

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

دانشگاه یزد  
دانشکده فنی و مهندسی  
گروه مهندسی مکانیک

پایان نامه  
برای دریافت درجه کارشناسی ارشد  
مهندسی مکانیک - گرایش تبدیل انرژی

# کاربرد شبکه غیریکنواخت در شبیه‌سازی عددی جریان سیال با روش شبکه بولتزمان

استاد راهنما:  
دکتر شهرام طالبی

استاد مشاور:  
دکتر محمد رضا نظری امینه

تهیه و تنظیم:  
سید حسین عرب فراشاهی

اسفند ماه ۱۳۹۲

کلیه حقوق مادی و معنوی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از تحقیق  
موضوع این پایان نامه / رساله متعلق به دانشگاه یزد است و هرگونه استفاده از نتایج علمی و عملی  
از این پایان نامه / رساله برای تولید دانش فنی، ثبت اختراع، ثبت اثر بدیع هنری، همچنین چاپ و  
تکثیر، نسخه برداری، ترجمه و اقتباس و ارائه مقاله در سمینارها و مجلات علمی از این پایان نامه  
/ رساله منوط به موافقت کتبی دانشگاه یزد است.

تقدیم به:

با سپاس از الطاف بیکران الهی، تقدیم به پدر و مادر صبور و مهربانم که آموزگاران علم،

عشق و ایمان هستند.

## تقدیر و تشکر

خداوند متعال را سپاس می‌گویم که توفیق پشت سر گذاشتن مرحله‌ای دیگر از زندگی را به من نصیب کرد. سپاس می‌گویم که چون همیشه یاری‌های آشکار و نهانش را از من دریغ نفرمود، تا بیش از پیش خود را زیر بار منت باری تعالی بهره‌مند بیابم. قدردانی می‌کنم از استاد بزرگووار جناب آقای دکتر شهرام طالبی که بدون بزرگواری‌ها و راهنمایی‌های دلسوزانه و مهربانانه ایشان این قصه به سرانجام نمی‌رسید. به حق ایشان به لحاظ علمی و اخلاقی از برترین اساتید دانشگاه یزد می‌باشند. در پایان بر خود فرض می‌دانم تا از حمایت‌های بی دریغ پدر و مادر عزیزم که در این سال‌ها شامل حال من شده، تقدیر و قدردانی به عمل آورم.

## چکیده

روش شبکه بولتزمن به عنوان یک روش عددی در حوزه مکانیک سیالات و انتقال حرارت امروزه توجه بسیاری از محققان را به خود جلب کرده است. در تحقیق پیش رو حل جریان تراکم‌ناپذیر با شبکه غیریکنواخت مد نظر است. برای این منظور در کل دو روش حل وجود دارد؛ روش اول استفاده از الگوریتم برخورد- جاری شدن است. در این روش لازم است برای هر گره در هر قدم زمانی میان‌یابی‌هایی انجام گردد. روش دوم حل معادله دیفرانسیل بولتزمن به روش تفاضل محدود است. در این تحقیق برای بررسی نتایج حاصل از انتقال حرارت در هر دو روش بالا معادله انرژی به روش تفاضل محدود صریح حل شده است. در کار حاضر از سه مسئله جریان بین دو صفحه موازی، جریان داخل حفره با جابجایی طبیعی و جریان داخل حفره با درپوش متحرک برای اعتبار سنجی روش‌های حل استفاده شده است. در تمام موارد توزیع سرعت، ضریب اصطکاک و عدد ناسلت بررسی شده است. برای جریان بین دو صفحه موازی از هر دو روش بالا استفاده شده که از نظر دقت برای شبکه یکنواخت، نتایج روش تفاضل محدود از دقت بالاتری برخوردارند. ولی برای شبکه با غیریکنواختی در جهت عرضی روش برخورد- جاری شدن دقت بالاتری دارد. برای جریان داخل حفره نیز تنها از روش تفاضل محدود استفاده شده است. همچنین برای جریان داخل حفره نیز غیریکنواختی در جهت افقی باعث بهبود نتایج و اضافه کردن غیریکنواختی در جهت عمودی باعث افزایش خطا شده است.

## فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۱	فصل اول: روش شبکه بولتزمن .....
۱-۱-۱	مقدمه .....
۲-۱	معادله بولتزمن و روش شبکه بولتزمن .....
۱-۲-۱	معادله انتقال بولتزمن .....
۲-۲-۱	معادله شبکه بولتزمن .....
۳-۲-۱	تعیین کمیت‌های اصلی جریان .....
۳-۱	روش تفاضل محدود .....
۱-۳-۱	گسسته سازی زمانی .....
۲-۳-۱	گسسته سازی مکانی .....
۳-۱-۲-۱	تقریب تفاضل محدود مرکزی .....
۳-۱-۲-۲	تقریب تفاضل محدود مرتبه اول، دوم و سوم .....
۳-۲-۳-۱	گسسته سازی جمله برخورد .....
۴-۱	حل معادله انرژی .....
۱-۴-۱	انتقال حرارت جابجایی سیال تراکم‌ناپذیر .....
۱-۱-۴-۱	جریان جابجایی طبیعی .....
۲-۱-۴-۱	جریان جابجایی اجباری .....
۵-۱	شرایط مرزی .....

۱۸	۱-۵-۱- شرط مرزی در مجاورت دیوارهای جامد
۲۰	۲-۵-۱- شرط مرزی در مرزهای باز
۲۰	۶-۱- شبکه غیریکنواخت
۲۳	۷-۱- الگوریتم برخورد و جاری شدن برای شبکه غیریکنواخت
<b>۲۴</b>	<b>فصل دوم: مروری بر تحقیقات گذشته</b>
۲۴	۱-۲- پیشینه روش شبکه بولتزمان در دانشگاه یزد
۲۵	۲-۲- پیشینه و کاربرد شبکه غیریکنواخت
۳۳	۳-۲- پیشینه و کاربرد روش تفاضل محدود
۳۴	۴-۲- طرح پایان نامه حاضر
<b>۳۶</b>	<b>فصل سوم: نتایج</b>
۳۶	۱-۳- نتایج حل به روش تفاضل محدود
۳۶	۱-۱-۳- جریان بین دو صفحه موازی
۴۹	۲-۱-۳- جریان جابجایی طبیعی درون یک حفره مربعی همراه با انتقال حرارت
۵۴	۳-۱-۳- جریان داخل حفره با درپوش متحرک همراه با انتقال حرارت
۵۹	۲-۳- نتایج حل به روش برخورد و جاری شدن
۶۴	۳-۲- مقایسه دو روش FDM و C-S
۶۶	۴-۳- جمع بندی
۶۹	۵-۳- پیشنهادها
<b>۷۰</b>	<b>مراجع</b>
<b>۷۴</b>	<b>پیوست</b>



## فهرست جداول

صفحه	عنوان
۲۸	جدول ۱-۲- مختصات گردابه‌های ایجاد شده در حفره برای شبکه یکنواخت و غیریکنواخت [۳۲].
۲۹	جدول ۲-۲- مقایسه مختصات گردابه‌های ایجاد شده [۳۳].
۴۱	جدول ۱-۳- مقایسه زمان اجرا و دقت حل برای روش‌های FDM و C-S
۴۳	جدول ۲-۳- مقایسه زمان اجرا و دقت حل برای روش‌های تفاضل محدود مرتبه اول و دوم
۴۶	جدول ۳-۳- بررسی اثر انواع شبکه‌های غیریکنواخت با روش FDM روی پارامترهای مهم جریان در عدد رینولدز ۲۰
۵۱	جدول ۴-۳- مقایسه بین عدد ناسلت متوسط حاصل از کار حاضر و کارهای گذشته بر روی دیوار گرم
۵۷	جدول ۵-۳- مقدار ناسلت برای جریان داخل حفره با درپوش متحرک همراه با انتقال حرارت ..
۶۲	جدول ۶-۳- بررسی اثر انواع شبکه‌های غیریکنواخت با روش C-S روی پارامترهای مهم جریان در عدد رینولدز ۲۰
۶۳	جدول ۷-۳- خطای حل حرارتی و سیالاتی برای شبکه‌های مختلف در روش C-S
۶۶	جدول ۸-۳- مقایسه پارامترهای جریان برای دو روش FDM و C-S با شبکه یکنواخت و غیریکنواخت

## فهرست شکل‌ها

صفحه	عنوان
۴.....	شکل ۱-۱- مفهوم تابع توزیع.....
۶.....	شکل ۲-۱- نمایش مدل $D_2Q_9$ .....
۲۰.....	شکل ۳-۱- شبکه مستطیلی.....
۲۱.....	شکل ۴-۱- شبکه با تغییرات پله‌ای.....
۲۲.....	شکل ۵-۱- شبکه با تغییرات خطی.....
۲۶.....	شکل ۱-۲- هندسه شبکه غیریکنواخت(مستطیلی)[۳۰].....
۲۷.....	شکل ۲-۲- مقایسه نتایج شبکه یکنواخت و غیریکنواخت با نتایج Ghia [۱۰].....
۲۸.....	شکل ۳-۲- خطوط جریان برای شبکه یکنواخت و غیریکنواخت[۳۲].....
۲۸.....	شکل ۴-۲- شبکه غیریکنواخت غیرمسطح[۳۳].....
۲۹.....	شکل ۵-۲- توزیع سرعت روی خط مرکزی[۳۳].....
۳۰.....	شکل ۶-۲- شبکه غیریکنواخت [۳۴].....
۳۰.....	شکل ۷-۲- شرایط مرزی [۳۴].....
۳۱.....	شکل ۸-۲- تغییرات ضریب فشار روی سطح کره[۳۴].....
۳۲.....	شکل ۹-۲- تغییرات دما داخل محفظه همراه با انتقال حرارت[۳۷].....
۳۷.....	شکل ۱-۳- هندسه جریان بین دو صفحه موازی همراه با انتقال حرارت.....
	شکل ۲-۳- باقیمانده‌های حل معادله مومنتم به روش C-S و FDM First Order برای جریان
۴۰.....	بین دو صفحه موازی با عدد رینولدز ۲۰،(شبهه $20 \times 200$ ).....

- شکل ۳-۳- توزیع سرعت روی خط مرکزی برای جریان بین دو صفحه موازی با عدد رینولدز ۲۰،  
(شبكة ۲۰×۲۰۰) ..... ۴۱
- شکل ۳-۴- توزیع سرعت در مقطع خروجی برای جریان بین دو صفحه موازی با عدد رینولدز ۲۰،  
(شبكة ۲۰×۲۰۰) ..... ۴۲
- شکل ۳-۵- تغییرات ضریب اصطکاک برای جریان بین دو صفحه موازی با عدد رینولدز ۲۰،  
(شبكة ۲۰×۲۰۰) ..... ۴۲
- شکل ۳-۶- مقایسه باقیمانده‌های سیالاتی تفاضل محدود مرتبه اول و دوم برای جریان بین دو  
صفحه موازی با رینولدز ۲۰، (شبكة ۲۰×۲۰۰) ..... ۴۳
- شکل ۳-۷- تغییرات مولفه افقی سرعت برای تفاضل محدود مرتبه اول و دوم با رینولدز ۲۰،  
(شبكة ۲۰×۲۰۰) ..... ۴۴
- شکل ۳-۸- تغییرات ناسلت برای تفاضل محدود مرتبه اول و دوم با رینولدز ۲۰، (شبكة ۲۰×۲۰۰)  
..... ۴۴
- شکل ۳-۹- تغییرات ضریب اصطکاک برای تفاضل محدود مرتبه اول و دوم با رینولدز ۲۰، (شبكة  
۲۰×۲۰۰) ..... ۴۴
- شکل ۳-۱۰- مقایسه تغییرات دمای بدون بعد برای تفاضل محدود مرتبه اول و دوم با عدد رینولدز  
۲۰، (شبكة ۲۰×۲۰۰) ..... ۴۵
- شکل ۳-۱۱- شبکه یکنواخت و غیریکنواخت جریان بین دو صفحه موازی برای حل FDM ..... ۴۶
- شکل ۳-۱۲- توزیع سرعت روی خط مرکزی برای شبکه یکنواخت و غیریکنواخت به روش FDM  
با عدد رینولدز ۲۰ ..... ۴۷
- شکل ۳-۱۳- توزیع سرعت در مقطع خروجی برای شبکه یکنواخت و غیریکنواخت به روش FDM  
با رینولدز ۲۰ ..... ۴۷

- شکل ۳-۱۴- نمودار تغییرات دمای بدون بعد برای شبکه یکنواخت و غیریکنواخت به روش FDM با رینولدز ۲۰..... ۴۸
- شکل ۳-۱۵- نمودار تغییرات  $f.Re$  برای جریان بین دو صفحه موازی با شبکه یکنواخت و غیریکنواخت به روش FDM با رینولدز ۲۰..... ۴۸
- شکل ۳-۱۶- محفظه مربعی جهت اعتبار سنجی ..... ۵۰
- شکل ۳-۱۷- شبکه یکنواخت و غیریکنواخت برای جریان داخل حفره ..... ۵۲
- شکل ۳-۱۸- توزیع دما در مقطع  $Y=0.5$ ..... ۵۳
- شکل ۳-۱۹- توزیع دما برای جابجایی طبیعی داخل حفره ..... ۵۳
- شکل ۳-۲۰- هندسه و شرایط مرزی جریان داخل حفره با درپوش متحرک ..... ۵۴
- شکل ۳-۲۱- تغییرات سرعت عمودی روی خط  $X=0.5$  برای جریان جابجایی اجباری داخل حفره با رینولدز ۲۰..... ۵۵
- شکل ۳-۲۲- تغییرات سرعت افقی روی خط  $X=0.5$  برای جریان جابجایی اجباری داخل حفره با رینولدز ۲۰..... ۵۶
- شکل ۳-۲۳- تغییرات دمای بدون بعد روی خط مرکزی برای جریان جابجایی اجباری داخل حفره، سمت چپ  $Y=0.5$ ، سمت راست  $X=0.5$  ..... ۵۶
- شکل ۳-۲۴- شار حرارتی روی دیوارها برای جابجایی اجباری در یک حفره همراه با انتقال حرارت (شبه  $50 \times 50$  با سرعت  $0.01$ ..... ۵۷
- شکل ۳-۲۵- تغییرات سرعت عمودی روی خط  $X=0.5$  برای جریان جابجایی اجباری داخل حفره با درپوش متحرک با رینولدز ۲۰..... ۵۸
- شکل ۳-۲۶- تغییرات سرعت افقی روی خط  $X=0.5$  برای جریان جابجایی اجباری داخل حفره با درپوش متحرک با رینولدز ۲۰..... ۵۸

- شکل ۳-۲۷- هندسه و شرایط مرزی برای جریان بین دو صفحه موازی به روش C-S..... ۵۹
- شکل ۳-۲۸- تغییرات مولفه افقی سرعت، ضریب اصطکاک، عدد ناسلت و دمای متوسط، شبکه  
مربعی یکنواخت ..... ۶۰
- شکل ۳-۲۹- توزیع دما و خطوط جریان ..... ۶۱
- شکل ۳-۳۰- انواع شبکه گره‌های بکار رفته برای حل جریان بین دو صفحه موازی به روش C-S  
..... ۶۲
- شکل ۳-۳۱- مقایسه نتایج روش FDM با C-S برای شرایط حل یکسان، شبکه  $21 \times 121$  ..... ۶۴
- شکل ۳-۳۲- مقایسه نتایج روش FDM با C-S برای شرایط حل یکسان، شبکه غیریکنواخت  
پله‌ای  $31 \times 121$  ..... ۶۵

## فهرست نمادها

$\rho$	چگالی
$\vec{V}$	بردار سرعت
$u$	مؤلفه افقی سرعت
$v$	مؤلفه عمودی سرعت
$P$	فشار
$T$	دما
$q$	شار حرارتی
$\nu$	لزجت سینماتیکی
$f_i$	تابع توزیع ذره در لینک $i$ ام
$f_i^{eq}$	تابع توزیع تعادلی ذره در لینک $i$ ام
$f_i^{neq}$	تابع توزیع غیرتعادلی ذره در لینک $i$ ام
$\tilde{f}_i$	تابع توزیع ذره در لینک $i$ ام بعد از برخورد
$\bar{c}_i$	سرعت گسسته شبکه در لینک $i$ ام
$u_{ave}$	سرعت متوسط
$c$	سرعت شبکه
$c_s$	سرعت صوت در شبکه
$L$	طول مشخصه
$\delta x$	گام مکانی شبکه
$\delta t$	گام زمانی شبکه
$\tau$	زمان آسودگی
$\alpha$	ضریب پخش حرارتی

$g$	شتاب گرانشی
$\beta$	ضریب تراکم پذیری دماتاب
$\beta^*$	ضریب تراکم پذیری غلظت ثابت
$\dot{Q}$	تولید حرارت داخلی
$Ra$	عدد رایلی حرارتی
$Ra_{Cr}$	عدد رایلی بحرانی
$Pr$	عدد پранتل
$Nu$	عدد ناسلت
$Re$	عدد رینولدز
$C_p$	ظرفیت حرارتی
$F$	نیروی خارجی
$H$	طول مشخصه
$k$	ضریب هدایت حرارتی
$R_v$	باقیمانده‌های سرعتی
$t^*$	زمان بدون بعد

## فصل اول

### روش شبکه بولتزمن

#### ۱-۱. مقدمه

دهه گذشته شاهد شکل‌گیری روشی قدرتمند در تحلیل جریان‌ها، به نام روش شبکه بولتزمن<sup>۱</sup> (LBM) بود. این روش که به دنبال روش شبکه گاز<sup>۲</sup> و در جهت رفع نقایص آن به وجود آمد، به سرعت جایگاه خود را در تحلیل جریان‌های پیچیده تثبیت نمود. در روش شبکه بولتزمن بواسطه نگاه میکروسکوپی به مفهوم مدل سیال، توابع توزیع ذرات به عنوان مبنای تحلیل جریان سیال قلمداد می‌شود. به کارگیری توابع توزیع، که معرف احتمال حضور ذرات سیال در یک مکان هستند، به شبکه بولتزمن اجازه می‌دهد تا به جای حل معادله غیرخطی ناویر-استوکس، به حل معادله ساده شده و شبه خطی انتقال بولتزمن بپردازد. امری که موجب ساده سازی قابل توجه در روش عددی شده و قابلیت پردازش موازی را به طور قابل ملاحظه‌ای بهبود می‌بخشد.

---

<sup>1</sup> Lattice Boltzman Method

<sup>2</sup> Lattice gas automata



بر خلاف دینامیک سیالاتی محاسباتی سنتی<sup>۱</sup> که اساس آن بر معادلات پیوسته ماکروسکوپی استوار است، معادله شبکه بولتزمن<sup>۲</sup> (LBE) بر اساس حل معادله گسسته شده سرعت بولتزمن، در فیزیک آماری پایه گذاری شده است [۱]. معادلات ناویر استوکس معادلات حاکم بر جریان هستند که با حل آنها میدان جریان حل می شود. روش های حجم محدود<sup>۳</sup>، اختلاف محدود<sup>۴</sup> و المان محدود<sup>۵</sup> از جمله روش های عددی معمولی هستند که برای حل معادلات ناویر- استوکس به کار رفته اند. هر چند معادلات ناویر استوکس برای تحلیل بسیاری از جریان ها کارایی دارند، ولی در استفاده از آنها نیز محدودیت هایی وجود دارد. از جمله این که، این معادلات تنها بر رژیم جریان پیوسته حاکم هستند. برای رفع این مشکل از معادله بولتزمن که حالت کلی از معادلات ناویر استوکس است و کلیه معادلات بقای جرم، بقای مومنتم و حتی معادله بقای انرژی را نیز ارضا می کند، استفاده می شود. پس می توان در حل میدان جریان به جای استفاده از چندین معادله که با یکدیگر وابسته هستند (بقای جرم، مومنتم و در مواردی خاص معادله انرژی) از یک معادله استفاده کرد که در ادامه با توجه به شکل کلی معادله مشخص می شود و به صورت صریح<sup>۶</sup> نیز قابل حل است [۲]. با توجه به ماهیت روش شبکه بولتزمن، و اینکه تمام محاسبات به صورت صریح صورت می گیرد، قابلیت موازی سازی در این روش بسیار بالا است و این موضوع یکی از مزایای این روش به حساب می آید. همچنین سهولت اعمال شرایط مرزی در این روش سبب شده است که مدلسازی حرکت سیال در هندسه های پیچیده، با سادگی چشمگیری نسبت به روشهای متداول در دینامیک سیالات محاسباتی صورت پذیرد. از مزایای دیگر این روش این است که بررسی میکروسکوپی جریان سیال نیز امکان پذیر است و همچنین در آن نیازی به حل معادله اضافی برای فشار نیست. LBM توانایی خودش را برای شبیه سازی جریان مخلوط سیال مثل جریانهای چند فاز [۳ و ۴]، جریانهای محیط متخلخل، پخش<sup>۷</sup> و نفوذ<sup>۵ و ۶</sup>، جریان

---

<sup>1</sup> computational fluid dynamics :CFD

<sup>2</sup> Lattice Boltzmann Equation

<sup>3</sup> finite volume

<sup>4</sup> finite difference

<sup>5</sup> finite element

<sup>6</sup> Explicit

<sup>7</sup> dispersion

مخلوط‌های معلق [۷ و ۸]، جریانهای تراکم پذیر [۹ و ۱۰] و جریانهای مغناطیسی [۱۱]، اثبات کرده است. همچنین امکان شبیه سازی موفق انواع حالات فیزیکی، از جریان ساده در کانال تا جریان در هندسه های پیچیده، جریان‌های چند فازی و احتراق را فراهم می‌سازد [۱۲].

## ۲-۱. معادله بولتزمن و روش شبکه بولتزمن

دو روش مهم در دهه‌های اخیر برای شبیه‌سازی سیالات در حوزه‌ی دینامیک سیالات محاسباتی توسعه داده شده‌اند. روش سنتی که بر مبنای حل عددی معادلات ناویر استوکس پایه گذاری شده‌است، یکی از آنهاست. معادلات (۱-۱) و (۲-۱) به ترتیب معادلات بقای جرم و مومنتوم را نشان می‌دهند. معادلات دیفرانسیل پاره‌ای از طریق جداسازی فضا و زمان بوسیله روش‌های اختلاف محدود، المان محدود و یا حجم محدود برای به دست آوردن مقادیر فشار و سرعت جریان سیال، حل می‌شوند.

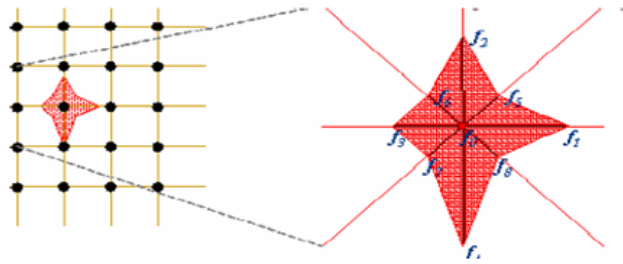
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V}) = 0 \quad (1-1)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \nabla \cdot \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla(\mu \nabla \vec{V}) + \vec{g} \quad (2-1)$$

در مقابل روش‌های فوق، LBM با تقسیم زمان و فضا به فواصل کوچک، شبکه‌ای را شکل می‌دهد و سیال را به شکل ذرات مجزا گسسته‌سازی می‌کند. بنیادی‌ترین مفهومی که LBM بر پایه آن بنا نهاده می‌شود، با پاسخ دادن به این سوال شکل می‌گیرد که: احتمال پیدا کردن یک ذره، اطراف موقعیت  $\vec{x}$  در زمان  $t$  با مومنتم  $\vec{P}$  چقدر است؟ در پاسخ به این سوال تابع چگالی احتمال یا یک تابع توزیع<sup>۲</sup> معرفی می‌شود. در شکل ۱-۱ می‌توان مفهوم تابع توزیع را بهتر مشاهده کرد.

<sup>1</sup> Diffusion

<sup>2</sup> Distribution function



شکل ۱-۱. مفهوم تابع توزیع

### ۱-۲-۱. معادله انتقال بولتزمن

لودینگ ادوارد بولتزمن<sup>۱</sup> فیزیکدان اتریشی، بزرگترین دستاوردش در حوزه‌ی توسعه‌ی مکانیک آماری، شرح و پیش‌بینی چگونگی تعیین خواص ماده مثل لزجت، هدایت حرارتی و ضریب پخش بوسیله‌ی خواص اتمها و ملکول‌ها بود. او در سال ۱۸۷۲ میلادی معادله‌ای برای توصیف تغییرات تابع توزیع ذرات با مکان و زمان ارائه داد که به افتخار او معادله بولتزمن نامیده شده است [۱۳، ۱۴ و ۱۵].

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \bar{C} \cdot \nabla_x f + \bar{F} \cdot \nabla_c f = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} \quad (۳-۱)$$

در این معادله  $\nabla_x f$  و  $\nabla_c f$  به ترتیب گرادیان‌های مکانی و سرعتی تابع توزیع،  $\bar{F}$  نیروی خارجی بر واحد جرم اعمال شده به ذره و  $\bar{C}$  سرعت ذره هستند. عبارت  $\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll}$  جمله مربوط به برخورد ذرات با یکدیگر است. حل معادله بولتزمن به دلیل پیچیدگی جمله برخورد مشکل است. در اکثر موارد مدلی موسوم به مدل  $BGK$ <sup>۲</sup> این مشکل را رفع می‌کند. این مدل بیان می‌دارد که بین ذرات، تنها برخوردهای دوتایی اتفاق می‌افتد و به صورت زیر ارائه می‌شود [۱۶]:

<sup>۱</sup> Ludwig Eduard Boltzmann

<sup>۲</sup> Bhatnagar-Gross-Krook model

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} = \omega(f^{eq} - f) = \frac{1}{\tau}(f^{eq} - f) \quad (4-1)$$

$f^{eq}$  تابع توزیع تعادلی و  $f$  تابع توزیع بعد از برخورد است. ثابت  $\omega$  بسامد برخورد و  $\tau$  زمان آسودگی و مدت زمانی است که ذرات بعد از برخورد از حالت تعادل خود خارج هستند.

### ۲-۲-۱. معادله شبکه بولتزمن

در روش شبکه بولتزمن، معادله (۳-۱) برای جهات خاصی معتبر است. بنابر این معادله گسسته شده بولتزمن در یک جهت خاص و در غیاب نیروهای خارجی عبارتست از:

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \bar{C}_{\alpha} \cdot \vec{\nabla}_x f_{\alpha} = \frac{1}{\tau}(f_{\alpha}^{eq} - f_{\alpha}) \quad (5-1)$$

معادله بالا ابزار اصلی شبکه بولتزمن و جایگزین معادلات ناویر استوکس در شبیه‌سازی CFD است. معادلات ناویر استوکس را می‌توان از معادله بولتزمن به دست آورد.

در LBM ناحیه حل باید به شکل شبکه تقسیم‌بندی شود. در هر گره شبکه، تابع توزیع برای آن ذره اختصاص می‌یابد. بعضی از این ذرات در امتداد جهات خاصی به سمت گره‌های مجاور حرکت می‌کنند. تعداد و جهات و لینک‌های شبکه بستگی به آرایش شبکه دارد. طبقه‌بندی معمول به کار رفته در LBM به ابعاد مسئله و جهات سرعتی مربوط می‌شود و به شکل  $D_n Q_m$  نمایش داده می‌شود.  $n$  تعداد ابعاد مسئله (دوبعدی یا سه بعدی) و  $m$  تعداد لینک‌های مدل سرعتی به کار رفته است. در این پایان نامه از مدل  $D_2 Q_9$  استفاده شده است، که بیانگر حالت دو بعدی با ۹ مسیر برای سرعت است. شکل ۱-۳ این مدل را به خوبی نشان می‌دهد. این شبکه اولین بار توسط کیان<sup>۱</sup> ارائه شد [۱۷]. همانگونه که دیده می‌شود هر گره می‌تواند از هشت مسیر با گره‌های اطراف ارتباط برقرار کند و با احتساب محل خود ذره، ۹ احتمال برای حرکت ذره پیش‌بینی می‌شود که با

<sup>۱</sup> Qian