بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده‌ی علوم

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی—تحقیق در عملیات

موضوع:

کنترل بازخورد حالت نزدیک به بهینه سیستم های غیرخطی مقید با استفاده از رهیافت شبکه عصبی HJB

نگارش:

سیده فاطمه‌زهرا حسینی

استاد راهنما:

دکتر محمد رضا پیغامی

استاد مشاور:

دکتر علی ذاکری

آبان ۱۳۸۹

اظهار نامه دانشجو

موضوع پا یان نامه: کنترل بازخورد حالت نزدیک به بهینه از سیستم های با ساختار غیرخطی با استفاده از رهیافتHJB شبکه عصبی

استاد راهنما: دکتر محمد رضا پیغامی

نام دانشجو: سیده فاطمه‌زهرا حسینی

شماره دانشجویی: ۸۷۰۵۷۰۴

اینجانب سیده فاطمه‌زهرا حسینی دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات دانشکده علوم دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی گواهی می‌نمایم که تحقیقات ارائه شده در این پایان‌نامه توسط شخص اینجانب انجام شده و صحت و اصالت مطالب نگارش شده مورد تأیید می‌باشد و در مورد استفاده از کار دیگر محققان به مرجع مورد استفاده اشاره شده است. همچنین گواهی می‌نمایم که مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی توسط اینجانب یا فرد دیگر در هیچ جا ارائه نشده است و در تدوین متن پایان‌نامه آئین‌نامه مصوب دانشگاه را به طور کامل رعایت کرده‌ام.

امضاء دانشجو:

تاریخ:

فرم حق طبع و نشر و مالکیت نتا یج

تشکر و قدردانی

شکر خداوند متعال را به جای آورده که توفیق نصیب من کرد تا این پایان نامه را به پایان برسانم. نگارنده بر خود فرض می‌داند که از زحمات بی‌دریغ، تلاش‌های بی‌وقفه و راهنمایی‌های ارزشمند استاد گرامی جناب آقای دکتر محمدرضا پیغامی در راستای انجام این پروژه در طول این مدت تشکر و قدردانی نماید. از آقایان دکتراسماعیل خرم (داور خارجی)، دکتر محمود هادیزاده (داور داخلی) و دکتر علی ذاکری (استاد مشاور)، نیز به جهت خواندن این رساله و پیشنهادات ارزنده‌شان تشکر می‌کنم.

در پایان از کلیه کسانی که در طول دورهٔ کارشناسی ارشد و نیز دورهٔ کارشناسی راهنمای علمی اینجانب بوده‌اند و مرا در این راه یاری کرده‌اند صمیمانه تشکر می‌نمایم. بخصوص از پدر و مادر دلسوزم و همسر مهربانم که در جهت تحصیل اینجانب از هیچ کوششی دریغ نورزیدند و همواره مشوق من بودند تشکر و قدردانی می نمایم و امیدوارم با تقدیم این رساله به آنها توانسته باشم قسمت کوچکی از زحمات آنها را پاسخ داده باشم.

چکیده

دراین پایان‌نامه، بهینه‌سازی مقید سیستم‌های غیرخطی مورد بررسی قرار می‌گیرد. یک روش پیچیده برای به‌دست آوردن کنترل بازخورد حالت نزدیک به بهینه، با توجه به فرضیات عملگر اشباع، قیود فضای حالت با ملزومات کنترل حداقل زمان مورد بررسی قرار گرفته است. قیود این مباحث توسط توابع غیردرجه‌دوم خاص ، برای تبدیل به فرمول بهینه کدگذاری شده‌اند. هدف اصلی تحقیق بدست آوردن جواب تقریبی معادله هامیلتون—ژاکوبی—بلمن (HJB) می‌باشد. با استفاده از شبکه‌های تقریب غیرخطی، یک جواب بافرم به طور تقریبی بسته به‌صورت تابع مقدار از معادله (HJB) محاسبه شده است، به‌طوری که برای تعیین کنترل بازخورد حالت به‌کارگرفته می‌شود. جواب از یک مجموعهٔ فشرده درون ناحیه‌ای که پایدار مجانبی است بدست می آید.

کلمات کلیدی :محرک اشباع، قیود حالت، کنترل حداقل زمان، شبکه عصبی، کنترل بهینه

فهرست مندرجات

فهرست شکل‌ها

پیش‌گفتار

این پایان‌نامه به بهینه‌سازی دستگاه معادلات غیرخطی مقید، پرداخته است.در اغلب موارد معادله معروف هامیلتون—ژاکوبی—بلمن (HJB) [1] به کار گرفته شده است. توجه ما بدست آوردن جواب معادله HJB به‌صورت یک فرم بسته، با استفاده از قضیه تقریب متوالی می‌باشد.

یک راه‌حل تقریبی جواب HJB، استفاده از روش عمومی HJB یعنی $(GHJB)$ [2] می‌باشد. هر چند $GHJB$ به‌ازای مقادیر مشتق تابعی‌مقدار، خطی است، لیکن HJB به‌ازای مقادیر مشتق تابعی‌مقدار، غیرخطی می‌باشد، لذا روش تقریب متوالی با استفاده از$GHJB$ برتری بیشتری نسبت به روش تقریب متوالی با استفاده ازHJB دارد. توجه کنید که روش تقریب متوالی، کنترل پایدار فرضی مقدماتی را بهبود می‌بخشد.

ذکر این نکته مفید است که معادله $GHJB$ ساده‌تراز معادله HJB حل می‌شود، اما یک جواب فرم کلی قابل دسترس برای این معادله وجود ندارد.

یک روش حل تکراری بسیار جالب معادله HJB که برگرفته از راه‌حل‌های فرم بسته می‌باشد، روش تقریب گالرکین می‌باشد که در هر تکرار، یک جواب تقریبی به‌صورت تابعی مقدار بدست می‌آید.طرز عمل این روش باقرار دادن جواب $V(x)$ در معادلات دیفرانسیل در یک فضای هیلبرت است، به‌طوری‌که آن را به یک مجموعه فشرده درون یک ناحیه پایدار از یک کنترل پایدار مقدماتی شناخته شده محدود می‌کند. روش‌های گالرکین مستلزم ارزیابی انتگرال‌های عددی می‌باشند.

---
[1] Hamilton-Jacobi-Belman equation

[2] Generalized Hamilton-Jacobi-Belman equation

برای آن‌که قیود در معادله HJB، قابلیت کدگذاری را پیدا کنند، از توابع انجام [۳] غیردرجه‌دوم استفاده می‌کنیم که در این‌جا به سه مورد محرک اشباع [۴]، قیود حالت [۵] و مساله کنترل حداقل زمان [۶] اشاره شده است.(لازم به ذکر است در بعضی کتاب‌ها و مقالات ،از تابع انجام به نام‌های دیگر تابع عملکرد ویا تابعی معیار نیز معرفی شده است.)

در محرک اشباع یک تابع مانعی [۷] غیردرجه‌دوم برای بردار کنترل مطرح می‌شود، که باعث کراندار شدن بردار کنترل برای معادله HJB می‌شود.

درقیود حالت، قوانین کنترل را چنان بهبود می‌بخشیم که در قیود فضای حالت مخصوص صدق کند.

در مساله کنترل حداقل زمان هدف سوق دادن سیستمی با کنترل اشباع‌شده به سوی مبدأ در کوتاه‌ترین زمان ممکن می‌باشد. به این منظور، تابع انجام خاصی معرفی می‌گردد.

در آخر تقریب شبکه عصبی از تابعی‌مقدار، با به کارگیری روش حل متوالی در جهت کمترین مربعات روی مجموعهٔ فشرده از ناحیه پایداری Ω را معرفی می‌کنیم که با استفاده از این روش‌ها کنترل بازخورد حالت نزدیک به بهینه را با توجه به فرضیات عملگر اشباع، قیود فضای حالت با ملزومات کنترل حداقل زمان، را بدست می‌آوریم سپس برتری این روش را نسبت به سایر روش‌ها در چند مثال نشان می‌دهیم. پایان‌نامه مشتمل بر چهار فصل به شرح زیراست:

فصل اول به ارائه برخی مفاهیم اولیه و تعاریف مورد نیاز برای فصول آتی پرداخته است.

فصل دوم به معرفی روش‌های تقریب متوالی برای بدست آوردن جواب معادله HJB پرداخته است.

فصل سوم به قضایای مربوط به همگرائی و پایداری روش‌های مطرح‌شده در فصل دوم اختصاص یافته است.

---

[۳] performance functional

[۴] Actuator saturation

[۵] State constraints

[۶] Minimum-time control

[۷] penalty function

در فصل آخر روش کنترل نزدیک به بهینه بااستفاده از رهیافت HJB شبکه‌عصبی، را با روش‌های دیگر مطرح‌شده مقایسه می‌کنیم. در نهایت با ارائه مثال‌های عددی متنوع به بررسی رفتار عددی نتایج نظری این فصول می‌پردازیم.

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف اولیه

۱.۱ کنترل بهینه

این بخش را با برخی تعاریف اولیه در خصوص مساله کنترل بهینه شروع می‌کنیم. برای مطالب بیشتر به [1] رجوع شود.

تعریف ۱.۱.۱ کنترل قابل‌قبول

سیگنال[۱] کنترلی که در تمام لحظات بازه زمانی $[t_\circ, t_f]$ در محدودیت‌های کنترل صدق نماید به کنترل قابل‌قبول [۲] معروف است.

تعریف ۲.۱.۱ مسیر قابل‌قبول

منحنی مسیر متغیر حالت که در تمام لحظات بازه زمانی $[t_\circ, t_f]$ در محدودیت‌های متغیر حالت صدق نماید، منحنی مسیر قابل‌قبول [۳] نامیده می‌شود.

---

[۱] Signal

[۲] admissible control

[۳] admissible trajectory

مجموعه قابل‌قبول یک مفهوم مهمی است زیرا مقادیری که متغیرهای حالت یا کنترل‌ها می‌توانند بپذیرند را در محدودهٔ کوچکتری قرار می‌دهد و به جای در نظر گرفتن تمام متغیرهای حالت و کنترل، و انتخاب بهترین حالت، فقط متغیرهای حالت و کنترلی را در نظر می‌گیریم که قابل قبول هستند.

تعریف ۳.۱.۱ تابع انجام

تابع انجام[۴] تابعی برای ارزیابی کمی عملکرد یک سیستم می‌باشد که توسططراح انتخاب می‌شود. در یک سیستم بهینه به دنبال مقید کردن این تابع انجام هستیم.

در این پایان‌نامه، فرض بر این است که عملکرد سیستم با تابع انجامی به شکل زیر سنجیده و یا ارزیابی می‌شود:

$$J = \int_{t_\circ}^{t_f} L(x(t), u(t))dt$$

که در آن $t_\circ$ و t_f به ترتیب زمان شروع و زمان نهایی بوده و L تابعک روی فضای حالت و کنترل می‌باشد. زمان t_f می‌تواند بر حسب مسئله داده شده معلوم یا مجهول باشد.

شروع از شرط اولیهٔ $x(t_\circ) = x_\circ$، و اعمال سیگنال کنترل $u(t)$ برای $t \in [t_\circ, t_f]$ باعث می‌شود که سیستم، منحنی مسیر حالتی را تعقیب کند. تابع انجام به هر منحنی مسیر سیستم، یک عدد حقیقی نسبت می‌دهد.

اکنون با توجه به مطالب فوق به‌بیان صریحی از مسئله کنترل بهینه می‌پردازیم.

۱.۱.۱ مساله کنترل بهینه

یک مساله کنترل بهینه عبارت است از پیدا کردن کنترل $u^* \in U$ به‌طوری‌که باعث شود سیستم

$$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t))$$

[۴] performance functional

مسیر $x^* \in X$ را به منظور حداقل کردن تابع انجام زیر تعقیب کند:

$$J = \int_{t_\circ}^{t_f} L(x(t), u(t))dt$$

که درآن U مجموعه کنترل‌های قابل قبول، $x \in \mathbb{R}^n$ را متغیر حالت و $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ را متغیر کنترل می‌باشد و $a(x(t), u(t))$ تابعی از متغیرهای کنترل و حالت می‌باشد.

تعریف ۴.۱.۱ اگر یک رابطه تابعی به‌صورت $u^*(t) = f(x(t).t)$ بتواند برای کنترل بهینه در زمان t به‌دست آید،آنگاه تابع f، قانون کنترل بهینه [5] نامیده می‌شود.

۲.۱.۱ مساله افق زمان نامتناهی

مساله افق زمانی نامتناهی [6] مورد توجه آن دسته از سیستم های غیرخطی که توسط معادلات دیفرانسیل معمولی توصیف شده‌و نسبت به کنترل، آفین می باشنداست. به این معنا که

$$\dot{x}(t) = f(x) + g(x)u(x) \qquad (۱.۱)$$

که در آن $x \in \mathbb{R}^n$ ، $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$، $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ و $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ، طوری‌که که g و f پیوسته لیپ‌شیتس روی Ω می باشند کهΩ شامل مبداء مختصات است. همچنین فرض کنید $f(\circ) = \circ$.
همچنین $\varphi(t; x_\circ, u)$ جواب معادله (۱.۱) در زمان t با شرایط اولیه $x_\circ$ و کنترل u می‌باشد. در این‌صورت برای مساله افق زمانی نامتناهی مفاهیم زیر را داریم [5].

تعریف ۵.۱.۱ کنترل پایدار

اگر در مساله افق زمانی نامتناهی سه شرط زیر صادق باشد، آن‌گاه گوئیم کنترل $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

[5] Optimal control law

[6] Infinite -Time Horizon Program

سیستم(۱.۱) را حول صفر روی مجموعه $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ پایدار می‌سازد هرگاه

- $f(\circ) + g(\circ)u(\circ) = \circ$
- به‌ازای هر $\varepsilon > \circ$ وجود داشته باشد $\delta > \circ$ به‌طوری‌که

$$\| x_\circ \| < \delta \rightarrow \quad \| \varphi(t; x_\circ, u) \| < \varepsilon, \quad \forall t \geq \circ, \quad \forall x_\circ \in \Omega.$$

- $\forall x_\circ \in \Omega, \quad \| x_\circ \| < \delta \rightarrow \quad \lim_{t\rightarrow\infty} \| \varphi(t; x_\circ, u) \| = \circ$

برای کنترل پایداری سیستم، از تابع انجام‌استفاده می‌کنیم. در انتخاب تابع انجام، طراح سعی می کند که یک تابع ریاضی چنان تعریف کند که وقتی آن تابع حداقل می‌شود، نشان دهد که سیستم در مطلوب‌ترین وضعیت خود عمل می‌نماید. بنابراین انتخاب تابع انجام، ترجمه فیزیکی مورد لزوم سیستم در قالب عبارات ریاضی می‌باشد.

تعریف ۶.۱.۱ تابع حقیقی مقدار $\ell : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ را به طور یکنواخت صعودی بر دامنه Ω به ازای تمام $x, y \in \Omega$ گوئیم اگر

$$\| x \| < \| y \| \quad \rightarrow \quad \ell(x) < \ell(y).$$

تعریف ۷.۱.۱ تابع $\ell : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ را معین مثبت[۷] گوییم اگر

$$\forall x \neq \circ, x \in \Omega \quad \ell(x) > \circ \quad , \quad x = \circ \rightarrow \ell(x) = \circ$$

تعریف ۸.۱.۱ تابع انجام استاندارد

تابع انجام استاندارد، یک تابع انتگرال از مسیرهای کنترل و حالت به‌صورت زیر می‌باشد:

$$J(x_\circ, u) = \int_\circ^\infty [\ell(\varphi(t)) + \| u(\varphi(t)) \|_R^{۲}] dt \qquad (۱.۲)$$

[۷] Positive semidefinite

که در آن $\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع به‌طور یکنواخت صعودی روی Ω و معین مثبت می‌باشد و $R \in \mathbb{R}^{m\times m}$ یک ماتریس معین مثبت و متقارن است و $\| u(\varphi(t)) \|_R^2 = u^T R u$ و $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ می باشد. ℓ را تابع مانعی [۸] حالت و $\| u(\varphi(t)) \|_R^2$ را تابع مانعی کنترل گوئیم. به طور نوعی ℓ یک وزنه درجه دوم از حالت می باشد. به این معنا که $\ell = x^T Q x$ که Q یک ماتریس معین مثبت است.

تعریف ۹.۱.۱ اتونوموس [۹]

در مورد زمان نامتناهی ℓ, u را اتونوموس گوییم اگر تابع انجام به صورت زیر باشد

$$\hat{V}(t,x) = \int_t^{\infty} [\ell(\varphi(\tau;t,x,u)) + \| u(\varphi(\tau;t,x,u)) \|_R^2] d\tau$$

و f, g اتونوموس هستند اگر

$$\varphi(\tau;t,x,u) = \varphi(\tau - t; 0, x, u)$$

بنابراین توسط تغیر متغیر $\tau = t + \sigma$ بدست می آوریم.

$$\hat{V}(t,x) = \int_0^{\infty} [\ell(\varphi(\sigma;0,x,u)) + \| u(\varphi(\sigma;0,x,u)) \|_R^2] d\sigma = \hat{V}(0,x)$$

که در این حالت $t \in [0,\infty)$ و $\hat{V}$ مستقل از زمان می باشد.

در این پایان نامه کنترل بهینه را در حالت افق زمان نامتناهی و حالتی که u, f, g و ℓ اتونوموس یا به عبارتی مستقل از زمان هستند، بررسی می‌کنیم.

---

[۸] Penalty function

[۹] Autonomous

۳.۱.۱ مساله حداقل زمان

یکی از عوامل فیزیکی انتخاب تابع‌انجام برای بعضی از مسائل کنترلی، مساله حداقل زمان است.
در این مساله برای انتقال سیستمی از شرایط اولیه دلخواه به یک مجموعه هدفS در حداقل زمان، تابع‌انجامی که باید حداقل شود عبارت است از

$$V = t_f - t_\circ = \int_{t_\circ}^{t_f} dt$$

که در آن t_f اولین لحظه‌ای است که‌مجموعه مسیرهای قابل قبول $X(t)$، با مجموعه هدف S برخورد می‌کند.

۴.۱.۱ مسائل تنظیم‌کننده‌ها

نزدیک کردن حالت $x(t)$ سیستم به حالت مطلوب صفر در حد ممکن در محدوده زمانی $[t_\circ, t_f]$ به مساله تنظیم‌کننده مرسوم است. در این مساله تابع انجام به‌صورت

$$V = \int_{t_\circ}^{t_f} [x^T Q x + u^T R u] dt$$

که در آن ماتریس‌های Q و R متقارن و معین‌مثبت هستند.

۵.۱.۱ روش‌های کنترلی

سه‌روش اساسی جهت اعمال کنترل که تمام روش‌های کنترلی به نحوی جزء یکی از آن هامحسوب می‌شوند، کنترل حلقه—باز، کنترل‌پیش‌خور و کنترل پس‌خور یا حلقه—بسته می‌باشند.برای مطالعه بیشتر می‌توانید به [۹] رجوع کنید.