دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی

عنوان

متریک های راندرز ناوردای دوطرفه روی گروه های لی

نگارش

مجتبی پرهیزکار

استاد راهنما

دکتر ابراهیم هاشمی

دکتر حمیدرضا سلیمی مقدم

استاد مشاور

سید رضا موسوی

دکتر سید رضا حجازی

تیر ۱۳۹۱

صفحهٔ تصویب نامه توسط هیأت داوران (فرم پیوست ۳ یا ۴ با امضای اصل هیأت داوران مورد قبول است)

چکیده

در این پایان نامه ما به مطالعه هندسی متریک های راندرز ناوردای دو طرفه روی گروه های لی می پردازیم. ابتدا شرایط لازم و کافی برای این که متریک راندرز ناوردای دوطرفه از نوع بروالد باشد را بیان می کنیم و سپس نشان خواهیم داد متریک های راندرز ناوردای دوطرفه از نوع بروالد می باشد و در نهایت شرایط لازم و کافی برای اینکه متریک راندرز ناوردای چپ روی گروه های لی، ناوردای دوطرفه باشد را بیان می کنیم. مطالب ذکر شده در فصل اول از مراجع [۲] و [۷] گرفته شده و مطالب ذکر شده در فصل دوم از مراجع [۱۰] و [۸] می باشد. همچنین مطالب فصل سوم از مرجع [۳] و [۴] گرفته شده است.

واژه‌های کلیدی: متریک ناوردا، متریک راندرز، متریک ناوردای دو طرفه، گروه لی، فضای همگن

پیشگفتار

هندسه فینسلر اولین بار توسط پل فینسلر [۱] در سال ۱۹۱۸ در پایان نامه اش معرفی شد. این هندسه از انتگرال ساده شروع شده و بسیار نزدیک به حساب تغییرات می باشد. هندسه فینسلری تعمیمی از هندسه ریمانی نیست بلکه توضیح بهتری از هندسه ریمانی بدون محدودیت درجه دوم می باشد داده های هندسی در هندسه فینسلری شامل خانواده های هموار از نرم های مینکوفسکی، بجای خانواده ای از ضرب های داخلی می باشد. این خانواده از نرم های مینکوفسکی ساختار فینسلر را معرفی می کند. متریک های راندرز به عنوان حالت خاصی از متریک های فینسلری توسط ج.راندرز[۲] در سال ۱۹۴۱ معرفی شد سپس این متریک ها در نظریه میکروسکوپ های الکترونی توسط ر.س.اینگاردن[۳] به کار گرفته و متریک های راندرز نامیده شدند. متریک های راندرز راه حل هایی برای مسئله هدایت زرملو[۴] ارائه می دهند اگر در مسئله زرملو باد مستقل از زمان باشد مسیری که کمترین زمان را خواستار است ژئودزیک های متریک راندرز می باشند. مطالعه ساختار های ناوردا روی گروه های لی و فضاهای همگن یکی از مسائل مهم در هندسه دیفرانسیل می باشد.در منابع[۱، ۵] متریک های فینسلری ناوردا روی گروه های لی پوچ توان از مرتبه ۲ و منیفلدهای همگن مورد مطالعه قرار گرفته شده است. لذا بررسی متریک های فینسلری ناوردا از اهمیت خاصی برخوردار است. از میان متریک های ناوردا متریک های ناوردای دو طرفه ساده ترین نوع می باشند و ویژگی های هندسی ساده و خوبی دارند. در[۱۲] س.دنگ [۵] و ز.هو [۶] یک توصیف جبری از متریک های ناوردا دو طرفه ارائه داده اند.

فصل اول به بیان تعاریف و قضایایی می پردازیم که در فصل های بعد مورد نیاز می باشند و در فصل دوم نظریه گروه های لی و همچنین متریک های ریمانی ناوردا روی فضای همگن را بررسی می کنیم

[۱] $Paul\ Finsler$
[۲] $G.Randes$
[۳] $R.S.Ingarden$
[۴] $Zermelo$
[۵] $S.Deng$
[۶] $Z.Hou$

و در فصل سوم به بیان شرایطی می پردازیم که تحت آن متریک های راندرز می توانند از نوع بروالد باشند. همچنین به بررسی ژئودزیک متریک راندرز می پردازیم.

فهرست مطالب

فصل ۱
متریک ریمانی و فینسلری

۱.۱ مقدمه

هندسه ای که جی اف بی ریمان [۱] آن را برای اولین بار در سال ۱۸۵۴ مطرح کرد بنام هندسه ریمانی مشهور است. در حقیقت تعمیم مطالبی بنام هندسه دیفرانسیل رویه‌هاست که توسط گاوس [۲] مورد مطالعه قرار گرفته بود. در هندسه دیفرانسیل رویه ها یک ضرب داخلی روی خانواده بردار های مماس بر رویه تعریف می گردد که توسط این ضرب می توان طول بردار های مماس بر رویه را بدست آورد. در حقیقت اولین کار ریمان تعمیم این ضرب بود که بعد ها منجر به تعریف انتگرال ریمان و متریک ریمان گردیده و موجبات تعریف هندسه ریمانی را پس از هندسه اقلیدسی فراهم نمود. اما نظر به اینکه این تابع در تعبیر پدیده های فیزیکی نقش موثری داشت، بعدها توسط دیگران مورد مطالعه قرار گرفت.

علاوه بر روش های اقلیدسی و ریمانی برای محاسبه طول یک بردار روش های دیگری نیز موجود است که نظر به کاربرد بسیار زیاد آن ها در علوم فنی مهندسی و فیزیک، در این جا به یکی از آن ها به نام متریک فینسلری اشاره می کنیم. مطالعه متریک فینسلری ابتدا توسط ریمان در سال ۱۸۵۴ آغاز گردید، ولی از آنجایی که او عقیده داشت مفهوم متریکی که بعدها به نام ریمان معروف شد برای مطالعه مفاهیم هندسی و ادامه کارهای گاوس مناسب تر است به مطالعه خود ادامه نداد. اما نظر به اینکه این تابع در تعبیر پدیده های فیزیکی نقش موثری داشت بعدها توسط دیگران مورد مطالعه قرار گرفت. از جمله ی این افراد پل فینسلر [۳] بود که در سال ۱۹۱۸ با استفاده از نتایج بدست آمده توسط استاد خودش کنستانتین کاراتئودوری [۴] و قضیه اویلر توانست تعریف مدونی از این متریک ارائه نماید. او در حقیقت شرایطی برای یک تابع مانند $F(x,y)$ روی کلاف مماس TM ارائه نمود که

[۱] $Georg\, Friedrich\, Berhnard\, Riemann$
[۲] $Carl\, Friedrich\, Gauss$
[۳] $Paul\, Finsler$
[۴] $Constantin\, Caratheodory$

در عین حالی که از تابع ریمان جامع تر بود خواص اصلی آن را نیز داشت. بنابراین می توان گفت که دوران شکوفایی هندسه بیست و دو قرن پس از افلاطون و اقلیدوس در اسکندریه توسط دانشمندان آلمانی، گاوس، ریمان و... صورت پذیرفت.

۲.۱ متریک های ریمانی

ابتدا به بیان قرار دادهایی می پردازیم که در سراسر این پایان نامه بکار برده شده است:

۱- جمع بندی اینشتین، یعنی اگر اندیسی یک بار در بالا و یک بار در پایین تکرار شود، آنرا جمع بندی شده می نامیم و از نوشتن علامت $\sum$ خودداری می نماییم.

۲- منیفلد ها هموار و متناهی البعد می باشند.

تعریف ۱.۲.۱. منظور از یک **میدان برداری** روی منیفلد M نگاشتی هموار مانند $X : M \longrightarrow TM$ است به طوری که

$$\pi \circ X = id_M,$$

که در آن $\pi : TM \longrightarrow M$ نگاشت تصویر می باشد.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر باشد. در این صورت مجموعه ی همه میدان های برداری روی M را با $\chi(M)$ نمایش می دهیم.

خط راست چیست؟ قبلاً می دانستیم بارزترین خاصیت خط راست مسیری بین دو نقطه است که دارای کوتاه ترین طول است همچنین می دانیم خطی راست است که مسیر حرکت متحرکی باشد که شتاب آن صفر است. آیا مشتق گیری معمولی روی منیفلد کارساز است؟ مشتق به صورت عام قبلی تغییرات مقادیر را نشان می دهد درصورتی که برای یک میدان برداری علاوه بر طول، جهت نیز اهمیت دارد پس باید نوعی مشتق تعریف کرد که این نوع تغییرات را نشان دهد یا به عبارت دیگر

بتوان تغییرات یک میدان برداری را در امتداد یک بردار(میدان برداری دیگر) بدست آورد. لذا برای اینکه بتوانیم مفهوم شتاب یک منحنی روی یک منیفلد را تعمیم دهیم لازم است راهی پیدا کنیم که بتوان بدون توجه به مختصات از بردار ها (یا میدان های برداری) در طول یک منحنی مشتق گیری نماییم. به بیان ساده تر باید بتوانیم مقادیر دو بردار از دو فضای برداری مجاور و متفاوت را با یکدیگر مقایسه نماییم یا به عبارت دیگر دو فضای برداری مجاور را توسط یک مشتق گیری به یکدیگر "الصاق"[۵] نماییم. این موضوع اولین بار توسط لوی چویتا دانشمند ایتالیایی در سال ۱۹۱۷ مورد مطالعه قرار گرفت.

تعریف ۳.۲.۱. الصاق آفین یا الصاق خطی روی منیفلد دیفرانسیل پذیر M نگاشتی مانند

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \longmapsto \chi(M),$$

$$(X, Y) \longmapsto \nabla_X Y.$$

می باشد که در شرایط زیر صدق می کند:

$$i) \nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z, \qquad (\forall f, g \in C^\infty(M)).$$

$$ii) \nabla_X (aY + bZ) = a\nabla_X Y + b\nabla_X Z, \qquad (\forall a, b \in R).$$

$$iii) \nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y, \qquad (\forall f \in C^\infty(M)).$$

لم ۴.۲.۱. فرض کنیم $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ یک کنج موضعی برای TM روی زیر مجموعه $U \subseteq M$ همراه با الصاق خطی ∇ باشد در این صورت

$$\nabla_X Y = (XY^k + X^i Y^j \Gamma^k_{ij}) E^k.$$

که هر Γ^k_{ij} یک تابع حقیقی روی M است که آن را علایم (ضرایب) کریستوفل[۶] ∇ نسبت به این کنج موضعی می نامیم.

[۵] $connection$
[۶] $Christoffel\ Symbols$

اثبات . اگر $X = X^i E_i, Y = Y^j E_j$ آنگاه بااستفاده از تعریف الصاق داریم:

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \nabla_X (Y^j E_j)\\ &= (XY^j)E_j + Y^j \nabla_{X^i E_i} E_j\\ &= (XY^j)E_j + X^i Y^j \nabla_{E_i} E_j,\end{aligned}$$

حال می توان فرض کرد که $\nabla_{E_i} E_j = \Gamma^k_{ij} E_k$، که Γ^k_{ij} یک تابع حقیقی روی M می باشد بنابراین:

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= XY^j E_j + X^i Y^j \Gamma^k_{ij} E_k\\ &= (XY^j + X^i Y^j \Gamma^k_{ij})E_k.\end{aligned}$$

■

گزاره ۵.۲.۱. هر منیفلد دیفرانسیل پذیر یک الصاق خطی می پذیرد.

اثبات . به مرجع [۷] گزاره ۴.۵ رجوع شود. ■

مشتق گیری از یک میدان برداری در جهت یک میدان برداری دیگر را معرفی کردیم حال این سوال پیش می آید چطور می توان از یک میدان برداری در جهت یک منحنی مشتق گرفت.

قرارداد: فرض کنیم $\gamma : I \longmapsto M$ یک منحنی مشتق پذیر روی منیفلد دیفرانسیل پذیر M باشد، فضای همه میدان های برداری در طول منحنی γ را با $\chi(\gamma)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر همراه با الصاق خطی ∇ باشد و $\gamma : I \longmapsto M$ یک منحنی مشتق پذیر روی M باشد و عملگر

$$D_t : \chi(\gamma) \longmapsto \chi(\gamma),$$

درشرایط زیر صدق کند:

$$D_t(aV+bW)=aD_tV+bD_tW, \qquad (\forall a,b\in R). \qquad (a$$

$$D_t(fV)=\dot{f}V+fD_tV, \qquad (\forall f\in C^\infty). \qquad (b$$

$$D_tV(t)=\nabla_{\dot\gamma(t)}\tilde{V}, \qquad \text{برای هر توسیع } \tilde{V} \text{ از } V \qquad (c$$

در این صورت برای هر $V\in\chi(\gamma)$، D_tV را **مشتق کوواریانت**[۷] V در طول γ می نامیم.

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر همراه با الصاق خطی ∇ باشد میدان برداری V را در طول منحنی $\gamma : I \longmapsto M$ نسبت به الصاق ∇ موازی گوییم هرگاه $D_tV=۰$.

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر همراه با الصاق خطی ∇ باشد منحنی γ روی M را **ژئودزیک** می نامیم هرگاه $D_t\dot\gamma=۰$, یعنی شتاب صفر باشد.

تعریف ۹.۲.۱. متریک ریمانی: فرض کنیم M یک منیفلد n-بعدی باشد. متریک ریمانی روی منیفلد دیفرانسیل پذیر M عبارت است از یک میدان تانسوری g از نوع $\binom{۰}{۲}$ بطوریکه در هر نقطه p در M یک ضرب داخلی روی T_pM می باشد و این ضرب داخلی را با $g_p(X,Y)$ یا $\langle X,Y\rangle_p$ نمایش می دهیم که g_p متقارن (یعنی $\forall X,Y\in T_pM, g_p(X,Y)=g_p(Y,X)$) ومعین مثبت (یعنی $\forall X\neq ۰\in T_pM, g_p(X,X)>۰$) باشد.

اگر $\{E_۱,E_۲,...,E_n\}$ یک کنج موضعی برای TM و $\{\varphi^۱,\varphi^۲,...,\varphi^n\}$ دوگان هم کنج آن باشد آنگاه یک متریک ریمانی می تواند به فرم موضعی به صورت

$$g=g_{ij}\varphi^i\bigotimes\varphi^j,$$

نوشته شود که g_{ij} درایه های ماتریس ضرایب تعریف شده به صورت $g_{ij}=\langle E_i,E_j\rangle$ می باشند بخصوص در یک کنج مختصاتی، g به صورت زیر نوشته می شود:

[۷] *Covariant Derivative*

$$g = g_{ij} dx^i \bigotimes dx^j.$$

چون g متقارن است در نتیجه $g_{ij} = g_{ji}$ لذا رابطه فوق را می توان به صورت زیر نوشت:

$$g = g_{ij} dx^i dx^j.$$

تعریف ۱۰.۲.۱. منیفلد دیفرانسیل پذیر M همراه با متر ریمانی g را یک منیفلد ریمانی می نامیم و با علامت (M, g) نمایش می دهیم.

گزاره ۱۱.۲.۱. روی هر منیفلد دیفرانسیل پذیر (هاسدورف با پایه شمارا) می توان یک متریک ریمانی تعریف نمود.

اثبات . به مرجع [۷] فصل۳ رجوع شود. ■

مثال . فضای $\mathbb{R}^n$ با مختصات اقلیدسی و پایه متعامد $\{\partial_i\}$ را برای فضای مماس در نظر می گیریم که

$$g_{ij}(p) = \langle \partial_i|_p, \partial_j|_p \rangle = \delta_{ij}, \qquad (\forall p \in \mathbb{R}^n).$$

پس متریک ریمانی به صورت:

$$g = \delta_{ij} dx^i dx^j = \sum_{i=۱}^n (dx^i)^۲.$$

می باشد و آن را متریک طبیعی[۸]یا متریک کانونی فضای اقلیدسی[۹] یا متریک اقلیدسی می نامیم.

تعریف ۱۲.۲.۱. فرض کنیم M یک منیفلد n–بعدی باشد. متریک شبه ریمانی روی منیفلد دیفرانسیل پذیر M، یک میدان تانسوری متقارن g از نوع $\binom{۰}{۲}$ است بطوریکه در هر نقطه p در M یک ضرب داخلی روی T_pM می باشد و این ضرب داخلی را با $g_p(X, Y)$ یا $\langle X, Y \rangle_p$ نمایش می دهیم که در

[۸] $Natural\, metric$
[۹] $Cononical\, metric$

هر نقطه p در M ناتباهیده[۱۰] باشد یعنی برای هر $Y \in T_pM$ ، $g_p(X,Y)=0$ اگر و تنها اگر $X=0$. هر متریک ریمانی، شبه ریمانی می باشد اما عکس آن برقرار نیست.

تعریف ۱.۲.۱۳. فرض کنیم (M,g) یک منیفلد ریمانی (شبه ریمانی) همراه باالصاق خطی ∇ باشد. در این صورت الصاق خطی ∇ را نسبت به متر g سازگار می نامیم اگر برای هر سه میدان برداری Z,Y,X داشته باشیم:

$$X\langle Y,Z\rangle := \nabla_X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle.$$

تعریف ۱.۲.۱۴. فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر همراه باالصاق خطی ∇ باشد. میدان تانسوری τ از نوع $\binom{1}{2}$ که به صورت

$$\tau : \chi(M)\times\chi(M) \longmapsto \chi(M),$$
$$(X,Y) \longmapsto \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y].$$

تعریف می شود را تاب الصاق ∇ می نامیم.

تعریف ۱.۲.۱۵. الصاق خطی ∇ روی منیفلد دیفرانسیل پذیر M متقارن نامیده می شود هر گاه تاب الصاق ∇ صفر شود. یعنی $\tau=0$ یا به عبارت دیگر:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y].$$

نتیجه ۱.۲.۱۶. فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر همراه باالصاق خطی متقارن ∇ باشد و $\{E_1,E_2,...,E_n\}$ یک کنج موضعی کلاف مماس TM روی زیر مجموعه $U\subseteq M$ باشد در این صورت :

$$\nabla_{E_i}E_j - \nabla_{E_j}E_i = [E_i,E_j] = 0,$$

[۱۰] $Nondegeneracy$

واین معادل با این است که $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

تعریف ۱۷.۲.۱. فرض کنیم M یک منیفلد ریمانی (شبه ریمانی) باشد. الصاق خطی ∇ روی M را الصاق ریمانی یا الصاق لوی چویتا [۱۱] می نامیم هر گاه در شرایط زیر صدق کند:

الف) ∇متقارن باشد.

ب) ∇ سازگار با متر ریمانی باشد.

قضیه ۱۸.۲.۱. فرض کنیم (M,g) یک منیفلد ریمانی(یا شبه ریمانی) باشد. در این صورت یک و تنها یک الصاق لوی چویتا وجود دارد.

اثبات. ابتدا نشان می دهیم چنین الصاقی در صورت وجود منحصر به فرد است. فرض کنیم ∇ یک الصاق لوی چویتا روی M باشد و $X,Y,Z \in \chi(M)$. با توجه به شرط g-سازگاری داریم:

$$\nabla_X\langle Y,Z\rangle = X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y,Z\rangle + \langle Y,\nabla_X Z\rangle,$$

$$\nabla_Y\langle Z,X\rangle = Y\langle Z,X\rangle = \langle \nabla_Y Z,X\rangle + \langle Z,\nabla_Y X\rangle,$$

$$\nabla_Z\langle X,Y\rangle = Z\langle X,Y\rangle = \langle \nabla_Z X,Y\rangle + \langle X,\nabla_Z Y\rangle,$$

حال با جایگذاری روابط حاصل از متقارن بودن ∇ در هر یک از روابط قبلی داریم:

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y,Z\rangle + \langle Y,\nabla_Z X\rangle + \langle Y,[X,Z]\rangle,$$

$$Y\langle Z,X\rangle = \langle \nabla_Y Z,X\rangle + \langle Z,\nabla_X Y\rangle + \langle Z,[Y,X]\rangle,$$

$$Z\langle X,Y\rangle = \langle \nabla_Z X,Y\rangle + \langle X,\nabla_Y Z\rangle + \langle X,[Z,Y]\rangle,$$

حال با جمع کردن دو رابطه اول و کم کردن رابطه سوم از حاصل آن ها داریم:

[۱۱] $Levi-Civita$

$$X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle = ۲\langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y,[X,Z]\rangle + \langle Z,[Y,X]\rangle - \langle X,[Z,Y]\rangle.$$

بنابراین:

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{۱}{۲}(X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle - \langle Y,[X,Z]\rangle - \langle Z,[Y,X]\rangle + \langle X,[Z,Y]\rangle \quad (۱.۱)$$

حال فرض کنیم $\nabla^۲, \nabla^۱$ دو الصاق خطی متقارن و سازگار با متر g باشند پس هر دو باید در رابطه (۱.۱) صدق کنند. در نتیجه داریم:

$$\langle \nabla^۱_X Y - \nabla^۲_X Y, Z\rangle = ۰, \qquad (\forall X,Y,Z \in \chi(M)).$$

چون تساوی فوق برای هر Z برقرار است لذا با توجه به شرط ناتباهیده بودن g داریم:

$$\nabla^۱_X Y = \nabla^۲_X Y, \Longrightarrow \nabla^۱ = \nabla^۲.$$

حال نشان می دهیم چنین الصاقی وجود دارد. برای این منظور از مختصات موضعی استفاده می کنیم. حال رابطه (۱.۱) را برای $X=\partial_i$ ، $Y=\partial_j$ و $Z=\partial_k$ محاسبه می کنیم:

$$\begin{aligned}
&\langle \nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_k\rangle = \frac{۱}{۲}\left[\partial_i\langle\partial_j,\partial_k\rangle + \partial_j\langle\partial_k,\partial_i\rangle - \partial_k\langle\partial_i,\partial_j\rangle\right.\\
&\left.-\langle\partial_j,[\partial_i,\partial_k]\rangle - \langle\partial_k,[\partial_j,\partial_i]\rangle + \langle\partial_i,[\partial_k,\partial_j]\rangle\right],\\
\Longrightarrow\quad &\langle \nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_k\rangle = \frac{۱}{۲}\left[\partial_i\langle\partial_j\partial_k\rangle + \partial_j\langle\partial_k,\partial_i\rangle - \partial_k\langle\partial_i,\partial_j\rangle\right],\\
\Longrightarrow\quad &\Gamma^l_{ij}g_{lk} = \frac{۱}{۲}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_l g_{ij}),\\
\Longrightarrow\quad &\Gamma^l_{ij} = \frac{۱}{۲}g^{lk}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_l g_{ij}). \qquad (۲.۱)
\end{aligned}$$

به وسیله این ضرایب روی هر چارت می توان یک الصاق خطی تعریف کرد. همچنین باتوجه به رابطه (۲.۱) داریم :

$$\Gamma^l_{ij} = \Gamma^l_{ji}.$$

یعنی چنین الصاقی متقارن است. اکنون کافی است نشان دهیم : $\nabla g = 0$.

می دانیم ضرایب ∇g به صورت

$$g_{ij;k} = \partial_k g_{ij} - \Gamma^l_{ki} g_{lj} - \Gamma^l_{kj} g_{il}.$$

می باشند. با استفاده از رابطه (۲.۱) داریم:

$$\Gamma^l_{ki} g_{lj} + \Gamma^l_{kj} g_{il} = \frac{1}{2}(\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{kj} - \partial_j g_{ki}) + \frac{1}{2}(\partial_k g_{ji} + \partial_j g_{ki} - \partial_i g_{kj}) = \partial_k g_{ji}.$$

که نشان می دهد $g_{ij;k} = 0$. بنابراین $\nabla g = 0$. ■

تعریف ۱۹.۲.۱. فرض کنیم M یک منیفلد ریمانی باشد. در این صورت برای هر $X, Y \in \chi(M)$ تانسور انحنای ریمانی M به صورت

$$R(X,Y) : \chi(M) \longmapsto \chi(M)$$

$$R(X,Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]} Z.$$

می باشد که در آن ∇ الصاق ریمانی M می باشد و R نسبت به هر سه مولفه Z, Y, X، C^∞-خطی می باشد.

تعریف ۲۰.۲.۱. فرض کنیم (M,g) یک منیفلد ریمانی n-بعدی، $p \in M$ ، $X, Y \in T_pM$ و $\prod = span\{X,Y\}$ یک زیر فضای دو بعدی از T_pM باشد. در این صورت:

$$K(\prod) = K(X,Y) = \frac{g\left(R(X,Y)Y, X\right)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2}$$

را انحنای برشی[12] در نقطه p می نامیم.

[12] *Sectional curvature*

تعریف ۲۱.۲.۱. فرض کنیم (M,g) یک منیفلد ریمانی n-بعدی باشد و $p\in M$. انحنای ریچی عبارت است اثر انحنای برشی M که یک فرم دوخطی متقارن می باشد. اگر $\{e_۱,e_۲,...,e_n\}$ یک پایه یکا متعامد T_pM باشد آنگاه:

$$Ric(V,W)=tr(X\longrightarrow R(X,V)W)=\sum_{i=۱}^{n} g\left(R(e_i,V)W,e_i\right) \qquad (\forall V,W\in T_pM).$$

تعریف ۲۲.۲.۱. فرض کنیم (M,g) یک منیفلد ریمانی n-بعدی باشد و $p\in M$. اثر انحنای ریچی را انحنای اسکالر می نامیم که تنها به p وابسته است. پس انحنای اسکالر یک تابع بصورت $Scal: M\longmapsto R$ می باشد. حال اگر $\{e_۱,e_۲,...,e_n\}$ یک پایه یکا متعامد T_pM باشد آنگاه:

$$Scal=tr(Ric)=\sum_{i=۱}^{n} g(Ric(e_j),e_j)=\sum_{j=۱}^{n}\sum_{i=۱}^{n} g(R(e_i,e_j)e_j,e_i)$$

۳.۱ متریک فینسلری

در این بخش به تعریف متریک های فینسلری می پردازیم. متریک های فینسلری طبیعی ترین تعمیم متریک های ریمانی هستند که استفاده زیادی در مسائل کاربردی داشته و اخیرا مورد توجه بسیاری از ریاضیدانان کاربردی و محض قرار گرفته اند.

در منیفلد ریمانی (M,g) طول یک بردار مماس X با ارائه یک ضرب داخلی روی فضای مماس T_pM محاسبه می گردد. این ضرب داخلی برگرفته از متریک ریمانی g را با علامت $g(X,Y)=g_{ij}X^iY^j$ نمایش دادیم که در آن $g_{ij}(x)$ ها توابعی حقیقی روی M هستند، که بستگی به نقطه $x\in M$ دارند یعنی $g_{ij}: M\longmapsto R$. حال می خواهیم یک ضرب داخلی تعریف کنیم که در آن طول یک بردار علاوه بر نقطه $x\in M$ به جهت آن نیز بستگی دارد. متریک برگرفته از این ضرب داخلی را متریک فینسلری می نامیم و با $g(X,Y)=g_{ij}X^iY^j$ نمایش می دهیم. در اینجا هر $g_{ij}(x,y)$ یک تابع حقیقی روی TM است، که علاوه بر نقطه $x\in M$ به جهت آن یعنی $y\in T_xM$ نیز بستگی دارد.

اگر $\gamma:[a,b]\longmapsto M$ یک منحنی روی منیفلد M باشد آنگاه مولفه های آن در چارت (x,U) توسط

رابطه $x^i(t) = (x \circ \gamma)^i(t)$ تعریف می شوند در نتیجه بردار مماس نیز به صورت $\frac{dx^i}{dt}$ ارائه می شود.
لذا طول قوس منحنی γ در هندسه ریمانی به صورت:

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(x)\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}dt,$$

می باشد، که g_{ij}ها مولفه های تانسور متریک ریمانی توابعی حقیقی روی M هستند. همچنین طول قوس منحنی γ در هندسه فینسلری به صورت:

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(x,y)\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}dt.$$

می باشد، که $g_{ij}(x,y)$ها مولفه های تانسور متریک فینسلری توابعی حقیقی روی TM هستند.
فرض کنید M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر و T_xM فضای مماس در نقطه $x \in M$ باشد کلاف مماس بر M را با $TM := \cup_{x\in M} T_xM$ نمایش می دهیم. فضای دوگان T_xM باعلامت T_x^*M نمایش داده می شود و فضای کتانژانت در نقطه $x \in M$ نامیده می شود. کلاف $T^*M = \cup_x T_x^*M$ کلاف کتانژانت نام دارد.

تعریف ۱.۳.۱. تابع $H : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ را همگن مثبت[۱۳] از درجه r نسبت به y گوییم اگر به ازای هر عدد مثبت λ داشته باشیم:

$$H(\lambda y) = \lambda^r H(y), \qquad (\forall \lambda > ۰).$$

و آنرا همگن مطلق [۱۴] از درجه r گوییم اگر به ازای هر عدد حقیقی λ داشته باشیم:

$$H(\lambda y) = |\lambda|^r H(y), \qquad (\forall \lambda \in \mathbb{R}).$$

[۱۳] *Positively homogenous*
[۱۴] *Absolutely homogenous*