دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد گرایش ریاضی کاربردی

عنوان

رهیافت تحلیلی هموتوپی بهینه برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی

استاد راهنما
دکتر جعفر صابری نجفی

استاد مشاور
دکتر سهراب عفتی

نگارش
حسین صابری جعفری

تابستان ۱۳۹۰

چکیده

روشی که در این پایان‌نامه از آن برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی بهره گرفته‌ایم، اولین بار در سال ۱۹۹۲ توسط لیائو بکار برده شد. او شکل اولیه روش تحلیلی هموتوپی را در سال ۱۹۹۲ برای حل یک معادله دیفرانسیل غیرخطی بکار برد. در این روش، از معادله‌ای به نام معادله تغییر شکل مرتبه صفر استفاده کرد. این معادله از یک حدس اولیه برای جواب و یک عملگر خطی کمکی تشکیل شده است. روش هموتوپی لیائو، آزادی زیادی برای انتخاب این دو پارامتر فراهم می‌کند.

در ادامه لیائو دریافت که روش تحلیلی هموتوپی نمی‌تواند همگرایی سری‌های تقریب را تضمین کند، لذا برای غلبه به این محدودیت در ۱۹۹۷ پارامتر کمکی غیرصفری را معرفی کرد، تا خانواده‌ای از معادلات دو پارامتری ایجاد کند. این پارامتر را، پارامتر کنترل-همگرایی می‌نامند. در سال ۲۰۰۸ مارینکا با ترکیب دوپارامتر از معادله تغییر شکل مرتبه صفر لیائو، به معادله جدیدی دست یافت. این روش، روش هموتوپی مجانبی نام گرفت که در چارچوب روش تحلیلی هموتوپی قرار می‌گیرد.

مارینکا در ادامه، روش بهینه هموتوپی مجانبی را توسعه داد که در آن مربع خطای باقیمانده مینیمم می‌شود. در این روش، به تعداد مرتبه ی تقریب، پارامتر کنترل-همگرایی به کار رفته است، که باعث می‌شود تقریب بهتری بدست آید، اما در عوض، محاسبه‌ی مربع خطاهای باقیمانده در این روش بسیار زمان بر خواهد شد.

در سال ۲۰۰۹، ژائو نیوبه منظور ارتقاء کارآمدی روش هموتوپی برای حل مسائل غیرخطی، روش دیگری به نام روش تحلیلی هموتوپی بهینه‌ی تک گامی را معرفی کرد.

رهیافت دیگری که در این پایان‌نامه، از آن برای حل معادلات غیرخطی استفاده می‌کنیم، رهیافت تحلیلی هموتوپی بهینه می‌باشد، که توسط لیائو ارائه شده و تنها از سه پارامتر کنترل-بهینه استفاده شده است. او در این رهیافت، به منظور کم کردن زمان محاسبه‌ی مربع خطای مانده، تعریف دیگری به نام متوسط خطای مانده را ارائه کرده است.

آنچه در این رساله به رشته‌ی تحریر در آمده است، بیان و مقایسه‌ی سه روش هموتوپی بهینه‌ی تک گامی ژائو نیو، هموتوپی مجانبی مارینکا و هموتوپی بهینه‌ی لیائو می‌باشد.

کلمات کلیدی: *روش تحلیلی هموتوپی، روش هموتوپی مجانبی بهینه، روش هموتوپی بهینه‌ی تک گامی، رهیافت تحلیلی هموتوپی بهینه، معادلات دیفرانسیل غیرخطی*

فهرست مطالب

لیست تصاویر

لیست جداول

فصل ۱

پیش نیازها و معرفی روش تحلیلی هموتوپی

۱.۱ پیشگفتار

تجربه نشان داده است که معادلات غیرخطی دشوارتر از معادلات خطی حل می‌شوند، به خصوص اگر بخواهیم این چنین معادلاتی را با استفاده از روش‌های تحلیلی حل کنیم[۱]. در اینجا دو معیار برای رضایت‌بخشی یک روش تحلیلی برای حل معادلات غیرخطی معرفی می‌کنیم :

(الف) روش اتخاذ شده بتواند جواب‌های تقریبی کارآمدی را برای معادلات غیرخطی مورد نظر ارائه کند.

(ب) روش مورد نظر بتواند تضمین کند که جواب‌های تقریبی حاصل از اعمال روش، در حوزه‌ی همه ی پارامترهای فیزیکی، به اندازه‌ی کافی دقیق هستند.

با استفاده از دو معیار بالا، می‌توانیم درباره‌ی مزیت و برتری فنون تحلیلی مختلف برای حل مسائل غیرخطی بحث کنیم.

فنون اختلال[۲]، بطور گسترده‌ای در علوم و مهندسی به کار رفته اند. اکثر فنون اختلال بر پایه پارامترهای فیزیکی کوچک (کمیت‌های اختلال) استوار هستند. در حالت کلی، روش‌های اختلال با استفاده از کمیت‌های اختلال، یک مسأله‌ی غیرخطی را به تعداد بی شمار زیرمسأله‌های خطی(گاهی اوقات غیرخطی) تبدیل می‌کنند و سپس به وسیله‌ی مجموع جواب‌های چند زیر مسأله‌ی اول آن را تقریب می‌زنند. روش‌های اختلالی ساده هستند و فهم‌شان نیز آسان است. تقریبات اختلالی اغلب دارای معانی فیزیکی هستند، متأسفانه هر مسأله غیرخطی چنین کمیت اختلالی ندارد. مهمتر از این، اکثر تقریبات اختلالی فقط برای پارامترهای فیزیکی

---

[۱] Analytical Method

[۲] Perturbation techniques

کوچک، معتبر هستند و بطور کلی، تضمین شده نیست که نتیجه یک اختلال در حوزه‌ی همه‌ی پارامترهای فیزیکی معتبر باشد. بنابراین فنون اختلالی نه تنها معیار (الف) را صدق نمی‌کنند بلکه در معیار (ب) نیز برقرار نیستند[۴] . برای غلبه بر محدودیت‌های فنون اختلالی، تعدادی از روش‌های متداول غیر اختلالی توسعه داده شده اند، از جمله‌ی این روش‌ها، روش پارامتر کوچک مصنوعی لیاپانوف[۳]، روش بسط-δ[۴] ، روش تجزیه آدومیان[۵]و غیره می‌باشند.

اصولاً همه‌ی این روش‌ها بر یک پارامتر مصنوعی استوار هستند و جواب‌های تقریبی، بصورت سری‌هایی از پارامتر مصنوعی بسط داده می‌شوند. این پارامتر مصنوعی اغلب طوری به‌کار می‌رود که می‌توان جواب‌های تقریبی کارآمدی برای یک معادله غیرخطی بدست آورد. در مقایسه با فنون اختلال، این در واقع یک مزیت روش است. به هر حال، هر کس می‌تواند پارامتر کوچک مصنوعی را در مکان‌های مختلفی قرار دهد، اما متأسفانه فرضیه‌هایی برای راهنمایی ما که چگونه این پارامتر را در مکان بهتری قرار دهیم تا بتوانیم تقریب مناسبی به دست آوریم وجود ندارد. برای مثال روش آدومیان به آسانی از عملگر خطی $\frac{d^k}{dx^k}$ در اکثر موارد استفاده می‌کند، که k مرتبه بزرگترین مشتق معادله‌ی مورد مطالعه می‌باشد، و لذا بدست آوردن جواب‌های متناظر پس از k بار انتگرال گیری نسبت به x تقریباً آسان می‌شود. به هر حال چنین عملگر خطی ساده‌ای جواب‌های تقریبی به صورت سری‌های توانی تولید می‌کند. اما متأسفانه سری‌های توانی اغلب شعاع همگرایی متناهی دارند. بنابراین روش تجزیه آدومیان نمی‌تواند همگرایی سری جواب‌های تقریبی به جواب دقیق را تضمین کند.

به طور کلی همه‌ی روش‌های متداول غیراختلالی مانند پارامتر کوچک مصنوعی لیاپانوف، روش بسط-δ و روش تجزیه آدومیان نمی‌توانند همگرایی سری جواب‌های تقریبی به جواب دقیق را تضمین کنند. بنابراین این روش‌های رایج غیراختلالی فقط معیار (الف) را صدق می‌کنند.

اولین بار در سال ۱۹۹۲، لیائو [۶] هموتوپی[۷] را که یک مفهوم بنیادی در توپولوژی[۸] می باشد را برای بدست آوردن جواب‌های تقریبی تحلیلی معادلات دیفرانسیل غیرخطی به کار برد. لیائو شکل اولیه‌ی روش تحلیلی هموتوپی [۹] را در سال ۱۹۹۲ برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی به صورت زیر

$$\mathcal{N}[u(t)] = 0, \quad t \in \Omega, \qquad (۱.۱)$$

[۳] Lyapunov's artificial small parameter method

[۴] δ-expansion method

[۵] Adomian decomposition method

[۶] Shijun Liao

[۷] Homotopy

[۸] Topology

[۹] Homotopy Analysis Method

که در آن $\mathcal{N}$ عملگر غیرخطی، $u(t)$ یک تابع مجهول می‌باشد، به کار گرفت. لیائو خانواده‌ی یک پارامتری از معادلات غیرخطی (۱.۱)به نام معادله‌ی تغییر شکل مرتبه‌ی صفر[۱۰]، به صورت زیر معرفی کرد.

$$(1-q)\mathcal{L}[\phi(t,q)-u_0(t)]+q\mathcal{N}[\phi(t,q)]=0, \quad t\in\Omega, \quad q\in[0,1], \tag{۲.۱}$$

که در آن $\mathcal{L}$ عملگر خطی کمکی و $u_0(t)$ یک حدس اولیه برای جواب و $q\in[0,1]$ پارامتر نشاننده[۱۱] است. هموتوپی برای انتخاب $\mathcal{L}$ و $u_0(t)$ آزادی زیادی را فراهم می‌کند. با قرار دادن $q=0$ و $q=1$ در معادله‌ی (۲.۱)، به ترتیب داریم $\phi(t,0)=u_0(t)$ و $\phi(t,1)=u(t)$. فرض می‌کنیم که عملگر خطی $\mathcal{L}$ و حدس اولیه یعنی $u_0(t)$ طوری انتخاب شوند که بسط تیلور زیر

$$\phi(t,q)=u_0(t)+\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(t)q^n \tag{۳.۱}$$

در $q=1$ همگرا باشد، آنگاه سری زیر که سری جواب‌های هموتوپی[۱۲] نامیده می‌شود

$$u(t)=u_0(t)+\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(t) \tag{۴.۱}$$

در معادله (۱.۱) صدق می‌کند، اثبات این مطلب در بخش (۱.۲.۱) آورده شده است. لیائو در ادامه‌ی کار دریافت که روش اولیه‌ی تحلیلی هموتوپی، نمی‌تواند همگرایی سری (۳.۱) را تضمین کند. برای غلبه به این محدودیت، لیائو در ۱۹۹۷، پارامتر کمکی غیر صفری به نام c را معرفی کرد تا خانواده‌ای دو پارامتری از معادلات غیرخطی (۱.۱) (یعنی معادله‌ی تغییر شکل مرتبه‌ی صفر) را به صورت زیر معرفی کند

$$(1-q)\mathcal{L}[\phi(t,q)-u_0(t)]=cq\mathcal{N}[\phi(t,q)], \quad t\in\Omega, \quad q\in[0,1]. \tag{۵.۱}$$

توجه داریم که جواب معادله‌ی (۵.۱)، یعنی $\phi(t,q)$، تنها به مقدار t وابسته نیست بلکه به مقدار پارامتر کمکی c نیز بستگی دارد. پارامتر کمکی c می تواند ناحیه و سرعت همگرایی سری (۴.۱) را تنظیم و کنترل کند. استفاده از پارامتر کمکی c با وجود اینکه هیچ معنای فیزیکی را در بر ندارد اما با معرفی یک درجه آزادی بیشتر، روش اولیه تحلیلی هموتوپی را به طور زیادی بهبود می‌بخشد. پارامتر c، به پارامتر کنترل-همگرایی[۱۳] شهرت دارد. کاربرد پارامتر کنترل-همگرایی حقیقتاً پیشرفت زیادی داشته است. درجات آزادی مصنوعی بیشتر، این امکان را فراهم می‌کند تا تقریب‌های بهتری به وسیله‌ی روش تحلیلی هموتوپی به دست بیاید. لیائو در سال ۱۹۹۹ بوسیله معادله‌ی تغییر شکل مرتبه صفر زیر، درجات آزادی مصنوعی

[۱۰] Zero-order deformation equation

[۱۱] Embedding parameter

[۱۲] Homotopy-series solutions

[۱۳] Convergence-control parameter

بیشتری را معرفی کرد

$$[1 - B(q)]\mathcal{L}[\phi(t,q) - u_0(t)] = cA(q)\mathcal{N}[\phi(t,q)], \quad t \in \Omega, \quad q \in [0,1]. \qquad (۶.۱)$$

که در آن $A(q)$ و $B(q)$، توابع تغییر شکل نامیده می‌شوند و در روابط زیر صدق می‌کنند

$$A(0) = B(0) = 0, \quad A(1) = B(1) = 1. \qquad (۷.۱)$$

بسط تیلور توابع تغییر شکل $A(q)$ و $B(q)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند و به ازای $|q| \leq 1$ همگرا می‌باشند. (پارامترهای μ_m و σ_m در فصل چهارم به طور کامل تعریف می‌شوند)

$$A(q) = \sum_{m=1}^{+\infty} \mu_m q^m, \quad B(q) = \sum_{m=1}^{+\infty} \sigma_m q^m. \qquad (۸.۱)$$

اکنون این سؤال مطرح است که چگونه می‌توانیم پارامتر کنترل-همگرایی مناسبی برای بدست آوردن سری جواب (۴.۱) پیدا کنیم؟ یا حتی پارامتری که سرعت همگرایی سری (۴.۱) را تسریع بخشد؟ یک راه مستقیم برای بررسی همگرایی سری جواب هموتوپی (۴.۱) وجود دارد، آن هم قرار دادن این سری در معادله‌ی (۱.۱) و شرایط اولیه و مرزی، و سپس بررسی مربع خطاهای مانده‌ی انتگرال گرفته شده در سرتاسر ناحیه می‌باشد (رابطه‌ی (۹.۱) که در ادامه معرفی می‌شود، فرمول مربع خطای مانده را بیان می‌کند). با افزایش مرتبه‌ی تقریب، هرچه مربع خطای مانده یعنی (۹.۱) سریعتر به صفر برسد، سری جواب هموتوپی (۴.۱) سریعتر به جواب دقیق همگرا می شود. اما وقتی تقریبات، دارای پارامترهای کنترل-همگرایی و پارامترهای فیزیکی نامعلومی باشند، محاسبه مربع خطای مانده یعنی (۹.۱)، در تقریبات مرتبه‌ی بالا زمان بر خواهد بود. برای جلوگیری از محاسبه‌ی زمان بر، لیائو پیشنهاد کرد که می‌توان همگرایی سری‌های مرتبط با سری (۴.۱) مانند $u'(t)$، $u''(t)$ و $u'''(t)$و ...، را در نظر گرفت به شرطی که این سری‌ها دارای مقادیر عددی معلومی نباشند. لیائو دریافت که اغلب ناحیه ای مانند R_c وجود دارد که هر مقدار $c \in R_c$، جواب یک سری همگرا را ارائه می دهد. به علاوه، چنین ناحیه‌ای را می توان با رسم منحنی های این کمیت‌های مجهول یعنی $u'(t)$، $u''(t)$ و$u'''(t)$ و ...، در مقابل مقادیر مختلف c به دست آورد. برای مثال برای یک معادله دیفرانسیل غیرخطی $\mathcal{N}[u(t)] = 0$، می توان منحنی های $u'(0)$، $u''(0)$ را در مقابل مقادیر c رسم کرد. این منحنی ها، ''منحنی‌های-c'' [۱۴] یا ''منحنی‌های پارامتر کنترل-همگرایی'' نامیده می‌شوند؛ که بطور موفقیت آمیزی در اکثر معادلات غیرخطی کاربرد دارند.

اما جای تأسف است که منحنی‌های پارامتر کنترل-همگرایی (منحنی‌های-c) نمی توانند به ما بگویند که چه مقداری از $c \in R_c$، سری (۴.۱) را با همگرایی بهتری ارائه می‌دهد. در سال ۲۰۰۷، یابوشیتا [۱۵]،یک

[۱۴] C-curves

[۱۵] Kazuki Yabushita

روش بهینه سازی [۱۶] را برای پارامتر کنترل-همگرایی پیشنهاد کرد. روند آنها بر پایه مربع خطای مانده‌ی معادله‌ی غیرخطی $\mathcal{N}[u(t)]$ استوار است. فرمول مربع خطای مانده به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Delta(c) = \int_{\Omega} \left(\mathcal{N}\left[\sum_{k=0}^{M} u_k(t) \right] \right)^2 d\Omega \tag{۹.۱}$$

که درآن $\sum_{k=0}^{M} u_k(t)$، تقریب مرتبه‌ی M می‌باشد. بدیهی است که $\Delta(c)$ وقتی به سمت صفر میل کند(هر چه مرتبه‌ی تقریب یعنی M افزایش یابد) نشانگر این است که سری جواب (۴.۱) به جواب دقیق همگرا می‌شود. در Mامین مرتبه از تقریب، مقدار بهینه‌ی c به وسیله معادله‌ی جبری غیرخطی زیر

$$\frac{d\Delta(c)}{dc} = 0$$

تعیین می‌شود. در حالتی که دو معادله غیرخطی به صورت زیر داشته باشیم،

$$\mathcal{N}_1[u, v] = 0, \quad \mathcal{N}_2[u, v] = 0,$$

دو پارامتر کنترل همگرایی مانندc_1 و c_2 وجود دارد. لذا مربع خطای مانده این گونه تعریف می‌شود

$$\Delta(c_1, c_2) = \sum_{j=1}^{2} \int_{\Omega} \left(\mathcal{N}_j\left[\sum_{k=0}^{M} u_k, \sum_{k=0}^{M} v_k \right] \right)^2 d\Omega$$

و سپس بوسیله‌ی حل دو معادله‌ی جبری غیرخطی زیر

$$\frac{\partial\Delta(c_1, c_2)}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial\Delta(c_1, c_2)}{\partial c_2} = 0,$$

مقدار بهینه c_1 و c_2 را بدست می‌آوریم[۱۹] .

اگرچه شکل کلی معادله تغییر شکل مرتبه‌ی صفر (۶.۱) در حدود ۱۰ سال پیش ارائه شده و حتی شکل‌های تعمیم یافته‌ی آن نیز بعدها گزارش شده است [۵] ، اما بیشتر کاربران HAM(مخفف $Method$ $Homotopy\ Analysis$) معادله‌ی (۵.۱) را به خاطر سادگی آن به کار می‌برند. مارینکا[۱۷] برای اولین بار [۱۲، ۱۱]، در سال ۲۰۰۸ معادله‌ی تغییر شکل مرتبه‌ی صفر زیر را در نظر گرفت[۱۴]،

$$[1 - q]\mathcal{L}[\phi(t, q) + g(t)] = H(q)\mathcal{N}[\phi(t, q)], \tag{۱۰.۱}$$

که در آن $g(t)$ بسته به مسأله‌ی غیرخطی مورد نظر انتخاب می‌شود.

به نظر می‌رسد که معادله‌ی (۱۰.۱) حالت خاصی از معادله‌ی (۶.۱) است. مارینکا در [۱۱، ۱۴]، به ارائه‌ی توضیحاتی در این باره می‌پردازد و ما نیز آن را در فصل سوم بیان خواهیم کرد.

[۱۶] Optimization method

[۱۷] Vasile Marinca

مارینکا همچنین در این روند $H(1) = 1$ را غیرضروری دانسته است، که به زعم او این موضوع می‌تواند آزادی بیشتری را برای انتخاب پارامتر c_n در رابطه‌ی (۵.۳) فراهم کند. مارینکا به منظور تعیین مقدار بهینه‌ی پارامتر کنترل-همگرایی، روش خود را با مینیمم کردن مربع خطای مانده توسعه داد [۱۲] و "روش بهینه هموتوپی مجانبی" [18] را بنا نهاد. در این روش در Mامین مرتبه از تقریب، یک مجموعه از معادلات جبری غیرخطی بر حسب مقادیر c_1،c_2، ...، c_M حل می‌شوند تا بتوانیم مقادیر بهینه‌ی آنها را بدست آوریم. از دیدگاه نظری، وقتی از پارامترهای کنترل-همگرایی بیشتری استفاده می‌شود، تقریب بهتری از طریق این روش بهینه به دست می‌آید. اما جای تأسف است، چون با داشتن پارامترهای نامعلوم زیاد، محاسبه‌ی مربع خطاهای مانده بسیار زمان بر می‌شود. این مطلب در فصل سوم به وضوح دیده می شود. در سال ۲۰۰۹ ژائو نیو[19] و چون وانگ[20]، در مقاله‌ی خود [۱۶] ادعا کردند که روند بهینه‌ی مارینکا اغلب در عمل، برای مسائل با مرتبه‌ی بالای غیرخطی پیچیده می‌باشد و کارآیی ندارد، این موضوع را در فصول دوم و سوم به تفصیل شرح می دهیم.

۲.۱ روش تحلیلی هموتوپی

در این بخش ایده‌ی اصلی روش هموتوپی را با ذکر مثالی بیان می‌کنیم[۶]. این مثال در حقیقت مسأله‌ی سقوط آزاد یک جسم به جرم m می باشد که آزادانه از فضا با سرعت $U(\tau)$ که نسبت به زمان τ تغییر می‌کند (سرعت اولیه در لحظه‌ی سقوط صفر فرض شده است) و تحت تأثیر نیروی گرانش g و با مقاومت هوا $aU^2(\tau)$ به سمت پایین سقوط می‌کند. در این مسأله a ثابت است. با استفاده از قانون دوم نیوتن مدل ریاضی این حرکت عبارت است از

$$m\frac{dU(\tau)}{d\tau} = mg - aU^2(\tau) \tag{۱۱.۱}$$

با شرط اولیه

$$U(0) = 0. \tag{۱۲.۱}$$

از تعبیر فیزیکی این مسأله واضح است که وقتی $\tau \to \infty$، U_∞ به سرعت نهائی زیر می‌رسد

$$U_\infty = \sqrt{\frac{mg}{a}}, \tag{۱۳.۱}$$

[18] Optimal homotopy-asymtotic method

[19] Zhao Niu

[20] Chun Wang

با استفاده از تغییر متغیر

$$U(\tau) = U_\infty V(t), \quad \tau = \frac{U_\infty}{g} t, \tag{۱۴.۱}$$

معادله‌ی فاقد بعد زیر

$$\dot{V}(t) + V^۲(t) = ۱ \quad t \geq ۰, \tag{۱۵.۱}$$

به همراه شرط اولیه‌ی

$$V(۰) = ۰ \tag{۱۶.۱}$$

به دست می‌آید. تحت این تبدیل، رابطه‌ی (۱۳.۱) به صورت زیر در می‌آید

$$\lim_{t \to \infty} V(t) = ۱. \tag{۱۷.۱}$$

می‌توانیم اثر بخش بودن تقریبات متفاوت جواب را از طریق مقایسه‌ی این تقریبات با جواب دقیق

$$V(t) = tanh(t), \tag{۱۸.۱}$$

مشاهده کنیم. اکنون روند حل معادله‌ی غیرخطی

$$\mathcal{N}[u(t)] = ۰ \tag{۱۹.۱}$$

تحت شرایط اولیه یا مرزی معلوم را، با استفاده از HAM توضیح می‌دهیم، و سپس در صفحه‌ی ۱۴ به ادامه‌ی حل این مثال می‌پردازیم.

هموتوپی یک نگاشت پیوسته از بازه‌ی $[۰,۱]$ به یک فضای تابعی می‌باشد که در آن مفهوم پیوستگی نسبت به توپولوژی فضای تابعی تعریف می‌شود. به طور حسی، هموتوپی $\rho(t)$ تابع $\rho(۰) = f$ را به تابع $\rho(۱) = g$ تغییر شکل می دهد وقتی که پارامتر t از صفر تا یک تغییر می‌کند. حال، هموتوپی زیر را می‌سازیم

$$\mathbf{H}[\phi(t,q), u_۰(t), \mathcal{H}(t), c, q] \equiv (۱-q)\mathcal{L}[\phi(t,q) - u_۰(t)] - qc\mathcal{H}(t)\mathcal{N}[\phi(t,q)] \tag{۲۰.۱}$$

که در آن $c \neq ۰$ پارامتر کمکی، $\mathcal{H}(t) \neq ۰$ تابع کمکی، $q \in [۰,۱]$ پارامتر نشاننده و $u_۰(t)$ تقریب اولیه‌ی جواب است که در شرایط اولیه و مرزی مفروض صدق می‌کند($\mathbf{H}$ معرف هموتوپی می‌باشد). روش تحلیلی هموتوپی بر نگاشت پیوسته‌ی $\phi(t,q)$ استوار است، به طوری که اگر پارامتر نشاننده‌ی q از صفر به یک افزایش پیدا کند، $\phi(t,q)$ از $u_۰(t)$ یعنی حدس اولیه جواب، تا $u(t)$ یعنی جواب دقیق مسأله تغییر می‌کند.

با مساوی صفر قرار دادن هموتوپی (۲۰.۱) به معادله‌ی مهم زیر دست می‌یابیم

$$(1-q)\mathcal{L}(\phi(t,q)-u_0(t)) = qc\mathcal{H}(t)\mathcal{N}[\phi(t,q)] \quad (۲۱.۱)$$

معادله‌ی (۲۱.۱)، به معادله‌ی تغییر شکل مرتبه‌ی صفر شهرت دارد. در معادله (۲۱.۱) قرار می‌دهیم $q=0$. در نتیجه رابطه‌ی زیر حاصل می شود

$$\mathcal{L}[\phi(t,0)-u_0(t)] = 0. \quad (۲۲.۱)$$

و از رابطه‌ی (۲۲.۱) نیز نتیجه می‌شود

$$\phi(t,0) = u_0(t). \quad (۲۳.۱)$$

با قرار دادن $q=1$ در معادله‌ی (۲۱.۱) خواهیم داشت

$$\mathcal{N}[\phi(t,1)] = 0, \quad (۲۴.۱)$$

و لذا

$$\phi(t,1) = u(t). \quad (۲۵.۱)$$

اکنون تعریف می‌کنیم

$$u_m(t) = \frac{1}{m!}\frac{\partial^m \phi(t,q)}{\partial q^m}\bigg|_{q=0} \quad (۲۶.۱)$$

به کمک بسط تیلور و روابط (۲۳.۱) و (۲۵.۱)، بسط $\phi(t,q)$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$\phi(t,q) = \phi(t,0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!}\frac{\partial^m \phi(t,q)}{\partial q^m}\bigg|_{q=0} q^m = u_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(t) q^m. \quad (۲۷.۱)$$

هدف بعدی ما محاسبه‌ی جملات $u_m(t)$ در سری جواب است. برای انجام این کار، نخست از معادله (۲۱.۱)، نسبت به q مشتق می‌گیریم. در نتیجه عبارت زیر حاصل می‌شود

$$\begin{aligned}&(1-q)\mathcal{L}\left(\frac{\partial \phi(t,q)}{\partial q}\right) - \mathcal{L}(\phi(t,q)-u_0(t))\\ &= c\mathcal{H}(t)\mathcal{N}[\phi(t,q)] + qc\mathcal{H}(t)\frac{\partial \mathcal{N}[\phi(t,q)]}{\partial q}\end{aligned} \quad (۲۸.۱)$$

پس از قرار دادن $q=1$ در معادله (۲۸.۱) و با استفاده از معادلات (۲۳.۱) و (۲۶.۱) رابطه‌ی زیر بدست می‌آید

$$\mathcal{L}[u_1(t)] = c\mathcal{H}(t)\mathcal{N}[u_0(t)] \quad (۲۹.۱)$$

ادعا می‌کنیم که پس از mبار مشتق گرفتن از معادله‌ی (۲۱.۱) نسبت به q، به رابطه‌ی زیر دست می‌یابیم

$$(1-q)\mathcal{L}\left(\frac{\partial^m\phi(t,q)}{\partial q^m}\right)-m\mathcal{L}\left(\frac{\partial^{m-1}\phi(t,q)}{\partial q^{m-1}}\right)$$
$$=mc\mathcal{H}(t)\frac{\partial^{m-1}\mathcal{N}[\phi(t,q)]}{\partial q^{m-1}}+qc\mathcal{H}(t)\frac{\partial^m\mathcal{N}[\phi(t,q)]}{\partial q^m},\quad m\geq 2 \tag{۳۰.۱}$$

اثبات معادله (۳۰.۱) را با نشان دادن این مطلب که این معادله برای $m=2$ برقرار است شروع می‌کنیم. لذا از معادله‌ی (۲۸.۱) نسبت به q مشتق می‌گیریم

$$(1-q)\mathcal{L}\left(\frac{\partial^2\phi(t,q)}{\partial q^2}\right)-2\mathcal{L}\left(\frac{\partial\phi(t,q)}{\partial q}\right)$$
$$=2c\mathcal{H}(t)\frac{\partial\mathcal{N}[\phi(t,q)]}{\partial q}+qc\mathcal{H}(t)\frac{\partial^2\mathcal{N}[\phi(t,q)]}{\partial q^2}, \tag{۳۱.۱}$$

رابطه‌ی (۳۱.۱) نشان می‌دهد که معادله‌ی (۳۰.۱) برای $m=2$ برقرار است.

اکنون فرض می‌کنیم معادله‌ی (۳۰.۱) برای مقدار m برقرار باشد آن گاه نشان می‌دهیم که این معادله برای مقدار $m+1$ نیز درست است. چون بنا به فرض معادله‌ی (۳۰.۱) برقرار است، لذا از معادله‌ی (۳۰.۱) نسبت به q مشتق می‌گیریم

$$(1-q)\mathcal{L}\left(\frac{\partial^{m+1}\phi(t,q)}{\partial q^{m+1}}\right)-(m+1)\mathcal{L}\left(\frac{\partial^m\phi(t,q)}{\partial q^m}\right)$$
$$=(m+1)h\mathcal{H}(t)\frac{\partial^m\mathcal{N}[\phi(t,q)]}{\partial q^m}+qc\mathcal{H}(t)\frac{\partial^{m+1}\mathcal{N}[\phi(t,q)]}{\partial q^{m+1}}, \tag{۳۲.۱}$$

معادله‌ی (۳۲.۱) نشان می‌دهد که اگر m را با $m+1$ جانشین کنیم رابطه‌ی (۳۰.۱) برقرار می شود. بنابراین نتیجه می‌گیریم که معادله (۲۶.۱)برای$m\geq 2$ برقرار است. اکنون معادله‌ی (۳۰.۱) را بر$m!$ تقسیم کرده و در آن $q=0$ را لحاظ می‌کنیم. در نتیجه رابطه‌ی زیر را به دست می‌آوریم

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{m!}\frac{\partial^m\phi(t,q)}{\partial q^m}-\frac{1}{(m+1)}\frac{\partial^{m-1}\phi(t,q)}{\partial q^{m-1}}\right]_{q=0}$$
$$=c\mathcal{H}(t)\frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}\mathcal{N}[\phi(t,q)]}{\partial q^{m-1}}\bigg|_{q=0}. \tag{۳۳.۱}$$

با ترکیب معادله (۳۳.۱) با تعریف (۲۶.۱) رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود

$$\mathcal{L}[u_m(t)-u_{m-1}(t)]=h\mathcal{H}(t)\frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}\mathcal{N}[\phi(t,q)]}{\partial q^{m-1}}\bigg|_{q=0}, \tag{۳۴.۱}$$

که برای $m\geq 2$ برقرار می‌باشد.

سپس، تابع کمکی زیر را تعریف می‌کنیم

$$\chi(m) = \begin{cases} ۰, & m \leq ۱ \\ ۱, & \text{و غیره} \end{cases} \quad (۳۵.۱)$$

اکنون می‌توانیم معادله تغییر شکل مرتبه‌ی m را به کمک معادلات (۲۹.۱) ،(۳۴.۱) و (۳۵.۱) به فرم زیر به دست آوریم

$$\mathcal{L}[u_m(t) - \chi(m)u_{m-1}(t)] = c\mathcal{H}(t)\mathcal{R}_{m-1}(t), \quad m \geq ۱ \quad (۳۶.۱)$$

که در آن

$$\mathcal{R}_n = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n \mathcal{N}[\phi(t,q)]}{\partial q^n}\bigg|_{q=0} \quad (۳۷.۱)$$

جواب معادله‌ی تغییر شکل مرتبه‌ی m (۳۶.۱) یعنی $u_m(t)$ می‌تواند به صورت زیر بیان شود

$$u_m(t) = u^h(t) + u_m^p(t) \quad (۳۸.۱)$$

که در آن $u^h(t)$ جوابی است که در معادله‌ی همگن زیر

$$\mathcal{L}[u^h(t)] = 0, \quad (۳۹.۱)$$

صدق می‌کند و $u_m^p(t)$ جواب خصوصی معادله‌ی (۳۶.۱) می‌باشد. جملات $u_m^p(t)$ به صورت متوالی از معادله‌ی زیر به دست می‌آیند

$$u_m^p(t) = \chi(m)u_{m-1}(t) + \mathcal{L}^{-1}\left\{c\mathcal{H}(t)\frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}\mathcal{N}[\phi(t,q)]}{\partial q^{m-1}}\bigg|_{q=0}\right\}, \quad (۴۰.۱)$$

که در آن $\mathcal{L}^{-1}$، عملگر معکوس عملگر خطی $\mathcal{L}$ می‌باشد.

اکنون مجموع جزئی مرتبه‌ی mام جملات $u_m(t)$ را به فرم زیر تعریف می‌کنیم

$$u^{[m]}(t) = \sum_{k=0}^{m} u_k(t), \quad (۴۱.۱)$$

در نهایت جواب معادله‌ی (۱۹.۱) به صورت زیر بیان شود[۳]

$$u(t) = \phi(t,1) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) = \lim_{m\to\infty} u^{[m]}(t). \quad (۴۲.۱)$$

۱.۲.۱ همگرایی سری جواب هموتوپی

مزیت روش HAM نسبت به روش‌های اختلالی، تولید جواب‌هایی است که همگرایی بیشتری به جواب دقیق مسأله دارند. جواب‌های به دست آمده از طریق روش HAM، به نوع انتخاب عملگر خطی $\mathcal{L}$، تابع کمکی $\mathcal{H}$، تقریب اولیه $u_0(t)$، و مقدار پارامتر کمکی c، بستگی دارد. با تغییر $\mathcal{L}$،$\mathcal{H}(t)$، $u_0(t)$، و c

می‌توانیم ناحیه‌ای که در آن سری جواب هموتوپی به جواب دقیق همگرا است و نیز سرعت همگرایی سری جواب هموتوپی به جواب دقیق را تنظیم کنیم. یکی از عوامل مهمی که در همگرایی سری جواب هموتوپی مؤثر است، نوع توابع اولیه‌ای است که از آنها استفاده می‌کنیم. برای مثال ممکن است سعی کنیم جواب را بصورت یک چند جمله‌ای یا به صورت مجموع توابع نمایی بیان کنیم. انتظار داریم توابع پایه‌ای که شباهت بیشتری از رفتار جواب واقعی را دارند، نتایج بهتری نسبت به توابع پایه‌ای که رفتارشان متفاوت با رفتار جواب واقعی است ارائه دهند یعنی به جواب واقعی نزدیک‌تر باشند.
اغلب انتخاب عملگر خطی، تابع کمکی و تقریب اولیه، نوع توابع پایه‌ای را در جواب تعیین می‌کنند. با انتخاب این عوامل می‌توانیم معادلات تغییر شکل را حل کنیم و سری جواب را گسترش دهیم. جوابی که از این طریق به دست می‌آوریم، هنوز دارای پارامتر c است. این جواب برای مقادیری از c درست می‌باشد، یعنی ناحیه‌ی R_c. برای تعیین مقادیر مناسب c، می‌توانیم منحنی‌های c− جواب را رسم کنیم. این منحنی‌ها با رسم چند مشتق اول مجموع‌های جزئی $u_m(t)$، در یک نقطه‌ی مشخص t، در مقابل مقادیر c، بدست می‌آیند. مادامی که معادله‌ی (۱۹.۱) با شرایط مرزی و اولیه‌ی مفروض جواب یکتایی داشته باشد، جمع‌های جزئی و مشتقات آنها، برای همه‌ی $c \in R_c$، به جواب درست همگرا خواهند بود، این مطلب در ادامه‌ی بحث تحت عنوان قضیه‌ای بیان می‌شود.
بطور مثال وقتی منحنی مشتق دوم جواب تقریبی، یعنی $u''(\circ)$، یا منحنی مشتق سوم جواب تقریبی، یعنی $u'''(\circ)$، را در مقابل مقادیر مختلف c رسم می‌کنیم، این منحنی دارای پاره خط افقی بالای ناحیه‌ی قابل قبول R_c خواهد بود. این پاره خط افقی بطور واضح ناحیه‌ی R_c را نمایان می‌سازد.

۲.۲.۱ قضیه‌ی همگرایی

قضیه ۱.

اگر سری زیر

$$u(t) = u_\circ(t) + \sum_{m=\backslash}^{+\infty} u_m(t), \tag{۴۳.۱}$$

همگرا باشد، که در آن $u_m(t)$ به وسیله‌ی معادله‌ی تغییر شکل مرتبه‌ی m (۳۶.۱) و با توجه به روابط (۳۵.۱) و (۳۷.۱) تعیین می‌شود، آنگاه سری (۴۳.۱) جواب معادله‌ی دیفرانسیل (۱۵.۱) و (۱۶.۱) خواهد بود.

اثبات:

می دانیم اگر سری زیر

$$\sum_{m=1}^{+\infty} u_m(t), \tag{۴۴.۱}$$

همگرا باشد، آنگاه می‌توانیم بنویسیم

$$S(t) = \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(t), \tag{۴۵.۱}$$

و نیز نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{m\to+\infty} u_m(t) = 0. \tag{۴۶.۱}$$

با در نظر گرفتن تعریف (۳۵.۱) عبارت $\sum_{m=1}^{n}[u_m(t) - \chi_m u_{m-1}(t)]$ را به صورت زیر بسط می‌دهیم

$$\sum_{m=1}^{n}[u_m(t)-\chi_m u_{m-1}(t)] = u_1+(u_2-u_1)+(u_3-u_2)+\ldots+(u_n-u_{n-1}) = u_n(t), \tag{۴۷.۱}$$

در نتیجه بنا به رابطه‌ی (۴۶.۱) نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود

$$\sum_{m=1}^{+\infty}[u_m(t) - \chi_m u_{m-1}(t)] = \lim_{n\to+\infty} u_n(t) = 0, \tag{۴۸.۱}$$

با استفاده از عبارت بالا و معادله‌ی تغییر شکل مرتبه‌ی m (۳۶.۱) رابطه‌ی زیر را نتیجه می‌گیریم

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \mathcal{L}[u_m(t) - \chi_m u_{m-1}(t)] = \mathcal{L}\left(\sum_{m=1}^{+\infty}[u_m(t) - \chi_m u_{m-1}(t)]\right) = 0, \tag{۴۹.۱}$$

لذا خواهیم داشت

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \mathcal{L}[u_m(t) - \chi_m u_{m-1}(t)] = h\mathcal{H}(t)\sum_{m=1}^{+\infty} \mathcal{R}_{m-1}(t) = 0. \tag{۵۰.۱}$$

رابطه‌ی فوق بیان می‌کند که به ازای $\mathcal{H}(t) \neq 0$ و $h \neq 0$ داریم

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \mathcal{R}_{m-1}(t) = 0, \tag{۵۱.۱}$$

اما از معادله‌ی (۵۸.۱)، که در ادامه به آن می‌رسیم، در می‌یابیم که برای معادله‌ی (۱۵.۱)، $\mathcal{R}_{m-1}(t)$ به فرم زیر به دست می‌آید

$$\mathcal{R}_{m-1}(t) = \dot{u}_{m-1}(t) + \sum_{j=0}^{m-1} u_j(t)u_{m-j-1}(t) - (1-\chi_m). \tag{۵۲.۱}$$

توجه داریم که $\mathcal{R}_{m-1}(t)$ در رابطه‌ی فوق تنها به مقادیر

$$u_0(t), u_1(t), ..., u_{m-1}(t)$$

وابسته است و این مقادیر با حل معادله‌ی تغییر شکل مرتبه‌ی m (۳۶.۱) به دست می‌آیند.

با استفاده از رابطه‌ی (۵۸.۱) و توضیحات فوق، سری $\sum_{m=1}^{+\infty} \mathcal{R}_{m-1}(t)$ را به فرم زیر بسط می‌دهیم

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{+\infty} \mathcal{R}_{m-1}(t) =& \sum_{m=1}^{+\infty} \left[\dot{u}_{m-1}(t) + \sum_{r=0}^{m-1} u_r(t) u_{m-r-1}(t) - (1-\chi_m) \right] \\ =& \sum_{m=0}^{+\infty} \dot{u}_{m-1}(t) - 1 + \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{j=0}^{m-1} u_j(t) u_{m-j-1}(t) \\ =& \sum_{m=0}^{+\infty} \dot{u}_{m-1}(t) - 1 + \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{m=j+1}^{+\infty} u_j(t) u_{m-j-1}(t) \\ =& \sum_{m=0}^{+\infty} \dot{u}_{m-1}(t) - 1 + \sum_{j=0}^{+\infty} u_j(t) \sum_{i=0}^{+\infty} u_i(t) \\ =& \dot{S}(t) + S^2(t) - 1.\end{aligned}$$

در نتیجه با استفاده از عبارت بالا و رابطه‌ی (۵۱.۱) خواهیم داشت

$$\dot{S}(t) + S^2(t) - 1 = 0, \quad t \geq 0.$$

اکنون برای این که $S(t)$ جواب دقیق معادله‌ی (۱۵.۱) و (۱۶.۱) باشد کافی است نشان دهیم رابطه‌ی $S(0) = 0$ برقرار است. به این منظور با استفاده از روابط (۴۵.۱) و (۱۶.۱) و نیز رابطه‌ی (۶۰.۱) که در ادامه به آن می‌رسیم عبارت زیر حاصل می‌شود

$$S(0) = \sum_{m=0}^{+\infty} u_m(0) = u_0(0) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(0) = u_0(0) = 0.$$

و این بدین معنی است که $S(t)$ باید جواب دقیق معادله‌ی (۱۵.۱) و (۱۶.۱) باشد.[۶]

۳.۲.۱ راهبرد هایی برای بهبود جواب

روش تحلیلی هموتوپی، آزادی زیادی را برای بهبود جواب فراهم می‌کند. اکنون سؤال اینجاست که چگونه عملگر خطی مناسب و نیز تابع کمکی و تقریب اولیه کارآمدی را از میان بیشمار انتخاب، برگزینیم. لیائو با ذکر سه قانون یا به عبارتی سه راهنمایی، به این سؤال پاسخ داده است که در ادامه‌ی بحث به مرور آنها می‌پردازیم.

قانون اول(قانون بیان جواب[۲۱]): قدم اول برای محاسبه‌ی جواب از طریق روش HAM، انتخاب مجموع توابع پایه‌ای $\{e_m(t)|m = ۰, ۱, ۲...\}$ می‌باشد. مناسب ترین توابع پایه‌ای را می توان اغلب با مشخص کردن اینکه، چه توابعی راحت تر در شرایط مرزی یا اولیه‌ی مسأله صدق می‌کنند، یا با در نظر گرفتن تعابیر فیزیکی و رفتار مجانبی مورد انتظار جواب تعیین کرد، آنگاه می‌توانیم جواب را به صورت $u(t) = \sum_{m=۰}^{\infty} a_m e_m(t)$ بنویسیم، در این رابطه مقادیر a_mها ثابت هستند و در روند حل مسأله تعیین می‌شوند.

قانون دوم(قانون همه سویی ضرایب[۲۲]): این قانون بیان می‌کند که هر پایه‌ی $e_n(t)$، در مجموعه‌ی توابع پایه‌ای، باید به صورت سری $\sum_{n=۰}^{m} u_n(t)$ وقتی که $m \to \infty$، بیان شود. این قانون همچنین حیطه‌ی انتخاب تابع کمکی $\mathcal{H}(t)$ را محدود می‌کند و وقتی با قانون قبل ترکیب می‌شود، می‌تواند بعضی اوقات تابع کمکی $\mathcal{H}(t)$ را بصورت یکتا تعیین کند.

قانون سوم(قانون وجود جواب[۲۳]): این قانون نیازمند این است که معادله‌ی تغییر شکل (۳۶.۱) به صورت تحلیلی قابل حل باشد[۳]. اکنون روش تحلیلی هموتوپی را به وسیله‌ی توابع پایه‌ای متفاوت، بر روی معادله‌ی (۱۵.۱) به کار می‌گیریم.

جواب‌هایی که توسط چندجمله‌ای بیان می‌شوند

انتخاب عملگر غیرخطی $\mathcal{N}$ هیچ ارتباطی با نوع تابع پایه‌ای که بکار می‌گیریم ندارد. لذا عملگر خطی $\mathcal{N}$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\mathcal{N}[\phi(t,q)] = \frac{\partial \phi(t,q)}{\partial t} + \phi(t,q)^۲ - ۱ \qquad (۵۳.۱)$$

تقریبات چندجمله‌ای ساده ترین نوع تقریبات هستند. برای این نوع از تقریبات، مجموعه توابع پایه‌ای $\{t^{an+b}; a > ۰, b > ۰, n = ۰, ۱, ۲, ...\}$ را انتخاب می‌کنیم. در نتیجه بنابر قوانین یادشده و شرط اولیه (۱۶.۱) تقریب اولیه به صورت زیر پیشنهاد می‌شود

$$V_۰(t) = t, \qquad (۵۴.۱)$$

همچنین عملگر خطی $\mathcal{L}$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\mathcal{L}[\phi(t,q)] = \frac{\partial \phi(t,q)}{\partial t}, \qquad (۵۵.۱)$$

[۲۱] Rule of solution expression

[۲۲] Rule of coefficient ergodicity

[۲۳] Rule of solution existence