دانشکده علوم

پایان نامه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض- آنالیز

عملگرهای کلاس- I و ابردوری بودن

به وسیله‌ی

محمد فرهادی

استاد راهنما

دکتر بهرام خانی رباطی

بهمن ماه ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحيم

به نام خدا

اظهار نامه

اینجانب محمد فر هادی دانشجوی رشته ی ریاضی محض گرایش آنالیز دانشکده ی علوم اظهار می کنم که این پایان نامه حاصل پژوهش خودم بوده و در جاه هایی که از منابع دیگران استفاده کرده ام، نشانی دقیق و مشخصات کامل آن را نوشته ام.همچنین اظهار می کنم که تحقیق و موضوع پایان نامه ام تکراری نیست و تعهد می نمایم که بدون مجوز دانشگاه دستاوردهای آن را منتشر ننموده و یا در اختیار غیر قرار ندهم.کلیه حقوق این اثر مطابق با آیین نامه مالکیت فکری و معنوی متعلق به دانشگاه شیراز است.

نام و نام خانوادگی:محمد فرهادی

تاریخ و امضا: ۱۳۹۰/۱۲/۱۷

به نام خدا

عملگرهای از کلاس- J و ابردوری بودن

به وسیله ی:

محمد فرهادی

پایان نامه ارایه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیتهای تحصیلی

لازم برای اخذ مدرک کارشناسی ارشد

در رشته ی:

ریاضی محض

از دانشگاه شیراز

شیراز

جمهوری اسلامی ایران

ارزیابی شده توسط کمیته پایان نامه با درجه : عالی

دکتر بهرام خانی رباطی،دانشیار بخش ریاضی(رئیس کمیته)..

دکتر عبدالکریم هدایتیان،استاد بخش ریاضی ....

دکتر عبدالعزیز عبداللهی ،دانشیار بخش ریاضی..

بهمن ماه ۱۳۹۰

تقدیم به گوهر فروزان و الهام بخش زندگیم

مادر عزیز و مهربانم

کسی که همچو شمع سوختی تا من در پرتو روشنایی ات راه درست را از نادرست تشخیص دهم. درود بر تو

باد ، درودی که با فضل و بزرگواری ات برابر ی کند و پاداش ناچیزی از اعمال ات باشد.

سپاسگزاری

پس از سپاس به درگاه خداوند حکیم که توفیق آموختن علم را به این بنده عنایت فرمود، تشکر از اساتید فرهیخته دانشکده بر این جانب فرض است. نخست استاد گرانقدر جناب آقای دکتر بهرام خانی که مرا با صبر و حوصله فراوانشان راهنمایی فرمودند و در طول دوره ی پایان نامه از دانش و فضل ایشان بهره های فراوان بردم.لذا ضمن آرزوی سلامتی و طول عمر برای ایشان، تشکر و امتنان قلبی خود را نسبت به ایشان ابراز میدارم.سپس به اساتید ارجمند و فرزانه، جناب آقای دکتر عبدالکریم هدایتیان و جناب آقای دکتر عبدالعزیز عبدالهی به خاطر اینکه تقبل نمودند که به عنوان اساتید مشاور در طول تدوین این پایاننامه زحمات مرا پذیرا باشند و زحمت مطالعه پایان نامه مرا به عهده گرفتند، و از تمامی اساتید بخش ریاضی که در طول دوره دانشجویی خود از دانش آنها بهره بردم نهایت تشکر و قدردانی خود را اعلام میدارم و برایشان آرزوی سلامتی و طول عمر از خداوند منان مسئلت دارم.

و در آخر،تشکر و قدردانی خود را از صمیم قلب به محضر خانواده عزیز و گرانقدر خود، مادر مهربان و دلسوزم، برادران و خواهران مهربانم که همواره مشوق من در ابراز میدارم اگر چه میدانیم هیچ نوع تشکر و قدردانی، نمی تواند زحمات را که انان در این مسیر متحمل شده اند را جبران کند و یا پاسخگو باشد.

چکیده

عملگرهای کلاس$-J$ و ابردوری بودن

به کوشش
محمد فرهادی

هدف از پایان نامه حاضر تصوری جدید وابسته به دینامیک های خطی است .
در حقیقت در این پایان نامه ما مقاله $J-class\ operator\ and\ hypercyclicity$ نوشته$Georgecostacis\ and\ Antonios\ manoussos$ را مورد بررسی قرار داده ایم
به طور خاص، فرض کنید T عملگر خطی کراندار باشد که بر فضای باناخ X عمل می کند و x بردار ناصفری از فضای X باشد به طوری که برای هر همسایگی باز $U\subset X$ از بردار x و برای هر همسایگی باز $V\subset X$ عدد صحیح و مثبت n موجود باشد به طوری که $T^n(U)\cap V\neq\emptyset$. در این حالت عملگر T را عملگر کلاس $-J$ می نامیم.همچنین کلاس جدیدی از عملگر ها که در خاصیت بالا صادق است و ضمنا مثال های جدیدی را فراهم می کند مورد بررسی قرار می دهیم . همچنین یادآوری می کنیم بسیاری نتایج از نظریه عملگرهای ابردوری با ویژگی این مجموعه قابل مقایسه هستند . برای مثال نتیجه وابسته به قضیه بوردون–فلدمن را اثبات می کنیم و عملگر های انتقال وزنی کلاس$-J$ را دسته بندی می کنیم. همچنین بیان می کنیم که هیچ فضای باناخ جدایی ناپذیر، نمی تواند عملگرهای انتقال توپولوژیکی را پشتیبانی کند. به عنوان مثال فضای $l^\infty(\mathbb{N})$ عملگر های کلاس $-J$ را می پذیرد.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول

مقدمه

فرض کنید X یک فضای باناخ مختلط (حقیقی) باشد. در ادامه این پایان نامه نماد T را برای عملگر خطی و کراندار که بر فضای X عمل می کند بکار می بریم.

ابتدا به معرفی چند نماد می پردازیم، بطورکلی برای هر زیر مجموعه ی C از X نماد های ∂C ، C° و C^{-}به ترتیب مرز مجموعه C ، درون مجموعه C و بستار مجموعه C را مشخص می کند.

نماد $Orb(T,C)$ مدار مجموعه C تحت T را مشخص می کند به عبارت دیگر

$$Orb(T,C) = \left\{T^n x : x \in C , n = 0,۱,۲,\dots\right\}$$

بنابر تعریف بالا اگر $C = \{x\}$ مجموعه ای تک نقطه ای باشد و مدار آن تحت T در فضای Xچگال باشد عملگر T را عملگر ابردوری[1] و بردار x را بردار ابردوری بـرای عملگـر T مـی نـامیم. همچنین اگر داشته باشیم $C = \{\eta x|\eta\epsilon\mathbb{C}\} = \mathbb{C}x$ و مجموعه $Orb(T,C)$ در فضای X چگـال باشد در اینصورت عملگر T را عملگر زبر دوری [2] و بـردار x بـردار زبـر دوری بـرای عملگـر T نامیده می شود.

یک مرجع بسیار خوب از مثال ها و ویژگی های عملگر های ابـردوری و زبـردوری منبـع $\left[۱۷\right]$ اسـت، همچنـین مراجـع $\left[۲۹\right]$ و $\left[۱۸\right]$ و $\left[۲۳\right]$ و $\left[۸\right]$ و $\left[۱۵\right]$ و $\left[۱۹\right]$ و کتـاب$\left[۲\right]$ را مـی تـوان مشاهده و بررسی نمود.

می توان نشان دادکه، اگر T عملگر ابردوری بر فضای باناخ X باشد الزاما باید X فضای باناخ جدایی پذیر باشد. همچنین این عبارت مشهور زیر را برای عملگر T می توان بـه آسـانی نشـان داد که بیان می کند: یک عملگر $T: X \longrightarrow X$ ابردوری است اگـر و فقـط اگـر بـرای هـر جفـت مجموعه باز و ناتهی U و V از فضـای X عـدد صـحیح ومثبـت n موجـود باشـد بطـوری کـه $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

[1] $Hypercyclic$
[2] $Supercyclic$

به طور کلی این پایان نامه دارای دو قسمت اصلی است ، در ابتدا به طریقی ویژگی ابـردوری را با معرفی مجموعه های معینی که آنها را مجموعه $- J$[۱] می نامیم، بصورت موضعی بیان می کنیم.

در نظریه دینامیک های توپولوژیکی مجموعه هـای $- J$ بسـیار معـروف انـد، بـرای آگـاهی بیشتر از کاربرد این مجموعه ها می توان به مرجع [۶] مراجعه کرد .

به طور خلاصه برای یک بردار $x \epsilon X$ مجموعه $J(x)$ را بـه صـورت مجمـو عـه تمـام $y \in X$ تعریف می کنیم که دنباله اکیدا صعودی از اعداد صحیح مثبت مانند $\{k_n\}$ و دنبالـه $\{x_n\} \subseteq X$ موجود باشد به طوری که $\mathrm{T}^{k_n}(x_n) \to y$ و $x_n \to x$.

در قسمت دوم به منظور توسیع مطالعه سیستماتیک و منظم عملگرهایی که مجموعـه $- J$ آنها تحت برداری مانند $x \epsilon X$ یک فضای کامل باشد تلاش می کنیم. همچنین در این قسـمت کلاس جدیدی از عملگرها را معرفی می کنیم که اگرچه با کلاس عملگر های ابردوری متفـاوت است اما برخی شباهت ها را با رفتارهای این نوع عملگرها دارد. در حقیقت دیدن این مطلب که اگر T عملگر ابردوری بر فضای X باشد برای هر بردار $x \in X$ آنگاه $J(x) = X$،کار سختی نمـی باشد.

علاوه بـر ایـن مثـال هـایی از عملگرهـایی مانـند T وجـود دارد کـه بـرای هـر بـردار $x \in X$ ، $J(x) = X$ ، اما عملگر T ابردوری نمی باشد حتی به طور کلیتـر نیـازی نیسـت کـه T عملگـر چنددوری[۲] نیز باشد و این مطلب را با نتایجی از فلـدمن[۳] در مرجـع [۱۶] کـه نشـان داد یـک عملگر شمارا ابردوری [۴] الزاما عملگر چنددوری نمی باشد مقایسه می کنیم.

در قسمت بعد بر فضاهای باناخ جدایی ناپذیر تمرکز می کنیم، به عنوان مثال فضای $l^\infty(\mathbb{N})$ فضـای دنبالـه هـای کرانـدار عملگرهـای کـلاس $- J$[۵] را پشـتیبانی مـی کنـد (قضـیه ۵.۲ را ببینید)یعنی عملگر های کلاس $- J$ بر آنها تعریف می شـود.در حـالی کـه مـی دانـیم فضـای $l^\infty(\mathbb{N})$ عملگرهای انتقال توپولوژیکی[۶] راپشتیبانی نمی کند کـه ایـن مطلـب را مـی تـوانیم در

[1] $J - Set$
[2] $Multi - Cyclic$
[3] $Feldman$
[4] $Countably\ hypercyclic\ operator$
[5] $J - class$
[6] $Topologicaly\ transitive\ operator$

منبع[۳] مشاهده کنیم.

این پایان نامه به صورت زیر سازماندهی شده است

در ابتدا در فصل دوم به بیان قضایا و تعاریف که در بخش های بعد مورد استفاده قرار می گیرد می پردازیم و تاریخچه ای از این نوع عملگر ها نیز ذکر می گردد و در بخش سوم مجموعه های J را تعریف می کنیم و ویژگی های اساسی آنها را مورد بررسی قرار می دهیم.

دربخش چهارم رابطه بین عملگر ابردوری و مجموعه های $J -$ را بررسی کرده، به ویژه نشان می دهیم عملگر $T: X \to X$ ابردوری است اگر و فقط اگر بردار دوری مانند $x \in X$موجود باشد به طوری که $J(x) = X$.

نتیجه اصلی و مهم در بخش پنجم تعمیمی از قضیه معروف به بوردون و فلدمن [1] می باشد که می توان آنرا در مرجع [۱۱] مشاهده نمود.

همچنین نشان می دهیم که اگر x بردار دوری برای عملگر T باشد و مجموعه $J(x)$درون ناتهی باشد، آنگاه $J(x) = X$ و T عملگر ابردوری خواهد بود.

در بخش ششم پایان نامه عملگرهای کلاس$- J$ را معرفی کرده و برخی از ویژگی های آنها را بررسی می کنیم و مثال هایی از عملگر های کلاس$- J$ را ارایه می دهیم که ابردوری نمی باشند، بعبارت دیگر نشان می دهیم اگر T عملگرهای انتقال وزندار یک طرفه و دو طرفه[2] بر فضای دنباله های مربعی جمع پذیر باشد آنگاه عملگر T ابردوری است اگر و فقط اگر عملگر از کلاس$- J$ باشد. در انتها در بخش هفتم از پایان نامه چند سوال باز را مطرح می کنیم.

[1] *Bourdon and Feldman*
[2] *Bilateral backward weighted shift*

فصل دوم

تعاریف و قضایای وابسته

در این فصل از پایان نامه به بیان تعاریف و قضایایی می پردازیم کـه در فصـل هـای بعـد مـورد استفاده قرار می گیرند. اثبات این قضایا را می توان در مراجع ذکر شده یافت همچنین به بیـان تاریخچه ای مختصر از عملگر های ابردوری و **کلاس** J می پردازیم.

تاریخچه عملگرهای ابردوری و کلاس J :

ویژگی ابردوری بودن اولین بار در سال ۱۹۲۹ در یکی از کارهای بیرهوف[۱] مشاهده شده اسـت، وی به وجود تابع تام که انتقال هایش درفضای توابع تحلیلی چگال است پی برد.

سپس دانشمندان آنالیز تابعی با تبعیت از روش مک لین [۲]، به توسعه شاخه ای از ریاضـیات پرداختند، کـه اینـک بـه نـام نظریـه عملگرهـا خوانـده مـی شـود. درسـال۱۹۶۹، رولـوایس [۳]، برعملگرهای انتقال پسرو ومضارب بزرگتر آن تحقیق کرد. کارل کیتایی[۴]، درسـال۱۹۸۲، نشـان دادکه اگرعملگری ابردوری باشد، آنگاه هرمولفه همبند ازطیف آن دایره یکه را قطـع مـی کنـد. درسال۱۹۸۷، شاپیرو وگتنر[۵]، کار رولوایس را روی فضای برگمن توسعه داده وانتقالهـای پسـرو روی این نوع فضاها را بررسی کردند.

در سال ۱۹۹۱، شـاپیرو و گـود فـروی [۶]، ابـردوری بـودن عملگرهـای انتقـال پسـرو را روی فضاهای هاردی بررسی کردند. درسال۱۹۹۵، سالاس[۷]، ابردوری بودن عملگرهای انتقـال وزنـدار

[1] $G. D. Birkhoff$
[2] $G. R. Maclane$
[3] $S. R. Rolewicz$
[4] $C. Kitai$
[5] $R. M. Gethner\ and\ H. Shapiro$
[6] $G. Godefroy$
[7] $H. Salas$

را بررسی کـرد و محـک مخصوصـی را بـرای ایـن عملگرهـا ارئـه داد. درسـال۱۹۹۹، بـوردن [1]، ابردوری بودن عملگرهای انتقال پسرو را روی فضـاهای بـرگمن [2] بررسـی کـرد.سـپس پـریس [3] درسال۲۰۰۱ ، نشان داد کـه عملگرهـای ابـردوری چندگانـه لزومـا ابـردوری هسـتند. پرفسـور ارلیکس [4]، شرط اولیه وجود یک عملگرابردوری بریک فضای محدب موضعی را، جـدایی پـذیری ونامتناهی البعد بودن فضا بیان نموده است . پرفسور شمیم انصاری [5]، بونت و پریس نیز، شرایط شرایط وجودعملگرهای ابردوری برفضاهای برداری توپولـوژیکی رامـورد مطالعـه قـرارداده انـد . سالاس درمقاله ای نشان داده است که بریک فضای هیلبرت ، جدایی پذیر نامتناهی البعد ، می توان عملگرابردوری با الحاق ابردوری ارائه داد.

اکنون تعاریف و قضایا وابسته به این پایان نامه را بیان می کنیم

تعریف (۲-۱) فضای هیلبرت

یک فضای هیلبرت یک فضای برداری H روی میدان برداری $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ همراه با ضرب داخلـی $\langle .,. \rangle$ است به طوریکه نسبت به متر $d(x,y) = \|x-y\|$ ایجاد شده بوسیله ی نرم یک فضای متریک کامل باشد.

تعریف(۲-۲) فضای باناخ

یک فضای نرمدار یک جفت $(X, \|.\|)$ است که X فضای برداری و $\|.\|$ یک نـرم بـر فضـای برداری می باشد. یک فضای باناخ ، فضای نرمدار که با توجه به متریک تعریف شـده بوسـیله ی نرم کامل باشد.

تعریف(۲-۳) عملگر فشرده

عملگر $T: H \to H$ فشرده است اگر و فقط اگر $T(ballH)$ بستار فشرده در فضای H داشته باشد. مجموعه عملگرهای فشرده بر فضای H را با نماد $B_0(H)$ نشان می دهند.

---

[1] P.Bourdon
[2] *Bergman*
[3] *peris*
[4] *Orlicz*
[5] S. I. *Ansari*

تعریف(۲-۴) فضای برداری توپولوژیکی(TVS)

یک TVS یک فضای برداری X روی میدان F همراه با توپولوژی است به طوریکه با توجه به این توپولوژی (۱): نگاشت از $X \times X \to X$ با ضابطه ی $(x, y) \to x + y$ پیوسته باشد

(۲): نگاشت از $F \times X \to X$ با ضابطه ی $(\alpha, x) \to \alpha . x$ پیوسته باشد .

تعریف(۲-۵) نیم نرم[1]

اگر X یک فضای برداری بر میدان F باشد یک نیم نرم تابع $P: X \to [0, \infty)$ است به طوریکه در گزاره های زیر صادق باشد

(۱):به ازای هر $x, y \epsilon X$ آنگاه $P(x + y) \leq P(x) + P(y)$.

(۲):به ازای هر $\alpha \epsilon F$و به ازای هر $x \epsilon X$ آنگاه $P(\alpha x) = |\alpha| P(x)$.

تعریف(۲-۶): فضای موضعا محدب(LCS)

یک LCS در واقع یک TVS همراه با توپولوژی تعریف شده بوسیله ی خانواده ای از نیم نرم های P است به طوریکه

$$\bigcap_{p \in P} \{x |\, p(x) = 0\} = (0)$$

تعریف(۲-۷)

فرض کنید X یک TVS بر میدان $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد. $B(X)$ را مجموعه ی تمامی عملگر های خطی پیوسته بر فضای X می نامیم. اگر $T \epsilon B(X)$ آنگاه مدار عملگر T یا $T - orb$ بردار $x \in X$ به صورت زیر تعریف می گردد

[1] $Seminorm$

تعریف(۲-۸)

عملگر T بر فضای X را عملگر ابردوری می نامیم اگر بردار $x \in X$ موجود باشد بـه طـوری کـه $orb(T,x)$ در فضای X چگال باشد . بردار $x \in X$ یافت شـده در بـالا را بـردار ابـردوری بـرای عملگر T می نامیم و مجموعه تمامی بردارهای ابردوری برای عملگر T با نماد $HC(T)$ نمـایش می دهیم. مشابها عملگر T بر فضای X را عملگر زبر دوری گوییم اگر بردار $x \in X$ موجود باشد بطوریکه$F.orb(T,x) := \left\{\mu\, T^n(x) \middle| \mu \in F \text{ و } n \in \mathbb{N}\right\}$ در فضـای X چگـال باشـد. مجموعـه تمامی بردارهای زبر دوری برای عملگر T را با نماد $SC(T)$ نمایش می دهیم . البته توجه داریم که تعاریف قبل وقتی دارای معنا است که X فضای جدایی پذیر باشد. عملگـر T را چنـد دوری می نامیم هرگاه بردار های x_nو...وx_1 موجود باشد به طوری که $\bigcup_{k=1}^{n} orb(T,x)$.

بردار $x \in X$ برای عملگر T بردار دوری می نامیم هرگاه زیر فضای تولید شده خطی از مجموعه $Orb(T,x)$ در فضای X چگال باشد.

گزاره(۲-۹):

هیچ عملگر ابردوری بر فضای متناهی البعد $X \neq \{0\}$ وجود ندارد.

اثبات: قضیه ۱.۱ از مرجع [۲]را ببینید.

تعریف(۲-۱۰)

یک فضای فرشه یک TVS است که توپولوژی آن بوسیله ی خـانواده ی شـمارا از نـیم نـرم هـا تعریف شده باشد.

تذکر(۲-۱۱):

معمولا فرض می کنیم که X یک فضای فرشه باشد یعنی یک فضـای بـرداری توپولـوژیکی متـر پذیر و کامل است.

قضیه (۲-۱۲) قضیه ی انتقال بیرهوف[1] :

فرض کنید X یک فضای فرشه و جدایی پذیر باشد و $T \in B(X)$ آنگاه گزاره های زیر معادلند

(۱): عملگر T ابردوری است.

[1] $Birkhoff's\ transivity\ theorem$

(۲): عملگر T انتقال توپولوژیکی است ، یعنی بـرای هـر جفـت از مجموعـه هـای بـاز و نـاتهی U و $V \subset X$ عدد صحیح و مثبت n موجود باشد که $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$. در این حالت مجموعه ی $HC(T)$ مجموعه ی چگال و G_δ در فضای X است.

اثبات: قضیه ۱-۱۱مرجع[۲] را ببینید.

قضیه (۲-۱۳):

فرض کنید X یک فضای فرشه و جدایی پذیر باشد و $T \in B(X)$ آنگاه گزاره های زیر معادلند

(۱): عملگر T زبر دوری است.

(۲): برای هر جفت از مجموعه های باز و ناتهی U و $V \subset X$ عـدد صـحیح و مثبـت n و $\mu \in F$ موجود باشد به طوری که $\mu T^n(U) \cap V \neq \emptyset$. در این حالت مجموعـه ی $SC(T)$ مجموعـه ی چگال و G_δ در X است.

اثبات: قضیه ۱-۱۲ مرجع [۲] را ببینید.

گزاره (۲-۱۴):

فرض کنید $T \in B(X)$ آنگاه در اینصورت اگر T ابردوری باشد آنگاه $\sigma_P(T^*) = \emptyset$.

اثبات: قضیه ۱-۱۷ مرجع [۲]را ببینید.

قضیه (۲-۱۵) : فرض کنید X فضای باناخ مختلط و $T \in B(X)$ عملگر ابردوری باشد. آنگاه هر مولفه از $\sigma(T)$ گوی یکه را قطع می کند.

اثبات: قضیه ۱-۱۸ مرجع [۲] را ببینید.

قضیه (۲-۱۶): قضیه تجزیه ریس[1]:

فرض کنید $T \in B(X)$ و اگر طیف عملگـر بـه صـورت $\sigma(T) = \sigma\left(T_1\right) \cup \ldots \cup \sigma(T_n)$ قابـل تجزیه باشد بطوریکه $\sigma(T_i)$ ها بسته و دوبـدو مجـزا باشـد، آنگـاه مـی تـوانیم X را بـه صـورت $X = X_1 \oplus \ldots \oplus X_n$ بنویسیم که X_i ها زیر فضاهای بسته و $T-$پایا هسـتند و طیـف $\sigma(T_i)$ عملگر $T|X_i$ (عملگر T تحدید شده بر X_i) می باشد.

اثبات قضیه ۱- ۱۹مرجع[۲] را ببینید.

---

[1] *Birkhoff's transivity theorem*

قضیه (۲-۱۷):

فرض کنید X فضای باناخ مختلط و $T \in B(X)$ عملگر زبردوری باشد . آنگاه $R \geq 0$ موجود است به طوری که گوی $\{z \mid |z| = R\}$ هر مولفه ای $\sigma(T)$ را قطع می کند.

اثبات: قضیه ۱-۲۴ مرجع [۲] را ببینید.

قضیه (۲-۱۸):

فرض کنید X یک TVS و $T \in B(X)$ عملگر ابردوری باشد . اگر $x \in HC(T)$ آنگاه $F[T]x = \{p(T)x | p \text{ is polynomial}\}$ یک منیفلد ابردوری برای T است.

اثبات: قضیه ۱-۳۰ مرجع [۲] را ببینید.

نتیجه (۲-۱۹):

اگر $T \in B(X)$ عملگری ابردوری باشد آنگاه مجموعه $HC(T)$ همبند است.

اثبات: نتیجه ۱-۳۲ مرجع [2]را ببینید.

قضیه (۲-۲۰):

اگر X فضای فرشه و جدایی پذیر باشد و $T \in B(X)$ عملگر ابردوری باشد آنگاه مجموعه $HC(T)$ با فضای X هومومورفیک است .

اثبات: نتیجه ۱-۳۳ مرجع [2] را ببینید.

تعریف(۲-۲۱)

عملگر B_W که بر فضای $l^2(\mathbb{Z})$ عمل می کند عملگر انتقال وزنی دوسویه پسرو می نامیم و با ضابطه $B_W(e_n) = w_n e_{n-1}$ که در این عبارت $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ پایه کانونی برای $l^2(\mathbb{Z})$ است و $(w_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ دنباله کراندار از اعداد حقیقی مثبت است ، تعریف می کنیم.

دنباله ی $(w_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ را دنباله ی وزنی می نامیم .از طرفی از آنجا که $\|B_W\| \leq \|w\|_\infty$ ، لذا عملگر B_W کراندار است و این عملگر معکوس پذیر است اگر و فقط اگر دنباله ی وزنی از پایین کراندار باشد،یعنی $inf_n w_n > 0$.