دانشگاه الزهراء(س)

دانشکده علوم پایه

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشتهٔ ریاضی کاربردی

عنوان

بررسی مساله اشتراک طرح های بلوکی جهتدار

استاد راهنما

دکتر نسرین سلطانخواه

دانشجو

سمیه السادات احمدی پور

خرداد ماه ۱۳۸۹

قدردانی و تشکر

ربوبیت اقدس او را سپاس وستایش باد که به ما درس معرفت وکلمه شکر آموخت. بروی ما درهای بینش و دانش بگشاد و ما را به سوی معنی توحید و حقیقت اخلاص هدایت فرمود و نعمت دانش و بینش را از برکت اخلاص و توحید به ما ارزانی داشت. «صحیفه سجادیه»

اکنون که به شکرانهٔ الهی و در سایهٔ الطاف ایزد منّان، این پروژه به اتمام رسیده است، بر خود وظیفه می‌دانم از تمامی عزیزانی که راهگشای این پروژه بوده‌اند به ویژه، استاد محترم سرکار خانم دکتر سلطانخواه تشکر و قدردانی نمایم.
همچنین از جناب آقای دکتر محمودیان و سرکار خانم دکتر تجویدی که زحمت داوری این پروژه را به عهده داشتند نهایت تشکر را دارم.
همچنین از نخستین آموزگاران زندگیم، پدر و مادر عزیزم، که در دوران تحصیل صبورانه همراهیم کردند و صبر در آموختن را به من یاد دادند نهایت تشکر را دارم.

چکیده

در این پایان نامه، مساله اشتراک یک جفت طرح بلوکی جهتدار با اندازه بلوک پنج را مورد بررسی قرار می‌دهیم. نشان می‌دهیم به ازای $v \equiv 1,5 \pmod{10}$ و $v \neq 11,15$ اشتراک $DD(v,5,1)-2$ ها با b_v بلوک، مجموعه $J_D(v)=\{0,1,...,b_v-2,b_v\}$ می‌باشد با یک استثنای احتمالی که اشتراک $DD(11,5,1)-2$ ها مجموعه $\{0,1,2,3,11\}$ می‌باشد.

کلمات کلیدی: طرح‌های بلوکی جهتدار، اشتراک طرح‌های بلوکی.

فهرست مندرجات

مقدمه

تعداد بلوک‌های مشترک بین دو طرح بلوکی جهتدار با پارامترهای یکسان t, λ, k, v را طیف اشتراک آن دو طرح گویند.
لیندنر[۱] و والیس [۲] در سال ۱۹۸۲ و به طور مستقل اچ ال فو[۳] در سال ۱۹۸۳ مساله اشتراک سیستم‌های سه‌گانه اشتاینری جهتدار را مورد مطالعه قرار دادند[۱۰، ۲۰]. پس از آن محمودیان و سلطانخواه در سالهای ۱۹۹۵ و ۱۹۹۶ مساله اشتراک سیستم‌های چهارگانه اشتاینری جهتدار را مورد بررسی قرار دادند و این مساله را برای این گروه از طرح‌ها به طور کامل حل نمودند[۲۳، ۲۲].
در این پژوهش در ادامه‌ی نتایج مربوط به اشتراک طرح‌های بلوکی جهتدار، مساله اشتراک سیستم‌های پنج‌گانه اشتاینری جهتدار را مورد بررسی قرار می‌دهیم و در این زمینه نتایجی را بدست می‌آوریم.
– در فصل پیش نیاز، مفاهیم اولیه که در فصل‌های بعد مورد نیاز است، بررسی می‌شود که شامل تعریف مربع لاتین، طرح بلوکی، طرح تقسیم پذیر گروهی (GDD)، طرح بلوکی جزئی (PBD) و ترید می‌باشد. در ادامه لم‌هایی درباره وجود $GDDs$ و $PBDs$ که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند را بیان می‌کنیم و در انتها چند ساختار برای ساختن طرح‌های بلوکی جهتدار بیان می‌کنیم.
– فصل دوم شامل سه بخش است.

• هدف اصلی بخش اول بررسی کامل اشتراک $DD(v, ۳, ۱)$ – ۲ ها است. در ابتدا در دو قضیه ۱.۱.۲ و ۲.۱.۲، وجود $DD(v, ۳, ۱)$ – ۲ ها را با کمک مربعات لاتین خود توان از مرتبه $\left[\frac{v}{۳}\right]$ ثابت می‌کنیم. در ادامه اشتراک این گروه از طرح‌ها را بررسی می‌کنیم که دو روش برای بررسی اشتراک $DD(v, ۳, ۱)$ – ۲ ها بکار می‌گیریم: ۱– روش ترید آف که در تعریف ۳.۴.۱ این روش را توضیح می‌دهیم. ۲– اشتراک مربعات لاتین خودتوان مرتبه $\left[\frac{v}{۳}\right]$. عمده مطالب این فصل برگرفته از [۱۰]

[۱] Lindner
[۲] Wallis
[۳] H. L. Fu

است.

• هدف اصلی بخش دوم، بررسی کامل اشتراک $DD(v,۴,۱)-۲$ ها است. در ابتدای این بخش، ثابت می‌کنیم که تنها دو طرح غیر یکریخت $DD(v,۴,۱)-۲$ ها وجود دارد. در ادامه مساله اشتراک $DD(v,۴,۱)-۲$ ها به ازای مقادیر کوچک $v=۴,۷,۱۰,۱۳,۱۶,۱۹,۲۲,۳۴,۳۷$ را بررسی می‌کنیم. در آخر به ازای مقادیر $v\equiv ۱ \pmod{۳}$ بررسی نشده ، $DD(v,۴,۱)-۲$ ها را با کمک لم‌های ۱.۵.۱ و ۲.۵.۱ و ساختارهای ۱.۶.۱ و ۲.۶.۱ می‌سازیم و با کمک لم‌های ۱۰.۲.۲ تا ۱۲.۲.۲ اشتراک این طرح‌ها را بدست می‌آوریم. عمده مطالب این فصل برگرفته از [۲۳] می‌باشد.

• هدف اصلی بخش سوم، بررسی کامل اشتراک $DD(v,۴,۱)-۳$ ها می‌باشد. که این گروه از طرح‌ها به ازای مقادیر زوج v موجود هستند. در ابتدای بخش، به روش تریدآف و اعمال جایگشت مجموعه اشتراک $DD(v,۴,۱)-۳$ ها به ازای مقادیر $v=۴,۶$ را بدست می‌آوریم. در ادامه و بخش پایانی به ازای مقادیر زوج $v>۶$، $DD(v,۴,۱)-۳$ ها را با کمک $(v,\{۴,۶\},۱)-۳$ طرح می‌سازیم و با کمک لم‌های ۱۳.۲.۲ و ۱۴.۲.۲ مجموعه اشتراک‌های $DD(v,۴,۱)-۳$ ها را بدست می‌آوریم. عمده مطالب این فصل برگرفته از [۲۲] می‌باشد.

– هدف عمده فصل سه، بررسی اشتراک $DD(v,۵,۱)-۲$ ها است. این گروه از طرح‌ها به ازای مقادیر $v\equiv ۱,۵ \pmod{۱۰}$ و $v\neq ۱۵$ موجود می‌باشند. درابتدای فصل راجع به خصوصیات $DD(۱۱,۵,۱)-۲$ بحث می‌کنیم و با توجه به ویژگی‌های این طرح ثابت می‌کنیم حداقل دو طرح غیر یکریخت $DD(۱۱,۵,۱)-۲$ وجود دارد. در ادامه به ازای مقادیر $v=۵,۲۱,۲۵$ اشتراک $DD(v,۵,۱)-۲$ ها را به روش تریدآف بدست می‌آوریم. پس از آن به ازای مقادیر $v\equiv ۱,۵ \pmod{۲۰}$ که $v\geq ۸۵$ و $v\neq ۱۲۵$، $DD(v,۵,۱)-۲$ ها را با کمک لم ۳.۵.۱ می‌سازیم و با کمک لم‌های ۱.۱.۳، ۳.۱.۳ و ۴.۱.۳ مجموعه اشتراک این طرح‌ها را بدست می‌آوریم. در پایان $DD(v,۵,۱)-۲$ ها را به ازای مقادیر $v\equiv ۱۱,۱۵ \pmod{۲۰}$ که $v\neq\{۳۱,۳۵,۵۵,۷۱,۷۵,۹۵,۱۱۵,۱۳۵,۱۵۵,۲۱۵,۲۳۵,۳۳۵\}$ با کمک لم‌های ۴.۵.۱ و ۵.۵.۱ و ساختار ۳.۶.۱ می‌سازیم و با استفاده از نتایج حاصل از لم‌های ۱.۱.۳ تا ۵.۱.۳ اشتراک این طرح‌ها را بدست می‌آوریم.

– در فصل پیوست اشتراک $DD(v,۵,۱)-۲$ ها به ازای مقادیری را که در فصل سوم بررسی نشده‌اند را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. اغلب طرح‌هایی که در این فصل می‌سازیم، بر اساس $BD(v,۵,۲)-۲$ ها و $BD(v,۵,۱)-۲$ ها موجود در [۱، ۳، ۱۸] می‌باشد.

فصل ۱

مفاهیم بنیادی

هدف اصلی این پژوهش مطالعه و بررسی اشتراک طرح‌های بلوکی جهتدار می‌باشد. بدین منظور ابتدا مفاهیم مورد نیاز را بیان نموده و در دو فصل آتی اشتراک طرح‌های بلوکی جهتدار با اندازه بلوک سه، چهار و پنج را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱.۱ مربع‌های لاتین

تعریف ۱.۱.۱ مربع لاتین مرتبه n، یک آرایه $n \times n$ روی مجموعه از n نماد می‌باشد به طوری که در هیچ سطر و ستون آن تکرار نباشد. واضح است که به ازای هر n حداقل یک مربع لاتین از مرتبه n وجود دارد.

تعریف ۲.۱.۱ مربع لاتین $A = (a_{ij})$ مرتبه n را خود توان گوییم هرگاه

$$\forall i \in \{۱, ۲, ..., n\} \quad : \quad a_{ii} = i$$

تبصره۱.۱ به ازای هر n حداقل یک مربع لاتین خودتوان وجود دارد.

مثال ۱.۱ مربع زیر یک مربع لاتین خود توان مرتبه چهار روی مجموعه $\{۱,۲,۳,۴\}$ است.

۲	۴	۳	۱
۳	۱	۲	۴
۱	۳	۴	۲
۴	۲	۱	۳

۲.۱ طرح‌های بلوکی

تعریف ۱.۲.۱ یک طرح بلوکی غیر کامل متعادل، با پارامترهای صحیح و مثبت v,r,k,λ (به طور خلاصه $(v,k,\lambda)-$ ۲طرح)، عبارت است از خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های متمایز V، مانند $B_{۱},B_{۲},...,B_b$ (به نام بلوک‌ها) که در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱) $\circ < k \leq v-۱$.

۲) $|B_j| = k \quad : \quad \forall j \in \{۱,...,b\}$.

۳) هر عضو و هر زوج از اعضای V به ترتیب در r و λ بلوک ظاهر شود.

تعریف ۲.۲.۱ فرض می‌کنیم v,k,t,λ اعداد صحیح مثبت باشند. یک $t-(v,k,\lambda)$ طرح خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های متمایز V، مانند $B_{۱},B_{۲},...,B_b$ (به نام بلوک‌ها) می‌باشد که در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱) $t \leq k \leq v-۱$.

۲) $|B_j| = k \quad : \quad \forall j \in \{۱,...,b\}$.

۳) هر زیر مجموعه t تایی ازعناصر متمایز V دقیقاً در λ بلوک ظاهر شود.

تبصره۱.۲

- هرگاه در یک طرح بلوکی غیر کامل متعادل $(BIBD)$ رابطه $r=k$ و $b=v$ برقرار باشد طرح را متقارن گوئیم.
- $(v,۳,۱)-۲$ طرح را سیستم اشتاینری سه‌گانه می‌نامند و به صورت $STS(v)$ نمایش می‌دهند که این طرح به ازای مقادیر $v \equiv ۱,۳ \pmod{٦}$ موجود است.
- $(v,۴,۱)-۲$ طرح به ازای مقادیر $v \equiv ۱,۴ \pmod{۱۲}$ موجود است.
- $(v,۴,۱)-۳$ طرح را سیستم اشتاینری چهارگانه می‌نامند و به صورت $SQS(v)$ نمایش می‌دهند که این طرح به ازای مقادیر $v \equiv ۲,۴ \pmod{٦}$ و $v \geq ۴$ موجود است.
- $(v,۵,۱)-۲$ طرح به ازای مقادیر $v \equiv ۱,۵ \pmod{۲۰}$ موجود است.
- $(v,۵,۲)-۲$ طرح به ازای مقادیر $v \equiv ۱,۵ \pmod{۱۰}$ موجود است.

مثال ۱.۲ مجموعه‌های (بلوک‌ها) زیر تشکیل یک $(۸,۴,۱)-۳$ طرح می‌دهند:

$$
\begin{array}{lllll}
\{۱,۲,۴,۸\} & \{۲,۳,۵,۸\} & \{۳,۴,٦,۸\} & \{۷,۲,۳,۴\} & \{٦,۱,۲,۳\} \\
\{۴,۵,۷,۸\} & \{۵,٦,۱,۸\} & \{٦,۷,۲,۸\} & \{۲,۴,۵,٦\} & \{۵,۷,۱,۲\} \\
\{۷,۱,۳,۸\} & \{۳,۵,٦,۷\} & \{۴,٦,۷,۱\} & \{۱,۳,۴,۵\} &
\end{array}
$$

تعریف ۱.۲.۳ $(v,k,\lambda)-$ مجموعه تفاضلی (یا به طور خلاصه $(v,k,\lambda)-DS$)، یک زیرمجموعه‌ای $k-$ عضوی B، از گروه آبلی G مرتبه v می‌باشد به‌طوری‌که به ازای هر عضو غیر صفر d از مجموعه G، λ جفت مرتب از اعضای B وجود داشته باشد که تفاضلشان d شود.

تعریف ۱.۲.۴ فرض می‌کنیم $(G,+)$ یک گروه متناهی مرتبه v با عضو همانی صفر، k و λ اعداد صحیح مثبت که $v > k \geq ۲$ باشد. یک $(v,k,\lambda)-$ خانواده تفاضلات (یا به‌طورخلاصه $((v,k,\lambda)-DF$) یک مجموعه $\{D_۱,...,D_l\}$ از زیر مجموعه‌های k عضوی G (به نام بلوک‌ها)

می‌باشد به‌طوری‌که مجموعه $\bigcup\limits_{i=1}^{l} [x-y:\ x,y\in D_i,\ x\neq y]$ شامل هر عضو مجموعه $G\backslash\{0\}$ دقیقاً λ بار باشد.

مثال ۳.۱ مجموعه $\{1,2,7,9,19\}$ یک $DS-(21,5,1)$ در مجموعه $\mathbb{Z}_{21}$ است.

تعریف ۵.۲.۱ فرض می‌کنیم $\{D_1,...,D_l\}$ یک $DF-(v,k,\lambda)$ در گروه جمعی آبلی G باشد. به ازای هر بلوک D_i و هر عضو $g\in G$ مجموعه $D_i+g=\{d+g: d\in D_i\}$ را یک انتقال D_i می‌نامیم. بنابرین بسط مجموعه $[D_1,...,D_l]$ مجموعه انتقالات هر یک از D_i ها است. یعنی:

$$Dev(D_1,...,D_l)=[D_i+g:\ i\in\{1,...,l\},\ g\in G]$$

قضیه ۱.۲.۱ فرض می‌کنیم $[D_1,...,D_l]$ یک $DF-(v,k,\lambda)$ در گروه آبلی جمعی G باشد. آنگاه $(G,\ Dev(D_1,...,D_l))$ یک $(v,k,\lambda)-$ ۲طرح است.

اثبات. تبصره (۴) از مرجع [۱] $\square$

تعریف ۶.۲.۱ فرض می‌کنیم K یک مجموعه از اعداد صحیح و مثبت و λ نیز عددی صحیح و مثبت باشد. طرح متعادل جزیی مرتبه v با پارامترهای λ و K (به‌طورخلاصه $PBD-(K,\lambda)$ یا $PBD(v,K,\lambda)$) عبارت است از دوتایی (V,B) که V مجموعه متناهی از اندازه v و B خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های V (به نام بلوک‌ها) که در دو شرط زیر صدق می‌کند:

۱) اندازه هر بلوک عضوی از مجموعه K باشد.

۲) هر جفت از عناصر متمایز مجموعه V در دقیقاً λ بلوک قرار گیرد.

قرارداد ۱.۱

۱) نمایش $PBD(v,K)$ و $K-PBD$ را زمانی بکار می‌گیریم که $\lambda=1$.

۲) $PBD(v, K \cup k^\star)$ نشان می‌دهد که PBD شامل حداقل یک بلوک اندازه k هست. اگر $k \notin K$ در این صورت PBD تنها یک بلوک از اندازه k دارد.

مثال ۴.۱ مجموعه‌های (بلوک‌ها) زیر تشکیل $PBD(۱۰, \{۳, ۴\})$ می‌دهند:

$\{۲, ۵, ۸\}$	$\{۲, ۶, ۹\}$	$\{۲, ۷, ۱۰\}$	$\{۳, ۵, ۱۰\}$	$\{۴, ۶, ۱۰\}$
$\{۳, ۶, ۸\}$	$\{۳, ۷, ۹\}$	$\{۴, ۵, ۹\}$	$\{۴, ۷, ۸\}$	$\{۱, ۲, ۳, ۴\}$
$\{۱, ۵, ۶, ۷\}$	$\{۱, ۸, ۹, ۱۰\}$			

تعریف ۷.۲.۱ فرض می‌کنیم K یک مجموعه‌ای از اعداد صحیح و مثبت و λ نیز عددی صحیح و مثبت باشد. یک طرح قابل تقسیم گروهی مرتبه v با پارامتر λ و t_i گروه از اندازه g_i که $۱ \leq i \leq r$ (به‌طورخلاصه $(K, \lambda) - GDD$ نوع $(g_۱^{t_۱} g_۲^{t_۲} ... g_r^{t_r})$)، سه‌تایی (V, G, B) می‌باشد که در آن V مجموعه متناهی از اندازه $v = g_۱ t_۱ + g_۲ t_۲ + ... + g_r t_r$، G افرازی از V به گروه‌هایی از اندازه‌های $\{g_i, i = ۱, ۲, ..., r\}$ و B خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های V هست که در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱) اندازه هر عضو B متعلق به مجموعه K باشد.

۲) هر جفت از عناصر متمایز V دقیقاً در λ بلوک یا یک گروه (نه هردو) واقع شود.

۳) $|G| > ۱$.

قرارداد ۲.۱ نمایش $K - GDD$ نوع $(g_۱^{t_۱} g_۲^{t_۲} ... g_r^{t_r})$ را زمانی بکار می‌گیریم که $\lambda = ۱$ باشد.

تبصره ۳.۱

۱) $k - GDD$ نوع n^k را طرح مورب می‌گوئیم. در چنین طرحی $n^۲$ بلوک از اندازه k وجود دارد به‌طوری‌که هر بلوک و هر گروه در دقیقاً یک نقطه اشتراک دارند. این طرح را به‌طورخلاصه به صورت $TD(k, n)$ نمایش می‌دهند.

۲) اگر اندازه بلوک‌ها و گروه‌ها یکسان و $\lambda = ۱$ باشد طرح را یکنواخت گوئیم.

مثال ۵.۱ بلوک‌ها و گروه‌های زیر تشکیل یک $\{۳,۴\}-GDD$ نوع $۳^{۳}۱^{۱}$ را می‌دهند.

گروه‌ها: $\{۱,۲,۳,\}$ $\{۴,۵,۶\}$ $\{۷,۸,۹\}$ $\{۱۰\}$

بلوک‌ها:

$\{۱,۵,۹\}$ $\{۲,۶,۷\}$ $\{۳,۴,۸\}$ $\{۱,۶,۸\}$

$\{۲,۴,۹\}$ $\{۳,۵,۷\}$ $\{۱,۴,۷,۱۰\}$ $\{۲,۵,۸,۱۰\}$

$\{۳,۶,۹,۱۰\}$

تعریف ۸.۲.۱ $۲-(v,۳,۱)$ طرح را یک سیستم سه‌تایی کرکمن[1] می‌نامیم هر گاه بلوک‌های آن را بتوانیم به کلاس‌هایی موازی افراز کنیم. به ازای هر $v\equiv ۳ \pmod{۶}$ یک دستگاه سه‌تایی کرکمن از مرتبه v وجود دارد که آن را با $KTS(v)$ نمایش می‌دهیم.

۳.۱ طرح‌های بلوکی جهتدار

تعریف ۱.۳.۱ $t-$ طرح جهتدار با پارامترهای v,k,λ (به‌طور ساده $t-(v,k,\lambda)DD$)، دوتایی (X,B) می‌باشد که X مجموعه‌ای $v-$ عضوی از نقاط و B مجموعه‌ای از $k-$ تایی‌های مرتب از عناصر متمایز X (به نام بلوک‌ها) می‌باشد به‌طوری‌که هر $t-$ تایی مرتب از عناصر متمایز X در دقیقاً λ بلوک واقع شود.

تبصره ۴.۱

۱) $۲-(v,۳,۱)DD$ که به صورت $DTS(v)$ نیز نمایش می‌دهیم به ازای مقادیر $v\equiv ۰,۱ \pmod{۳}$ موجود است [۱۷].

۲) $۲-(v,۴,۱)DD$ به ازای مقادیر $v\equiv ۱ \pmod{۳}$ موجود است [۳۰].

۳) $۳-(v,۴,۱)DD$ به ازای مقادیر زوج v موجود است [۲۷].

[1] Kirkman

۴) $DD(v,5,1)-2$ به ازای مقادیر $v\equiv 1,5 \pmod{10}$ به استثنای $v=15$ موجود است [۲۹].

مثال ۶.۱ مجموعه‌های مرتب زیر یک $DD(4,4,1)-3$ روی مجموعه $X=\{0,1,2,3\}$ را تشکیل می‌دهد:

$$B: \quad (0,1,2,3)\ (1,0,3,2)\ (2,0,3,1)\ (3,0,2,1)\ (2,1,3,0)\ (3,1,2,0)$$

تعریف ۲.۳.۱ فرض می‌کنیم K مجموعه‌ای از اعداد صحیح و مثبت و λ عددی صحیح و مثبت باشد. یک طرح قابل تقسیم گروهی جهتدار مرتبه v با پارامتر λ و t_i گروه از اندازه g_i که $1\le i\le r$ (به‌طورخلاصه $DGDD-(K,\lambda)$ نوع $(g_1^{t_1}g_2^{t_2}...g_r^{t_r})$)، عبارت است از یک سه‌تایی (V,G,B) است که در آن V مجموعه متناهی از اندازه $v=g_1t_1+g_2t_2+...+g_rt_r$، G افرازی از V به گروه‌هایی با اندازه‌های $\{g_i,\ i=1,2,...,r\}$ و B خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های مرتب V هست که در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱) اندازه هر عضو B متعلق به مجموعه K است.

۲) هر زوج مرتب از عناصر متمایز V در دقیقاً λ بلوک یا یک گروه (نه هردو) واقع می‌شود.

۳) $|G|>1$.

مثال ۷.۱ گروه‌ها و بلوک‌های زیر یک $DGDD-(4,1)$ نوع 2^4 را تشکیل می‌دهند.

گروه‌ها: $\{1,2\}\ \{3,4\}\ \{5,6\}\ \{0,7\}$

بلوک‌ها:
$$\begin{array}{cccc} (7,6,3,2) & (0,4,2,5) & (5,2,4,7) & (2,3,6,0) \\ (5,1,0,3) & (4,0,1,6) & (3,1,7,5) & (6,7,1,4) \end{array}$$

۴.۱ تریدهای معمولی و جهتدار

تعریف ۱.۴.۱ ترید با پارامترهای صحیح و مثبت v,k,t (به‌طورخلاصه $T(t,k,v)$)، دوتایی $(T_۱,T_۲)$ می‌باشد که هریک از T_i ها خانواده‌ای از زیرمجموعه $k-$ عضوی از عناصر متمایز مجموعه $v-$ عضوی V (به‌نام بلوک‌ها) است، که در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱) $۲ \leq t < k < v$.

۲) هرزیرمجموعه $t-$ عضوی از عناصر متمایز V، در تعداد یکسانی از بلوک‌های $T_۱$ و $T_۲$ قرار می‌گیرد.

مثال ۸.۱ دو مجموعه $T_۱$ و $T_۲$ زیر تشکیل یک $T(۲,۳,٦)$ می‌دهند.

$$T \begin{array}{ll} T_۱: & \{۱,۲,۳\}\ \{۱,۴,۵\}\ \{۳,۵,٦\}\ \{۲,۴,٦\} \\ T_۲: & \{۱,۲,۴\}\ \{۱,۳,۵\}\ \{۴,۵,٦\}\ \{۲,۳,٦\} \end{array}$$

تعریف ۲.۴.۱ ترید جهتدار با پارامترهای صحیح و مثبت v,k,t (به‌طورخلاصه $TD(t,k,v)$)، دوتایی $(T_۱,T_۲)$ می‌باشد که هر یک از T_i ها خانواده‌ای از $k-$ تایی مرتب از عناصر متمایز مجموعه $v-$ عضوی V (به نام بلوک‌ها) است، که در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱) $۲ \leq t < k \leq v$.

۲) هر زیر مجموعه مرتب t از عناصر متمایز V، در تعداد یکسانی از بلوک‌های $T_۱$ و $T_۲$ قرار می‌گیرد.

نتیجه۱.۱ از تعریف نتیجه می‌شود که، تعداد بلوک‌ها در دو خانواده $T_۱$ و $T_۲$ یکسان می‌باشد و این مقدار را حجم ترید گوئیم و بانماد m نمایش می‌دهیم:

$$vol\ T = |T_۱| = |T_۲| = m.$$

مثال ۹.۱ دو مجموعه $T_۱$ و $T_۲$ زیر تشکیل یک $DT(۲,۳,۴)$ می‌دهند.

$$T \quad \begin{array}{l} T_۱ : \quad (۱,۲,۳)\ (۲,۱,۴) \\ T_۲ : \quad (۲,۱,۳)\ (۱,۲,۴) \end{array}$$

لم ۱.۴.۱ به ازای هر $m \geq ۲$ حداقل یک $DT(۲,k,v)$ و یک $DT(۳,k,v)$ از حجم m وجود دارد با یک استثنای که $DT(۳,۴,v)$ از حجم سه ($m = ۳$) وجود ندارد.

اثبات. قضیه (۴) از مرجع [۲٦] □

تعریف ۳.۴.۱ فرض می‌کنیم D یک $t-$ طرح جهتدار(معمولی) با پارامترهای v,k,λ و مجموعه بلوک B با اندازه b_v و $T = (T_۱, T_۲)$ نیز یک ترید جهتدار (ترید معمولی) از حجم m با پارامترهای v,k,t باشد. T را مشمول در D گوئیم هرگاه $T_۱ \subseteq B$. اگر در طرح D، $T_۲$ را به جای $T_۱$ قرار دهیم طرح جهندار(معمولی) دیگری با همان پارامترهای طرح قبلی بدست می آید به‌طوری‌که دو طرح در $b_v - m$ بلوک مشترکند (m حجم ترید T) به این روش که برای تولید طرح‌های متفاوت با پارامترهای یکسان بکار گرفته می‌شود روش « ترید آف» گوئیم.

مثال ۱۰.۱ فرض می‌کنیم D یک $(۷,۳,۱) - ۲$ طرح روی مجموعه $V = \{۱,۲,...,۷\}$ باشد:

$$\{۱,۲,۴\} \quad \{۲,۳,۵\} \quad \{۳,۴,٦\} \quad \{۴,۵,۷\} \quad \{۵,٦,۱\} \quad \{٦,۷,۲\} \quad \{۷,۱,۳\}$$

در طرح D ترید $T(۲,۳,۷)$ زیر قرار دارد:

$$T \quad \begin{array}{l} T_۱ : \quad \{۱,۳,۷\}\ \{۱,۵,٦\}\ \{۲,۳,۵\}\ \{۲,٦,۷\} \\ T_۲ : \quad \{۱,۳,۵\}\ \{۱,۷,٦\}\ \{۲,۳,۷\}\ \{۲,٦,۵\} \end{array}$$

حال با جایگزین کردن بلوک‌های $T_۲$ در طرح D طرح $D_۱$ با همان پارامتر طرح D بدست می آید به‌طوری‌که دو طرح در سه بلوک مشترک هستند.

تعریف ۴.۴.۱ اشتراک $t-(v,k,\lambda)DD$، تعداد بلوک‌های مشترک بین دو طرح جهتدار با پارامترهای یکسان v,k,λ را گوئیم. نمادهای $J_D(v)$ و $I_D(v)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:
برای $t=3$ و $k=4$:

$$J_D\,(v)=\{0,...,b_v\}-\{b_v-3,b_v-1\}$$

برای $t=2$ و هر k:

$$J_D\,(v)=\{0,...,b_v\}-\{b_v-1\}$$

$$I_D(v)=\{m\mid \text{دو } t-(v,k,\lambda)DD \text{ با } m \text{ بلوک مشترک موجود باشد}\}$$

در واقع $J_D(v)$ حجم‌های ممکن یک $DT(t,v,k)$ است.

لم ۲.۴.۱ $I_D(v)\subseteq J_D(v)$.

اثبات. فرض می‌کنیم D_1 و D_2 دو $t-(v,k,\lambda)DD$ باشد به‌طوری‌که $|D_1\cap D_2|=b_v-m$ و $0\leq m\leq b_v$. مجموعه بلوک‌های متفاوت در D_1 و D_2 یک $T=(T_1,T_2)$ از حجم m را تشکیل می‌دهند که $T_1=D_1-D_2$ و $T_2=D_2-D_1$.

□

۵.۱ لم‌های وجودی

در این بخش برخی لم‌های مربوط به وجود PBD و GDD را بیان می‌کنیم.

لم ۱.۵.۱ به ازای $v\equiv 0 \pmod 3$ که $v\neq 9,18$ یک $GDD-(4,1)$ نوع 3^i6^j مرتبه v وجود دارد.

اثبات.

- طرح تقسیم پذیر گروهی مورد نظر به ازای $v\equiv 0,3 \pmod{12}$، با حذف کردن یک عضو از $(v+1,4,1)-2$ طرح بدست می‌آید.
- طرح تقسیم پذیر گروهی مورد نظر به ازای $v\equiv 6,9 \pmod{12}$، با حذف کردن یک عنصر از بلوک اندازه ۷، $PBD(v+1,\{4,7^\star\})$ بدست می‌آید که وجود این PBD در [۴] ثابت شد.

□

لم ۲.۵.۱ به ازای $v \equiv ۲,۵ \pmod{٦}$ به استثناء $v \in \{۸, ۱۱, ۱۷\}$ یک $(۴,۱) - GDD$ نوع $۲^i۵^j$ مرتبه v وجود دارد.

اثبات.

- به ازای $v \equiv ۵ \pmod{٦}$ و $v \neq ۱۱, ۱۷$، یک $(۴,۱) - GDD$ نوع $۲^i۵^\star$ وجود دارد [۴].
- به ازای $v \equiv ۲ \pmod{٦}$ و $v \neq ۸$ یک $(۴,۱) - GDD$ نوع ۲^i وجود دارد [۵].

بنابرین به ازای $v \equiv ۲,۵ \pmod{٦}$ که $v \neq ۸, ۱۱, ۱۷$ یک $(۴,۱) - GDD$ نوع $۲^i۵^j$ وجود دارد.

□

گزاره ۱.۱ شرط لازم برای وجود $(v, \{۵, w^*\}) - PBD$ این است که:

۱) $v \geq ۴w + ۱$.

۲) $v \equiv w = ۱ (\bmod ۴)$.

۳) $v \equiv w (\bmod ۲۰)$ یا $v + w = ٦ (\bmod ۲۰)$.

اثبات. قضیه (۱٦) از مرجع [٦]. □

لم ۳.۵.۱

۱) به ازای $v \equiv ۱,۵ \pmod{۲۰}$ که $v \geq ۱۰۱$ و $v \neq ۱۴۱$ یک $(v, \{۵, ۲۵^*\}) - PBD$ وجود دارد.

۲) به ازای $v \equiv ۱,۵ \pmod{۲۰}$ که $v \geq ۸۵$ و $v \neq ۱۲۵$ یک $(v, \{۵, ۲۱^*\}) - PBD$ وجود دارد.

اثبات. لم‌های (۳.۱۱) و (۳.۱۰) از مرجع [۷]. □

لم ۴.۵.۱ به ازای همه $n \geq ۵$ به استثنای $n \in \{۷, ۸, ۱۰, ۱٦\}$ یک $\{۵, ٦\} - GDD$ نوع ۵^n وجود دارد.

اثبات. قضیه (۳۷) از مرجع [۲۱]. □

لم ۵.۵.۱ به ازای $u \equiv ۰, ۲ \pmod{۵}$ و $u \neq ۷$ یک $\{۵, ٦\} - GDD$ نوع M مرتبه u وجود دارد به‌طوری‌که

$$M \subseteq \left\{ \begin{array}{c} ۲, ۵, ۱۰, ۱۲, ۱۵, ۱۷, ۲۰, ۲۲, ۳۲, ۳۵, ۳۷, ۴۰, ۴۲, ۴۵, ۴۷ \\ ۵۰, ۵۲, ۵۵, ۵۷, ٦۷, ۷۵, ۷۷, ۸۰, ۸۲, ۹۲, ۱۰۵, ۱۰۷, ۱۱۰ \\ ۱۱۲, ۱۱۵, ۱۱۷, ۱۲۰, ۱۲۲, ۱۳۲, ۱٦۷ \end{array} \right\}$$

اثبات. لم (۵.۱٦) از مرجع [۲۹]. □

لم ٦.۵.۱ به ازای $۰ \leq u \leq ۵t$ که $t \notin \{۲, ۱۷, ۲۳, ۳۲\}$ و $t \geq ۱$ یک $\{۵, ٦\} - GDD$ نوع $۵^{۴t+۱}u$ وجود دارد.

اثبات. لم (۳.۹) از مرجع [۲۵]. □

٦.۱ ساختارها

فرض می‌کنیم سه‌تایی (V, G, B) یک طرح قابل تقسیم گروهی با گروه‌های $G_۱, G_۲, ..., G_t$ باشد. و تابع وزن $w : V \to \mathbb{Z}^+ \cup \{۰\}$ را در نظر می‌گیریم به‌طوری‌که به ازای هر بلوک $b = \{b_۱, b_۲, ...b_k\} \in B$ یک $K - GDD$ از نوع $\{w(b_۱), w(b_۲), ..., w(b_k)\}$ موجود باشد. در این صورت $K - GDD$ از نوع زیر موجود است:

$$[\sum_{x \in G_۱} w(x), \sum_{x \in G_۲} w(x), ..., \sum_{x \in G_t} w(x)]$$

ساختار ۱.٦.۱ اگر سه‌تایی (V, G, B)، یک طرح قابل تقسیم گروهی مرتبه v با اندازه بلوک چهار و گروه‌های g که $|g| \equiv ۰ \pmod{۳}$ باشد. آنگاه یک $DD(۲v + ۱, ۴, ۱) - ۲$ وجود دارد.

اثبات. فرض می‌کنیم سه‌تایی (V, G, B) طرح قابل تقسیم گروهی مورد نظر روی مجموعه عناصر V باشد. یک $DD(۲v + ۱, ۴, ۱) - ۲$ روی مجموعه عناصر $V \times \mathbb{Z}_۲ \cup \{\infty\}$ به صورت زیر می‌سازیم:

- هر بلوک $b = \{x, y, z, w\} \in B$ را با یک $(۴, ۱) - DGDD$ نوع $۲^۴$ که روی مجموعه $b \times \mathbb{Z}_۲$ با گروه‌های $\{x\} \times Z_۲$, $\{y\} \times Z_۲$, $\{z\} \times Z_۲$, $\{w\} \times Z_۲$ ساخته می‌شود جایگزین می‌کنیم.