac{\partial v_j}{\partial x_i}, \qquad \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{\partial v_j}{\partial y_i}. \tag{1.1.1}$$

همچنین

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial u_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial v_j} \right)$$

و

$$\frac{\partial}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^{n} \left( \frac{\partial u_j}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial u_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial v_j} \right).$$

بنابراین با توجه به رابطه‌ی ۱.۱.۱ داریم

$$\begin{aligned} J'\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) &= J'\left( \sum_{j=1}^{n} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial u_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial v_j} \right)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial v_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial u_j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left( \frac{\partial u_j}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial u_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial v_j} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y_i} \\ &= J\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right). \end{aligned}$$

به طورمشابه،

$$J'\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) = J\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)$$

به وضوح $J^۲ = -Id$، پس $J$ یک ساختار تقریباً مختلط روی $M$ است. ■

تعریف ۷.۱.۱ ([۱۸] صفحه‌ی ۱۵۵) ساختار تقریباً مختلط $J$ را انتگرال پذیر گویند هرگاه به عنوان یک $GL(n,\mathbb{C})$–ساختار انتگرال پذیر باشد.

گزاره ۳.۱.۱ ([۱۸] صفحه‌ی ۱۵۵) خمینه‌ی هموار $M^{۲n}$ یک ساختار تقریباً مختلط انتگرال پذیر دارد اگر و تنها اگر یک ساختار مختلط بپذیرد.

تعریف ۸.۱.۱ ([۱۸] صفحه‌ی ۱۵۶) فرض کنید $(M.J)$ یک خمینه‌ی تقریباً مختلط باشد. تانسور نیجنهوس[۲] بر $M$ یک تانسور نوع $(۱,۲)$ است که برای هر $X,Y\in\chi(M)$، چنین تعریف می‌شود

$$N_J(X,Y) = [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] - [X,Y],$$

قضیه ۲.۱.۱ ([۲۳]) ساختار تقریباً مختلط $J$ انتگرال پذیر است اگر و تنها اگر $N_J \equiv ۰$.

تعریف ۹.۱.۱ ([۱۸] صفحه‌ی ۱۵۶) $\nabla$ را یک التصاق تقریباً مختلط بر $M$ نامند هرگاه $\nabla J = ۰$.

لم ۱.۱.۱ ([۱۸] صفحه‌ی ۱۵۶) فرض کنید $\nabla$ یک التصاق متقارن بر $M$ باشد. آن‌گاه

$$N_J(X,Y) = (\nabla_{JX}J)Y - (\nabla_{JY}J)X + J((\nabla_Y J)X - (\nabla_X J)Y).$$

گزاره ۴.۱.۱ ([۱۸] صفحه‌ی ۱۵۷) هر خمینه‌ی تقریباً مختلط یک التصاق تقریباً مختلط می‌پذیرد که تاب آن $\frac{۱}{۴}N_J$ می‌باشد.

---
[۲] Nijenhuis

اثبات : فرض کنید $\nabla$ یک التصاق متقارن روی $M$ باشد. اثر میدان تانسوری $Q$ از نوع $(۱,۲)$ روی هر $X, Y \in \chi(M)$ چنین تعریف می‌شود

$$Q(X,Y) = \frac{۱}{۴}\Big\{\Big(\nabla_{JY}J\Big)X + J\Big((\nabla_Y J)X\Big) + ۲J\Big((\nabla_X J)Y\Big)\Big\},$$

التصاق پایین را بر $M$ در نظر گیرید

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - Q(X,Y).$$

ابتدا نشان می دهیم $\overline{\nabla}$ یک التصاق تقریباً مختلط است.

$$Q(X,JY) - JQ(X,Y) = \frac{۱}{۲}J((\nabla_X J)(JY)) + \frac{۱}{۲}(\nabla_X J)Y = (\nabla_X J)Y.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_X JY &= \nabla_X JY - Q(X,JY)\\
&= (\nabla_X J)Y + J(\nabla_X Y) - Q(X,JY)\\
&= (\nabla_X J)Y + J(\nabla_X Y) - JQ(X,Y) - (\nabla_X J)Y\\
&= J(\nabla_X Y) - JQ(X,Y)\\
&= J(\overline{\nabla}_X Y).
\end{aligned}$$

اگر $\overline{T}$ تاب التصاق $\overline{\nabla}$ باشد با توجه به $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = T(X,Y) = ۰$، داریم

$$\begin{aligned}
\overline{T}(X,Y) &= \overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X - [X,Y]\\
&= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] - Q(X,Y) + Q(Y,X)\\
&= -Q(X,Y) + Q(Y,X)
\end{aligned}$$

به آسانی می‌توان دید

$$\overline{T}(X,Y) = \tfrac{1}{۴}N_J(X,Y). \quad \blacksquare$$

نتیجه ۱.۱.۱ ([۱۸] صفحه‌ی ۱۵۹) ساختار تقریباً مختلط $J$ بر خمینه‌ی $M$ انتگرال پذیر است اگر و تنها اگر $M$ یک التصاق تقریباً مختلط متقارن بپذیرد.

اثبات : اگر $J$ انتگرال پذیر باشد، بنابر قضیه۲.۱.۱، $N_J = ۰$ و التصاق ساخته شده در گزاره‌ی ۴.۱.۱ التصاق مورد نظر است.

برعکس، فرض کنید $\nabla$ یک التصاق تقریباً مختلط متقارن بر $M$ باشد؛ پس $\nabla J = ۰$. اگر $Q$ و $\overline{\nabla}$ به ترتیب میدان تانسوری و التصاق تعریف شده در گزاره‌ی ۴.۱.۱ باشد آن‌گاه $Q = ۰$ و در نتیجه $\overline{\nabla} = \nabla$. بنابراین چون $\nabla$ متقارن است، $N_J = ۴\overline{T} = ۴T = ۰$. $\blacksquare$

تعریف ۱۰.۱.۱ ([۱۸] صفحه‌ی ۱۶۱) فرض کنید $(M,J)$ یک خمینه‌ی تقریباً مختلط باشد. متریک شبه‌ریمانی $g$ را یک متریک هرمیتی گویند هرگاه برای هر $X,Y \in \chi(M)$،

$$g(JX,JY) = g(X,Y).$$

در این صورت $(M,J,g)$ را یک خمینه‌ی تقریباً هرمیتی نامند و درصورتی که $M$ یک خمینه‌ی مختلط باشد آن را یک خمینه‌ی هرمیتی گویند.

گزاره ۵.۱.۱ هر خمینه‌ی تقریباً مختلط یک متریک ریمانی هرمیتی می‌پذیرد.

اثبات : فرض کنید $h$ یک متریک ریمانی بر $M$ باشد، آن‌گاه

$$g(X,Y) = h(X,Y) + h(JX,JY),$$

یک متریک ریمانی هرمیتی بر $M$ است. $\blacksquare$

تعریف ۱۱.۱.۱ ([۲۹]) فرض کنید $(M, J, g)$ یک خمینه‌ی تقریباً هرمیتی و $\nabla$ یک التصاق بر آن باشد. $\nabla$ را یک التصاق هرمیتی گویند هرگاه

$$\nabla g = \circ, \nabla J = \circ.$$

تعریف ۱۲.۱.۱ فرض کنید $\nabla$ یک التصاق بر خمینه‌ی $(M, g)$ و $T$ تاب آن باشد. $\nabla$ را یک التصاق با تاب تماماً پادمتقارن گویند هرگاه برای هر $X, Y, Z \in \chi(M)$

$$g(T(X, Y), Z) = -g(T(X, Z), Y).$$

قضیه ۳.۱.۱ ([۷]) فرض کنید $(M, J, g)$ یک خمینه‌ی $2n$-بعدی تقریباً هرمیتی باشد. $M$ یک التصاق هرمیتی با تاب تماماً پادمتقارن می‌پذیرد اگر و تنها اگر تانسور نیجنهوس $N(X, Y, Z) = g(N(X, Y), Z)$ یک ۳-فرم باشد.

تعریف ۱۳.۱.۱ ([۱۸] صفحه‌ی ۱۶۳) فرض کنید $(M, J, g)$ یک ساختار تقریباً هرمیتی باشد. برای هر $X, Y \in \chi(M)$، ۲-فرم $\Omega$ چنین تعریف می‌شود

$$\Omega(X, Y) = g(X, JY).$$

$\Omega$ را فرم کهلری $(M, J, g)$ گویند.

گزاره ۶.۱.۱ ([۱۸] صفحه‌ی ۱۶۳) فرض کنید $(M, J, g)$ یک خمینه‌ی تقریباً هرمیتی باشد. برای هر $X, Y, Z \in \chi(M)$ داریم

$$۲g\Big((D_X J)Y, Z\Big) = ۳d\Omega(X, JY, Z) - ۳d\Omega(X, Y, Z) + g\Big(N_J(Y, Z), JX\Big).$$

نتیجه ۲.۱.۱ ([۱۸] صفحه‌ی ۱۶۴) فرض کنید $(M, J, g)$ یک ساختار تقریباً هرمیتی باشد. شرط‌های پایین هم ارزند:

۱) التصاق لوی — چیویتای $D$ وابسته به $g$ یک التصاق تقریباً مختلط است.

۲) $N_J = \circ$ و $d\Omega = \circ$.

اثبات : فرض کنید $DJ = \circ$. چون $D$ متقارن است، طبق نتیجه‌ی ۱.۱.۱ $J$ انتگرال پذیر است، یعنی $N_J \equiv \circ$. حال با توجه به $Dg = \circ$ و $DJ = \circ$ نشان می‌دهیم $d\Omega = \circ$. برای هر $X, Y, Z \in \chi(M)$ داریم

$$
\begin{aligned}
D\Omega(X, Y, Z) &= (D_Z\Omega)(X, Y) \\
&= D_Z\Omega(X, Y) - \Omega(D_ZX, Y) - \Omega(X, D_ZY) \\
&= Zg(X, JY) - g(X, JD_ZY) - g(D_ZX, JY) \\
&= g(X, D_ZJY) - g(X, JD_ZY) \\
&= g(X, (D_ZJ)) \\
&= \circ,
\end{aligned}
$$

پس $D\Omega = \circ$، بنابراین

$$d\Omega(X, Y, Z) = D\Omega(X, Y, Z) - D\Omega(Y, Z, X) + D\Omega(Z, X, Y) = \circ.$$

عکس گزاره با توجه به گزاره‌ی ۶.۱.۱ واضح است. ■

نتیجه ۳.۱.۱ ([۱۸] صفحه‌ی ۱۶۴) اگر $M$ یک خمینه‌ی هرمیتی باشد، آنگاه شرط‌های پایین هم‌ارزند:

۱) التصاق لوی-چویتای وابسته به $g$ یک التصاق تقریباً مختلط است.

۲) فرم کهلری $\Omega$ بسته است، یعنی $d\Omega = 0$.

اثبات : چون $M$ یک خمینه‌ی مختلط است، طبق گزاره‌ی ۳.۱.۱ ساختار تقریباً مختلط آن انتگرال پذیر است، لذا $N_J = 0$. با نتیجه‌ی ۲.۱.۱ اثبات تمام است. ■

تعریف ۱۴.۱.۱ ([۱۸] صفحه‌ی ۱۶۵) فرض کنید $(M, J, g)$ یک ساختار تقریباً هرمیتی باشد که فرم کهلری آن بسته است، در این‌صورت $M$ را یک خمینه‌ی تقریباً کهلری نامند؛ در حالتی که $M$ هرمیتی باشد آن را یک خمینه‌ی کهلری گویند.

گزاره ۷.۱.۱ یک خمینه‌ی تقریباً کهلری که کهلری نباشد التصاق هرمیتی با تاب تماماً پادمتقارن نمی‌پذیرد.

اثبات : با برهان خلف فرض کنید چنین التصاقی روی خمینه‌ی تقریباً هرمیتی $(M, J, g)$ وجود داشته باشد. طبق قضیه ۳.۱.۱ تانسور نیجنهوس $M$ نسبت به $g$ پادمتقارن است. به‌آسانی می‌توان دید

$$-3g(N_J(JX, Y), Z) = d\Omega(X, JY, JZ) - d\Omega(X, Y, Z) + d\Omega(JX, JY, Z) + d\Omega(JX, Y, JZ).$$

چون $M$ تقریباً کهلری است، $d\Omega = 0$، بنابراین $N_J = 0$، یعنی $J$ انتگرال پذیر است که با فرض قضیه در تناقض است. ■

حال یک ساختار کهلری را بر خمینه‌ی $TM$ بررسی می‌کنیم. ابتدا، برخی تعریف‌های مورد نیاز را ارائه کرده پس از آن به اصل موضوع می‌پردازیم.

تعریف ۱۵.۱.۱ ([۱۸] صفحه‌ی ۱۲۰) فرض کنید $\pi : TM \to M$ کلاف مماس و $X$ یک میدان برداری بر $M$ باشد. منظور از ترفیع عمودی $X$ به $TM$ میدان برداری $X^{\mathcal{V}} \in \chi(TM)$ است که برای