دانشگاه شهید چمران اهواز
دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر
گروه آمار

**پایان‌نامه**

**برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته**
**آمار ، گرایش ریاضی**

**عنوان**

# تغییرات ناگهانی فصلی در سری زمانی با استفاده از فضای حالت

استاد راهنما

**دکتر رحیم چینی پرداز**

استاد مشاور

**دکتر غلامعلی پرهام**

پژوهشگر

رضا ذبیحی مقدم

۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: ذبیحی مقدم　　　　نام: رضا

---

عنوان: تغییرات ناگهانی فصلی در سری زمانی با استفاده از فضای حالت

---

استاد راهنما: دکتر رحیم چینی پرداز
استاد مشاور: دکتر غلامعلی پرهام

---

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد　　رشته: آمار　　گرایش: ریاضی

---

دانشگاه: شهید چمران اهواز　　دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر
تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۲　　تعداد صفحات: ۱۴۷

---

واژگان کلیدی: هموار کننده فیلتر کالمن، نقاط پرت، مدل فضای حالت، شکست فصلی، شکست ساختاری

---

**چکیده**

تغییرات فصلی یکی از مباحث سری زمانی است. الگوهای فصلی ممکن است ثابت و یا به آرامی در طول زمان تغییر کنند. گاهی احتمال دارد یک شوک باعث تغییر ناگهانی در رفتار الگوهای فصلی شود. تغییرات ناگهانی در الگوهای فصلی ممکن است به سبب یک رویداد واقعی مانند: تغییر در قوانین، جنگ‌ها، اعتصاب‌ها، بحران‌های سیاسی و یا اقتصادی و غیره باشد. در این رساله تغییرات ناگهانی فصلی در مدل‌های ساختاری فصلی با استفاده از مدل فضای حالت مورد بررسی قرار گرفته و جهت شناسایی این تغییرات از الگوریتم پیشنهادی پنزر (۲۰۰۶) استفاده شده است. سپس کارایی الگوریتم با توجه به روش‌های شبیه سازی، برای شناسایی تغییرات فصلی به دست آمده است.
در پایان با استفاده از داده‌های ازدواج در انگلیس که مربوط به سه ماهه اول ۱۹۶۵ تا سه ماهه آخر ۱۹۷۰ بوده و به صورت فصلی سه ماهه گردآوری شده‌اند به شناسایی تغییرات ناگهانی فصلی پرداخته شده است. نتایج نشان می‌دهد که تغییرات ناگهانی در الگوی فصلی مربوط به سال ۱۹۶۹ بوده که این مسئله تأیید کننده تغییر قوانین اقتصادی در این سال می‌باشد.

تقدیم به مهربانترین پدر و مادر

که پشت هر موفقیتم بوده اند.

# خدایا...[1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آن‌چنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنهاها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

# سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.
اینک که در پرتو بیکران خداوند نگارش این پایان‌نامه به اتمام رسیده است، بر خود لازم می‌دانم که از زحمات بی‌دریغ استاد فرزانه، جناب آقای دکتر رحیم چینی‌پرداز که بر من منت نهاد و راهنمایی اینجانب را به عهده گرفت، کمال تشکر و قدردانی داشته باشم. ایشان در آغاز و انجام این تحقیق همواره باشکیبایی، کوتاهی‌های مرا پوشش داده و با تشویق و رهنمودهای دلسوزانه خود مایه قوت و آرامش من بودند. استادی که هیچ وقت متانت و گشاده‌رویی ایشان در کمک کردن به دانشجویان از نظرم دور نخواهد شد. مهربانی‌های پدرانه ایشان را هرگز فراموش نخواهم کرد.
از دکتر غلامعلی پرهام که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.
همچنین لازم می‌دانم که از تمامی اساتید مهربانم صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که در تمامی طول تحصیل با کمک‌های بی شائبه‌ی خود مرا مورد لطف و عنایت قرار داده و زمینه را برای پیشرفت اینجانب فراهم آورده‌اند.
در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، وجود مقدسشان را ستایش می‌کنم.

رضا ذبیحی مقدم
۱۳۹۲

# فهرست مطالب

# پیشگفتار

الگوهای فصلی یکی از مباحث عمومی سری زمانی اقتصادی می‌باشند که ممکن است ثابت و یا به آرامی در طول زمان تغییر کنند(هاروی ۱۹۸۹ صفحه ۴۰). گاهی ممکن است یک شوک باعث تغییر ناگهانی در رفتار الگوهای فصلی شود. تغییرات ناگهانی در الگوهای فصلی معمولاً به سبب یک رویداد واقعی مانند: تغییر در قوانین، جنگ‌ها، اعتصاب‌ها، بحران‌های سیاسی و یا اقتصادی و غیره به وجود می‌آیند و یا ممکن است ناشی از اشتباه در ثبت داده‌ها و یا نقص و عیب در روند وارد کردن داده‌ها به سیستم باشند. گاهی اوقات در مدل‌های سری زمانی یک داده گمشده و یا تکرار در وارد کردن اطلاعات منجر به تغییر در الگوی فصلی شبیه هنگامی که به مدل شوک وارد شده است، می‌باشد. برخی از اشتباهات از روی نمودار مشخص می شوند اما برخی دیگر برای تشخیص نیاز به تکنیک‌هایی دارد. حضور نقاط پرت و تغییرات ساختاری موجب اریبی جدی در خود همبستگی و خود همبستگی جزئی در نمونه شده و باعث مشکل شدن شناسایی مدل می‌شود، در نتیجه بر پیش‌بینی‌ها تأثیر می‌گذارد. تغییرات فصلی معمولاً به وسیله معرفی متغیرهای رگرسیون ساختگی مدل‌بندی می‌شوند. روش‌های شناسایی تغییرات ناگهانی در مدل‌های فصلی تعمیمی از روش‌های مرسوم استفاده شده در شناسایی حضور نقاط پرت و تغییرات سطح می‌باشد.

کار اصلی در زمینه‌ی نقاط پرت نخستین بار توسط فاکس (۱۹۷۲) برای دو نقطه پرت نوساز و جمع پذیر در مدل اتورگرسیو مطرح گردید. فاکس از نسبت درستنمایی برای برآورد

پارامترها برای معنی‌داری مداخله‌ها استفاده کرده است. سپس باکس و تیائو (۱۹۷۵) با استفاده از معرفی مدل‌های مداخله‌ای، یک روش کلی را برای تعیین موقعیت و نوع نقاط پرت و اصلاح اثرات آن‌ها ارائه نموده‌اند. تسای (۱۹۸۶ و ۱۹۸۸) از روش تکراری برای شناسایی نقاط پرت نوساز، جمع پذیر، تغییرات سطح و تغییرات در واریانس را برای مدل‌های اتورگرسیو میانگین متحرک استفاده کرده است. همچنین اسکات (۱۹۸۷) تاثیر نقاط پرت بر داده‌های فصلی را بررسی کرده است.

کارایی محاسبات برای شناسایی تغییرات ساختاری به دلیل اینکه بسیاری از سری‌های زمانی در عمل ناایستا می‌باشند با استفاده از مدل فضای حالت می‌باشد. مدل فضای حالت یکی از مدل‌های کاربردی و مهم در سری زمانی می‌باشد که بسیاری از مدل‌های خطی و غیر خطی را در بر می‌گیرد. کلاسی از این مدل‌ها، مدل‌های ساختاری می‌باشد که در مقایسه با مدل‌های $ARMA$ کارایی بیشتری دارند زیرا این مدل‌ها، سری زمانی را به مؤلفه‌های مهمی مانند: روند، فصل و اغتشاش تجزیه کرده و در برگیرنده مدل‌های سری زمانی با اجزاء نامنظم می‌باشد. یکی از مهمترین الگوریتم‌ها که برای برآورد پارامترها و پیش بینی انجام می‌گیرد فیلتر کالمن است که یک روش بازگشتی است و نیازی به ایستایی و وارون‌پذیری ندارد. مدل فضای حالت و فیلتر کالمن ابتدا به وسیله کالمن (۱۹۶۰) در سری‌های زمانی معرفی شدند. از آن به بعد دانشمندان بسیاری در این زمینه فعالیت داشتند و در زمینه های مختلف کاربرد آن را گسترش دادند، هاروی و تاد (۱۹۸۳) کلاسی از مدل‌های سری زمانی پارامتری را تحت عنوان مدل‌های ساختاری ارائه کردند.

بررسی شوک‌ها در مدل فضای حالت نخستین بار توسط ویلاسکی و جونس (۱۹۷۶) مطرح گردید و پس از آن‌ها هاروی و داربین (۱۹۸۶) یک مثال عملی را در مدل‌های ساختاری با استفاده از آنالیز مداخله‌ای مورد بررسی قرار دادند. همچنین هاروی و کاپمن (۱۹۹۲) شناسایی نقاط پرت و تغییرات سطح را با استفاده از روش خطای هموارساز شده برای

مدل‌های ساختاری، ارائه نمودند. روش کلی‌تر در فضای حالت توسط دی جانگ و پنزر (۱۹۹۸) مطرح گردید آن ها با استفاده از مداخله‌ای کردن مدل فضای حالت و با استفاده از هموارسازی فیلتر کالمن به بررسی حضور نقاط پرت پرداختند.
هدف این پایان نامه شناسایی تغییرات ناگهانی فصلی در سری‌های زمانی با استفاده از فضای حالت می‌باشد که در آن، یک روش برای تغییرات ناگهانی در مدل فصلی معلوم و موقعیت آن معین گردد. بدین منظور در فصل اول کلیات بحث، معرفی مدل فضای حالت و پیشینه تحقیقات انجام گرفته در رابطه با سری‌های زمانی توأم با نقاط پرت شرح داده شده است. فصل دوم به معرفی مدل‌های ساختاری سری زمانی و الگوریتم فیلتر کالمن اختصاص دارد. در فصل سوم روش شناسایی مداخله با استفاده از الگوریتم فیلتر کالمن در فضای حالت معرفی گردیده است و در فصل چهارم تعمیم آن برای شناسایی تغییرات ناگهانی فصلی در مدل‌های فصلی نشان داده شده است و همچنین بررسی عملکرد آماره‌های تشخیصی با استفاده از برنامه‌های کامپیوتری توسط نگارنده در $Splus$ می‌باشد. فصل پنجم الگوریتم معرفی شده در فصل سوم و چهارم برای داده‌های واقعی فصلی مورد استفاده قرار می‌گیرد. داده‌های مورد استفاده این تحقیق برگرفته از وست و هاریسون (۱۹۹۷) می‌باشند که به صورت فصلی (سه ماهه) و طی سال‌های ۱۹۶۵ تا ۱۹۷۰ گردآوری شده‌اند. در فصل پنجم، ابتدا به این داده‌ها مدل ساختاری فصلی برازش داده شده و سپس آزمون‌های مربوطه انجام می‌گیرد و در آخر با استفاده از الگوریتم فصل چهارم به شناسایی تغییرات ناگهانی فصلی پرداخته شده است.

# فصل ۱
# کلیات

## ۱.۱ مقدمه

سری زمانی مجموعه‌ای از مشاهدات است که برحسب زمان بدست آمده‌اند. استفاده از چنین مشاهداتی بسیار متداول بوده و در اکثر زمینه های علمی از قبیل: ژئوفیزیک، اقتصاد، مهندسی ارتباطات و غیره کاربرد دارند.

تجزیه سری‌های زمانی یک چارچوب پارامتری است که در آن انتخاب مدل عامل اصلی می‌باشد. تجزیه و تحلیل سری‌های زمانی به طور نظری و عملی از سال های ۱۹۷۰ به بعد برای پیش‌بینی و کنترل به سرعت توسعه پیدا کرده است. در این تحلیل‌ها وابستگی بین مشاهدات متوالی است که مورد توجه قرار می‌گیرد و بیشترین کاربرد آن در پیش‌بینی می‌باشد. مهمترین روشی که در تجزیه و تحلیل سری زمانی به منظور پیش‌بینی و برآورد پارامترها صورت می‌گیرد، روش باکس-جنکینز می‌باشد، که نیازمند وارون پذیری و ایستایی در مدل است.

## ۲.۱ سری زمانی

سری زمانی مجموعه‌ای از مشاهدات است که بر حسب زمان مرتب شده‌اند و معمولاً آن را به صورت $y_1, \dots, y_n$ یا $\{y_t, t = 1, 2, \dots, n\}$ نشان می‌دهند که $t$ بیانگر زمانی است که مشاهدات $y$ در آن اندازه‌گیری شده است. این قبیل مشاهدات معمولاً در اقتصاد، قیمت سهام در بازار بورس، شاخص قیمت ماهانه و غیره به‌دست می‌آیند.

## ۳.۱ مفاهیم پایه در مدل سازی سری زمانی

هر سری زمانی دارای ویژگی‌هایی است که با مشخص کردن آن‌ها، می‌توان رفتار سری زمانی را مشخص کرد بعضی از این ویژگی‌ها به صورت زیر می‌باشند:

### ۱.۳.۱ ایستایی

سری ایستا[1] گفته می‌شود، اگر سری $y_t$ برای هر زمان $t = 1, \dots, n$ و هر تأخیر[2]، توزیع توأم متغیرهای $y_{1+k}, y_{2+k}, \dots, \boldsymbol{y}_{n+k}$ با توزیع متغیرهای $y_1, y_2, \dots, y_n$ یکسان باشد. در صورت برقرار نبودن ویژگی ذکر شده، سری زمانی را ناایستا می‌گویند. ممکن است به توان سری‌های زمانی ناایستا را با تفاضل‌گیری از مرتبه‌های مختلف به سری‌های ایستا تبدیل کرد. ایستا بودن سری‌های زمانی از آن جهت اهمیت دارد که نظریه احتمالی سری‌های زمانی معمولاً به سری‌های زمانی ایستا مربوط می‌شود، در نتیجه بهتر است در صورت امکان برای تجزیه و تحلیل یک سری زمانی ابتدا آن را ایستا کرد.

هرگاه میانگین سری نسبت به زمان ثابت باشد،سری را ایستای مرتبه اول و اگر میانگین و واریانس نسبت به زمان ثابت باشند و تابع اتوکوواریانس فقط به تأخیر $k$ بستگی داشته

[1] Stationary
[2] Lag

باشد، ایستایی را ایستایی مرتبه دوم (ضعیف) می‌گویند. لازم به ذکر است در فرآیند نرمال که تمام گشتاورهای آن به گشتاور اول و دوم وابسته است، ایستایی ضعیف و اکید یک معنی دارد.

### ۲.۳.۱ گشتاورهای سری زمانی

#### تابع میانگین

فرض کنید، $\{y_t\}$ برای زمان‌های $t = ۱, \ldots, n$، یک سری زمانی ایستا باشد، آن‌گاه تابع میانگین[۳] این سری به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mu = E(y_t), \qquad t = ۱, \ldots, n \tag{۱.۱}$$

#### تابع اتوکوواریانس

تابع اتوکوواریانس[۴] میزان ارتباط خطی در دو نقطه‌ی سری زمانی را نشان می‌دهد. تابع اتوکوواریانس در تأخیر $k$ام، عبارت است از:

$$\gamma_{t,t+k} = cov(y_t, y_{t+k}), \qquad k = ۰, \pm ۱, \ldots \tag{۲.۱}$$

در سری‌های زمانی ایستا تابع اتوکوواریانس فقط به $k$ بستگی دارد و به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\gamma(k) = cov(y_t, y_{t+k}), \qquad k = ۰, \pm ۱, \ldots \tag{۳.۱}$$

## ۴.۱ مدل فضای حالت

بسیاری از مشاهدات سری زمانی را می‌توان با استفاده از مدل‌های $ARIMA$[۵] مدل‌بندی کرد. اما این مدل‌ها در تجزیه و تحلیل برای برآورد پارامترها و پیش‌بینی با استفاده از روش

[۳] Mean function
[۴] Autocovariance function
[۵] Autoregressive moving average

باکس-جنکینز نیاز به ایستایی و وارون‌پذیری دارند و به همین دلیل می‌توان آن را برای تجزیه و تحلیل به صورت مدل‌های ایستای میانگین متحرک[۶] از مرتبه بینهایت نوشت.

مدل‌های فضای حالت[۷]، که به آن‌ها مدل‌هایی با خاصیت مارکوفی[۸] گفته می‌شود، مدل‌های گسترده‌ای هستند که بسیاری از مدل‌های خطی مانند $ARMA$ و غیرخطی را در برمی‌گیرند. مهمترین ویژگی این مدل‌ها، این است که هرگاه مدلی به شکل فضای حالت نوشته شود با استفاده از الگوریتم‌های خاص در تجزیه و تحلیل، دیگر نیازی به ایستایی و وارون پذیری ندارند. مهمترین این الگورتیم‌ها که در این تجزیه و تحلیل برای برآورد پارامترها و پیش‌بینی مشاهدات صورت می‌گیرد، فیلتر کالمن[۹] می‌باشد که یک روش بازگشتی است و مبتنی بر پیش بینی و هموارسازی است.

مدل‌های فضای حالت ابتدا بوسیله کالمن (۱۹۶۰) و کالمن و بوسی (۱۹۶۱) مطرح گردید. سپس محققین بسیاری آن‌ها را در سایر علوم به کار برده‌اند به عنوان مثال، هاروی و پیرس (۱۹۸۴)، هاروی و تاد (۱۹۸۴) و شاموی و استوفر (۱۹۸۲) در مسائل اقتصادی، جونز (۱۹۸۴) در مسائل پزشکی و شاموی (۱۹۸۵) در علوم زمین به کار بردند.

هاروی و شفرد (۱۹۹۳) با استفاده از این مدل‌ها، مؤلفه‌های مهمی مانند روند، اثرات فصلی و دوره را تحت عنوان مدل‌های ساختاری[۱۰] به صورت همزمان در مدل مطرح کردند. دی جانگ و پنزر (۲۰۰۴) معادلات فضای حالت را برای مدل‌های $ARMA$ به طور کامل مورد بررسی قرار دادند. دی جانگ و پنزر (۱۹۹۸) و پنزر (۲۰۰۶ و ۲۰۰۷) با استفاده از معادلات مداخله‌ای فضای حالت به شناسایی تغییرات ساختاری در مشاهدات پرداختند.

در این بخش مدل فضای حالت معرفی می‌شود و ویژگی‌های آن مورد بررسی قرار می‌گیرند.

[۶] Moving average
[۷] State space
[۸] Markovian property
[۹] Kalman filter
[۱۰] Structural time series

### ۱.۴.۱ شکل کلی فضای حالت

شکل کلی فضای حالت[۱۱] برای مشاهدات $\boldsymbol{y}_t$ برای $t = ۱, ۲, \ldots, n$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boldsymbol{y}_t = Z_t\boldsymbol{\alpha}_t + \boldsymbol{d}_t + \boldsymbol{\epsilon}_t, \qquad t = ۱, ۲, \ldots, n \tag{۴.۱}$$

به معادله (۴.۱) معادله اندازه [۱۲] یا معادله مشاهده گفته می‌شود. در این معادله $\boldsymbol{y}_t$ یک بردار $N \times ۱$ از متغیرهای مشاهده شده، $Z_t$ یک ماتریس $N \times m$، $\boldsymbol{\alpha}_t$ یک بردار $m \times ۱$ با نام بردار حالت، $\boldsymbol{d}_t$ یک بردار ثابت $N \times ۱$ و $\boldsymbol{\epsilon}_t$ یک بردار $N \times ۱$ از اغتشاشات هم توزیع با بردار میانگین صفر و ماتریس کوواریانس $R_t$ می‌باشد. یعنی:

$$E(\boldsymbol{\epsilon}_t) = ۰, \qquad var(\boldsymbol{\epsilon}_t) = R_t$$

بردار مشاهدات $\boldsymbol{y}_t$ با بردار حالت $\boldsymbol{\alpha}_t$ که معمولاً غیرقابل مشاهده هستند در ارتباط می‌باشد. این بردار حالت خود به صورت یک فرآیند مارکوف مرتبه اول به صورت زیر تولید می‌شود:

$$\boldsymbol{\alpha}_t = T_t\boldsymbol{\alpha}_{t-۱} + \boldsymbol{c}_t + V_t\boldsymbol{\eta}_t, \qquad t = ۱, ۲, \ldots, n \tag{۵.۱}$$

معادله (۵.۱) را معادله انتقال[۱۳] می‌نامند. در این معادله $T_t$ ماتریس انتقال با بعد ماتریسی $m \times m$، $\boldsymbol{c}_t$ یک بردار $m \times ۱$، $V_t$ یک ماتریس $m \times g$ و $\boldsymbol{\eta}_t$ بردار اغتشاشات یک بردار $g \times ۱$ می‌باشند که این اغتشاشات از یکدیگر مستقل و دارای بردار میانگین صفر و ماتریس کوواریانس $Q_t$ می‌باشند. یعنی:

$$E(\boldsymbol{\eta}_t) = ۰, \qquad var(\boldsymbol{\eta}_t) = Q_t$$

[۱۱] State space form (SSF)
[۱۲] Measurment equation
[۱۳] Transition equation

این فرآیند مارکوف با بردار حالت اولیه[۱۴] $\boldsymbol{\alpha}_\circ$ شروع می‌شود و دارای میانگین و واریانس زیر می‌باشد:

$$E(\boldsymbol{\alpha}_\circ) = \boldsymbol{a}_\circ, \qquad var(\boldsymbol{\alpha}_\circ) = p_\circ$$

و به صورت پیش فرض در نظر گرفته می‌شود. ساختار بردار حالت برای هر مدل آماری به وسیله مدل آماری تعیین می‌شود، که عناصر آن ممکن است توسط مؤلفه‌هایی که دارای تفسیر واقعی هستند، قابل تشخیص باشد. هدف از فرمول‌بندی فضای حالت ساختن بردار حالت به طریقی است که شامل همه‌ی اطلاعات وابسته تا زمان $t$ بوده و همچنین از تعداد عناصر کمتری برخوردار باشد. لازم به ذکر است که مدل‌های فضای حالت منحصر به فرد نمایش داده نمی‌شوند.

### ۲.۴.۱ فرضیات مدل فضای حالت

برای استفاده از مدل فضای حالت باید دو فرض زیر برقرار باشند:

۱- هنگامی که مدلی به صورت فضای حالت نوشته می‌شود ابتدا باید یک مقدار اولیه برای بردار حالت $\boldsymbol{\alpha}_t$ در نظر گرفته شود. اگر این مقدار اولیه با $\boldsymbol{\alpha}_\circ$ نشان داده شود، دارای میانگین و واریانس زیر است:

$$E(\boldsymbol{\alpha}_\circ) = \boldsymbol{a}_\circ, \qquad var(\boldsymbol{\alpha}_\circ) = p_\circ$$

آماردانان بسیاری در خصوص تصادفی یا غیر تصادفی بودن $\boldsymbol{a}_\circ$و $p_\circ$ و همچنین تأثیر این مقادیر اولیه بر برآورد پارامترها مطالعاتی انجام داده‌اند.

۲- در معادلات فضای حالت اغتشاش‌های $\epsilon_t$ و $\boldsymbol{\eta}_t$ از یکدیگر مستقل می‌باشند. این

[۱۴] Initial state vector

اغتشاش‌ها از بردار حالت اولیه $\boldsymbol{\alpha}_0$ نیز ناهمبسته هستند. یعنی:

$$E(\boldsymbol{\epsilon}_t \boldsymbol{\eta}_s') = 0, \qquad \forall s, t = 1, \ldots, n$$

$$E(\eta_t \boldsymbol{\alpha}_0') = 0$$

$$E(\boldsymbol{\epsilon}_t \boldsymbol{\alpha}_0') = 0, \qquad t = 1, \ldots, n$$

لازم به ذکر است که این اغتشاش‌ها می‌توانند نرمال یا غیرنرمال باشند.
در معادلات فضای حالت به ماتریس‌های $Z_t$، $T_t$، $d_t$، $c_t$، $R_t$، $Q_t$ و $V_t$ ماتریس‌های سیستمی[۱۵]گفته می‌شود. اگر این ماتریس‌ها نسبت زمان ثابت باشند، مدل را مدل زمان-همگن [۱۶] می‌گویند. کلاس مدل‌های زمان-همگن مدل‌های وسیعی هستند که مدل‌های ایستا را می‌پوشانند. ماتریس‌های سیستمی شامل پارامترهای مدل هستند که در صورت نامعلوم بودن این پارامترها باید برآورد شوند. پارامترهایی که در ماتریس‌های $Z_t$، $T_t$، $R_t$ و $Q_t$ هستند خواص تصادفی مدل را تعیین می‌کنند.

**مثال ۱.۴.۱.** مدل قدم تصادفی همراه با اغتشاش[۱۷] زیر را در نظر بگیرید:

$$y_t = \mu_t + \epsilon_t, \qquad \epsilon_t \sim NID^{18}(0, \sigma_\epsilon^2)$$

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \eta_t, \qquad \eta_t \sim NID\ (0, \sigma_\eta^2)$$

که بردار حالت در این مثال فقط یک عضو دارد. همچنین با توجه به این که ماتریس‌های سیستمی نسبت به زمان تغییر نمی‌کنند این مدل زمان-همگن می‌باشد. بنابراین ماتریس‌های سیستمی برای این مدل به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$Z = 1, \qquad T = 1, \qquad V = 1$$

[۱۵] System matrices
[۱۶] Time invariant
[۱۷] Random walk plus noise
[۱۸] $NID$: اغتشاشات دو به دو مستقل و داری توزیع نرمال می‌باشند

### ۳.۴.۱ بردار حالت

بردار $\boldsymbol{\alpha}_t$ که در معادلات فضای حالت، بردار حالت گفته می‌شود با توجه به ساختار مدل سری زمانی برای هر مدل تعیین می‌شود. ممکن است تمام و یا تعدادی از مؤلفه‌های این بردار، متغیرهایی قابل مشاهده نباشند. همچنین تمام اطلاعاتی که در زمان‌های گذشته سری $\boldsymbol{y}_t$ وجود دارند و می‌توانند بر روی $\boldsymbol{y}_t$ تأثیر بگذارند، باید فقط در متغیر حالت $\boldsymbol{\alpha}_t$ قرار داده شوند. بردار حالت لزوماً منحصر به فرد نیست و حتی می‌تواند دارای بعدهای مختلفی باشد. برای بررسی درستی این مطلب فرض کنید $A$ یک ماتریس ناویژه $m \times m$ باشد. بردار حالت جدید $\boldsymbol{\alpha}_t^*$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boldsymbol{\alpha}_t^* = A\boldsymbol{\alpha}_t$$

حال اگر $A$ را در معادله انتقال ضرب کنیم معادله انتقال به صورت زیر در می‌آید:

$$A\boldsymbol{\alpha}_t = AT_tA^{-1}A\boldsymbol{\alpha}_{t-1} + A\boldsymbol{c}_t + AV_t\boldsymbol{\eta}_t$$

همچنین معادلات فضای حالت جدید برای این بردار حالت جدید به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\boldsymbol{\alpha}_t^* = T_t^*\boldsymbol{\alpha}_{t-1}^* + \boldsymbol{c}_t^* + V_t^*\boldsymbol{\eta}_t \tag{۶.۱}$$

$$\boldsymbol{y}_t = Z_t^*\boldsymbol{\alpha}_t^* + \boldsymbol{d}_t + \boldsymbol{\epsilon}_t \tag{۷.۱}$$

که در آن‌ها

$$T_t^* = AT_tA^{-1}, \qquad \boldsymbol{c}_t^* = A\boldsymbol{c}_t, \qquad V_t^* = AV_t, \qquad Z_t^* = Z_tA^{-1}$$

می‌باشند. برای روشن شدن این مطلب مثال زیر را در نظر بگیرید:

**مثال ۲.۴.۱.** مدل $AR(2)$ زیر را در نظر بگیرید:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \epsilon_t$$

که نمایش مدل فضای حالت آن را می‌توان به دو صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} y_t &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_t \\ \boldsymbol{\alpha}_t &= \begin{pmatrix} y_t \\ \phi_2 y_{t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 & 1 \\ \phi_2 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{t-1} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \epsilon_t \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} y_t &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}^*_t \\ \boldsymbol{\alpha}^*_t &= \begin{pmatrix} y_t \\ y_{t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}^*_{t-1} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \epsilon_t \end{aligned}$$

### ۴.۴.۱ خواص مدل فضای حالت زمان همگن

ماتریس‌های سیستمی ممکن است نسبت به زمان تغییر کنند، این موضوع باعث می‌شود که برآورد پارامترهای مدل به سادگی صورت نگیرد. به همین دلیل در بسیاری از کاربردها، مدل فضای حالت، زمان-همگن مورد استفاده قرار می‌گیرد که در این حالت ماتریس‌های سیستمی $Z_t$، $T_t$، $d_t$، $R_t$، $c_t$، $Q_t$ و $V_t$ مستقل از زمان می‌باشند. بنابراین مدل فضای حالت زمان-همگن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boldsymbol{y}_t = Z\boldsymbol{\alpha}_t + \boldsymbol{d} + \boldsymbol{\epsilon}_t, \qquad var(\boldsymbol{\epsilon}_t) = R \tag{۸.۱}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_t = T\boldsymbol{\alpha}_{t-1} + \boldsymbol{c} + V\boldsymbol{\eta}_t, \qquad var(\boldsymbol{\eta}_t) = Q \tag{۹.۱}$$

فضای حالت زمان همگن ویژگی‌هایی را داراست که در ادامه بحث به آن‌ها اشاره خواهد شد. قبل از معرفی این ویژگی‌ها، ابتدا باید در معادله انتقال تغییراتی ایجاد شود به طوری که ماتریس کوواریانس خطای معادله انتقال، یک ماتریس همانی شود.

فرض کنید $V^*$ یک ماتریس $g \times g$ باشد به طوری که $V^*V^{*\prime} = Q$ شود. بنابراین معادله انتقال به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\boldsymbol{\alpha}_t = T\boldsymbol{\alpha}_{t-1} + \boldsymbol{c} + H\boldsymbol{\eta}^*_t \tag{۱۰.۱}$$