بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

دانشکده علوم

گروه ریاضیات و کاربردها

یک الگوریتم تکراری موازی برای حل معادله پواسون دوبعدی

استاد راهنما

دکتر داود خجسته سالکویه

توسط

اکبر رمضانی

دانشگاه محقق اردبیلی

تابستان ۱۳۹۰

به پاس تعبیر عظیم و انسانی‌شان از کلمه ایثار و از خود گذشتگی

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است

به پاس قلب‌های بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می‌گراید.

و به پاس محبت‌های بی‌دریغشان که هرگز فروکش نمی‌کند

این مجموعه را تقدیم می‌کنم به:

روح پاک پدرم،

وجود مقدس و نازنین مادرم،

برادران بزرگوار و مهربانم،

و خواهران گرامیم.

تقدیر و تشکر:

الهی، به سپاس و ستایش تو من شکسته زبان را چه امکان زبان گشودن و این آشفته رای را چه یارای سخن گفتن. ولی هم به زبان شکسته می‌گویم که تمام سپاس و ستایش من به تو این است که در هجوم ضلمات خاک هنوز شعله های افلاکی اشتیاق و انتظار در من نمرده است و گاهگاه چون عطری ناگهان در سرسرای وجودم پرتو می‌افکند و نام تو را فریاد می‌کند.

سپاس و ستایش خود را به که تقدیم کنم که هستی‌ام همه وامدار لطف بیکران اوست. او که سایه مادری مهربان را بر سرم گسترد که وجودش آسیای درد و رنج است و پینه‌های دستانش نشانه از سالیان عمر من دارد. به دستان پر مهرش بوسه می‌زنم که هر موفقیتی که در زندگی داشته‌ام، مدیون رنج این دست‌های خسته و دعای خیر این قلب مهربان بوده است. خدا را شاکرم به خاطر وجود پدری که عشق به خوبان را به عنوان میراث جاودانه‌اش در قلب‌های ما به یادگار گذاشت. و کدامین پدر میراثی برتر از این برای فرزندانش به جای می‌گذارد. به درگاه ایزد منان سپاس‌گزارم به خاطر وجود خواهران و برادرانی که شبنم صبحگاهی به زلالی و پاکی قلب‌های بی‌ریایشان حسد می‌برند، به خاطر داشتن دوستان و اساتیدی که همگی گلچینی از بهترین‌ها بوده‌اند.

از استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای دکتر داود خجسته سالکویه به خاطر تمامی مساعدت‌های بی‌دریغشان در پیشبرد امر پایان‌نامه سپاس‌گزارم. پشتوانه علمی وعشق و علاقه ایشان به کار که من در کمتر کسی سراغ دارم، همواره برای من انگیزه بخش و امید آفرین بوده است.

مراتب سپاس خود را از داور محترم پایان‌نامه جناب آقای دکتر عبداله برهانی‌فر به خاطر قبول زحمت بازخوانی و داوری پایان‌نامه، و تمامی اساتیدی که افتخار شاگردیشان را داشته‌ام ابراز می‌دارم.

در پایان از همکلاسی‌های عزیزم و تمامی دوستانم به خاطر محبت‌هایشان سپاس‌گزارم.

اکبر رمضانی

مرداد ۱۳۹۰

نام خانوادگی: رمضانی **نام**: اکبر
عنوان پایان نامه : یک الگوریتم تکراری موازی برای حل معادله پواسون دوبعدی
استاد راهنما: دکتر داود خجسته سالکویه
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته**: ریاضی کاربردی **گرایش**: آنالیزعددی **دانشگاه**: محقق اردبیلی **دانشکده**: علوم پایه **تاریخ فارغ التحصیلی**: ۱۳۹۰/۵/۰۸ **تعداد صفحه**: ۸۷
کلید واژه‌ها : همگرایی، تجزیه دامنه، الگوریتم تکراری، محاسبات موازی، معادله پواسون، سرعت همگرایی، پارامتر شتاب بهینه.
چکیده: در این پایان نامه، ابتدا الگوریتم smart-BLAGE برای حل دستگاه حاصل از یک نوع گسسته‌سازی نه نقطه ای مساله پواسون دو بعدی آشفته شده بکار گرفته می‌شود و همگرایی روش مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین یک الگوریتم تکراری موازی بر پایه تفاضلات متناهی برای حل مساله پواسون بررسی می‌شود. این روش با استفاده از تفاضلات متناهی پنج نقطه‌ای بر پایه تجزیه دامنه به چهار زیر دامنه بدست می آید. در ادامه نیز همگرایی روش مورد بررسی قرار می‌گیرد. کارایی روشها با ارائه چند مثال و مقایسه آن با روشهای دیگر بررسی می‌شود.

فهرست مندرجات

لیست اشکال

لیست جداول

مقدمه

وضعیتهای فیزیکی شامل بیش از یک متغیر را غالباً می‌توان با معادلات حاوی مشتقات جزئی بیان کرد. حل اینگونه معادلات با استفاده از روشهای عددی مثل تفاضلات متناهی که از دقت بالایی برخوردار هستند بسیار با اهمیت است. مساله ای که در این پایان نامه در نظر می‌گیریم، یک معادله دیفرانسیل جزئی بیضوی است و به معادله پواسون[۱] معروف است

$$\nabla^{۲} u(x,y) \equiv \frac{\partial^{۲} u}{\partial x^{۲}}(x,y) + \frac{\partial^{۲} u}{\partial y^{۲}}(x,y) = f(x,y).$$

فرض کنیم در این معادله تابع f مشخص کننده داده مساله روی ناحیه Ω باشد که مرز آن را با $\partial\Omega$ نمایش خواهیم داد. معادلاتی از این نوع به طور طبیعی در مطالعه مسائل فیزیکی مستقل از زمان گوناگون، نظیر حالت یکنواخت توزیع گرما در یک ناحیه مسطح، انرژی پتانسیل یک نقطه در صفحه، که نیروهای ثقلی واقع در صفحه روی آن عمل می‌کنند، و مسائل حالت یکنواخت دو بعدی شامل سیالات تراکم ناپذیر، رخ می‌دهند. برای بدست آوردن جواب منحصر بفرد برای معادله پواسون باید قیدهای اضافی بر جواب تحمیل نمود. مثلاً، مطالعه حالت یکنواخت توزیع گرما در یک ناحیه مسطح لازم دارد که $f(x,y) \equiv ۰$، که ساده شدن رابطه بالا را بصورت

$$\frac{\partial^{۲} u}{\partial x^{۲}}(x,y) + \frac{\partial^{۲} u}{\partial y^{۲}}(x,y) = ۰.$$

نتیجه می‌دهد که معادله لاپلاس[۲] نامیده می‌شود. اگر دمای داخل ناحیه به وسیله توزیع دما روی مرز ناحیه معین شود، قیدها شرایط مرزی دیریکله[۳] نامیده می‌شوند وبرای تمام (x,y)

[۱] Poisson
[۲] Laplace
[۳] Derikhlet

روی $\partial\Omega$، یعنی مرز ناحیه Ω، از رابطه

$$u(x,y) = g(x,y).$$

بدست می آیند.

استفاده از روش تفاضلات متناهی برای حل معادله دیفرانسیل جزئی بیضوی، بخصوص معادله پواسون، به دستگاهی منجر می‌شود که در آن ماتریس ضرایب یک ماتریس بلوکی تُنُک با بعد بزرگ می‌باشد [۲۶]. برای اینگونه دستگاهها معمولاً از روشهای تکراری استفاده می‌شود. روشهای تکراری مختلفی از جمله ژاکوبی[۱]، گوس — سایدل[۲] و SOR برای حل اینگونه دستگاهها معرفی شده است، که در فصل ۱ به بررسی آنها می‌پردازیم. برای مطالعه بسیاری از روشهای تکراری می‌توان به [۱۹] مراجعه کرد. یکی از الگوریتم های مهم برای حل دستگاه مورد بحث، الگوریتم BLAGE [۳] است که ایوانز[۴] و یوسف[۵] در [۹] ارائه نمودند. صورتهای مختلف بکارگیری الگوریتم BLAGE را می‌توان در[۷, ۱۵, ۲۸]، مشاهده کرد. در [۱۷] دهقان[۶] و همکارش این روش را با روشهای مختلف مقایسه نمودند. اخیراً موهانتی[۷] در [۱۳] الگوریتم BLAGE را برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی بیضوی مرتبه دوم آشفته شده، با استفاده از یک گسسته‌سازی نه نقطه ای جدید بکار برده است، که این مبحث موضوع مورد بحث ما در فصل ۲ خواهد بود.

امروزه با توجه به اینکه مسائل با بعد بزرگ و محاسبات ریاضی بالا، نیاز به کامپیوترهایی با پردازنده‌های موازی، سرعت محاسباتی بالا و حافظه بزرگ دارند، لذا برای تسریع در حل اینگونه مسائل، ارائه الگوریتم های موازی با سرعت محاسباتی بالا ضروری به نظر می‌رسد [۲, ۱۸, ۲۱, ۲۳, ۲۷]. مبنای بسیاری از این الگوریتم های موازی به تجزیه دامنه به زیر دامنه‌های مجزا استوار است [۱, ۴, ۵, ۱۱]، که با تقسیم مسائل با بعد بزرگ، به مسائل کوچکتر، حل اینگونه مسائل را به طور موازی و با سرعت بالا فراهم می‌کنند.

---

[۱] Jacobi

[۲] Guss-saidel

[۳] Block Alternating Group Explicit

[۴] Evans

[۵] Yousif

[۶] Dehghan

[۷] Mohanty

در [۲۵]، اکسو[۱] و وانگ[۲] یک الگوریتم تکراری موازی تفاضلات متناهی FDPI [۳] برای حل معادله پواسون دو بعدی ارائه نمودند. آنها ناحیه Ω را به چهار ناحیه مجزا تجزیه کردند. سپس یک روند تکراری برای حل دستگاه ارائه نمودند که در هر تکرار آن مولفه های جواب در هر زیر ناحیه به طور مستقل بدست آمده و در نهایت جواب روی مرزهای داخل به همدیگر پیوند می‌شوند. در این روند تکراری از یک پارامتر شتاب ω برای تسریع در همگرایی استفاده می‌شود. در حالتی که $\omega = ۰$ روند تکراری به روند تکراری ژاکوبی تبدیل می‌شود. که در فصل ۳ این پایان نامه الگوریتم FDPI را به طور اجمالی مورد مطالعه قرار می‌دهیم. از ویژگی‌های بارز این الگوریتم می‌توان به زمان محاسباتی کمتر و سرعت همگرایی بالای آن اشاره کرد.

در فصل اول این پایان نامه برخی تعاریف، قضایا و مفاهیم اولیه را یادآوری می‌کنیم. در فصل دوم الگوریتم smart-BLAGE برای حل معادله پواسون دو بعدی آشفته شده را معرفی می‌کنیم و همگرایی آن را بررسی می‌کنیم. در فصل سوم الگوریتم FDPI را برای حل معادله پواسون دو بعدی ارائه کرده همگرایی آن را اثبات می‌کنیم. همچنین پارامتر شتاب بهینه ω_{opt}، الگوریتم را بدست می‌آوریم. در پایان سرعت همگرایی مجانبی الگوریتم را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در فصل چهار نتایج عددی مربوط به الگوریتم‌های smart-BLAGE و FDPI ارائه می‌گردد.

---

[۱] Xu

[۲] Wang

[۳] Finite Difference Parallel Iterative

فصل ۱

مقدمات و مفاهیم اولیه

در این فصل برخی از تعاریف و قضایایی که در فصلهای بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند را مرور می‌کنیم. روش تفاضلات متناهی برای حل معادله پواسون دو بعدی را در حالت کلی بررسی می‌کنیم. در پایان چند روش تکراری برای حل معادله پواسون دو بعدی ارائه کرده، و برخی از تعاریف و قضایای مربوط به روش های تکراری را می‌آوریم.

۱.۱ تعاریف و قضایا

تعریف ۱.۱ فرض کنید که $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. در این صورت:

- ماتریس A را بالا (پایین) مثلثی گویند، هرگاه برای هر $i > j$ $(i < j)$ داشته باشیم $a_{ij} = ۰$ و ماتریس A را بالا (پایین) مثلثی اکید گویند، هرگاه برای هر $i \geq j$ $(i \leq j)$ داشته باشیم $a_{ij} = ۰$.
- ماتریس $A = (a_{ij})$ را قطری گویند، هرگاه برای هر $i \neq j$ داشته باشیم $a_{ij} = ۰$ و بصورت زیر نمایش داده می‌شود

$$A = diag(a_{۱۱}, a_{۲۲}, \dots, a_{nn}).$$

- ماتریس A را همانی گویند، هرگاه $I = \{\delta_{ij}\}_{i,j=۱,\dots,n}$ که δ_{ij} را دلتای کرونکر می‌گویند.
- ماتریس A را یک ماتریس جایگشت گویند، هرگاه ستون‌های آن جایگشتی از ستون‌های ماتریس همانی باشند.
- ماتریس A را بلوکی می‌نامیم هرگاه برخی از درایه‌های آن خود یک ماتریس باشند.
- یک ماتریس قطری بلوکی کاملاً مشابه یک ماتریس قطری تعریف می‌شود، با این تفاوت که بجای درایه‌های قطری آن، ماتریس‌هایی جایگزین می‌شوند. یک ماتریس قطری بلوکی بصورت زیر نمایش داده می‌شود

$$A = diag_n(A_{۱۱}, A_{۲۲}, \dots, A_{n,n}),$$

که در آن A_{ii} ها ماتریس هستند.

- ماتریس A را نامنفرد گویند، هرگاه $\det(A) \neq ۰$ و منفرد گویند، هرگاه $\det(A) = ۰$.

تعریف ۲.۱ ماتریس $n \times n$، A را معکوس پذیر گویند هرگاه ماتریس $n \times n$، B وجود داشته باشد به طوری که $AB = BA = I$ که در آن I ماتریس همانی است. معکوس ماتریس A را با $A^{-۱}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۱ یک نرم ماتریس روی $\mathbb{C}^{m\times n}$ تابع‌ای است از $\mathbb{C}^{m\times n}$ به $\mathbb{R}$ به طوری که در شرایط زیر صدق کند:

(الف) به ازای هر $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$، $\|A\| \geq ۰$. بعلاوه $\|A\| = ۰$ اگر و تنها اگر $A = ۰$؛

(ب) به ازای هر $\alpha \in \mathbb{C}^m$ و $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$، $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$؛

(ج) به ازای هر $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$، $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (نامساوی مثلث).

مثال ۱.۱ هر یک از توابع زیر نرم ماتریسی هستند:

(الف) $L_۱$ — نرم، یا ماکزیمم مجموع درایه‌های ستونها

$$\|A\|_۱ = \max_j \sum_{i=۱}^{n} |a_{i,j}|.$$

(ب) L_∞ — نرم، یا ماکزیمم مجموع درایه‌های سطرها

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=۱}^{n} |a_{i,j}|.$$

(ج) $L_۲$ — نرم

$$\|A\|_۲ = \sqrt{\rho(A^T A)}.$$

نتیجه ۱.۱ اگر $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ و متقارن باشد آنگاه

$$\|A\|_۲ = \rho(A).$$

تعریف ۴.۱ ماتریس $N \times N$

$$T = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & \\ c_2 & a_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & c_n & a_n \end{pmatrix},$$

را یک ماتریس سه قطری می‌نامیم و با $T = \mathrm{tridiag}_N(c_i, a_i, b_i)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۵.۱ ماتریس A را یک ماتریس سه قطری بلوکی می‌نامیم هرگاه بجای درایه‌های آن ماتریس‌هایی جایگزین شوند.

تعریف ۶.۱ فرض کنید که $A = (a_{ij})$ ماتریسی با درایه‌های حقیقی باشد. ترانهاده ماتریس A بصورت $A^T = (a_{ji})$ تعریف می‌شود.

تعریف ۷.۱ ماتریس A را متقارن گوییم، هر گاه $A^T = A$ و آن را متقارن‌کج گوییم هرگاه $A^T = -A$.

تعریف ۸.۱ ماتریس مربع A از مرتبه n را غالب قطری گویند هرگاه

$$|a_{i,i}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j} , \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

که در رابطه بالا اگر علامت $\geq$ به $>$ تبدیل شود آنگاه ماتریس را اکیداً قطر غالب گویند.

تعریف ۹.۱ فرض کنید $M, N \in \mathbb{R}^{n \times n}$. در این صورت $A = M - N$ را یک "شکافت" از A گویند، هرگاه M نامنفرد باشد.

تعریف ۱۰.۱ فرض کنید $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. در این صورت ماتریس‌های A و B را متشابه گویند، هرگاه ماتریس وارون پذیری چون P موجود باشد به طوری که

$$B = P^{-1} AP.$$

تعریف ۱۱.۱ یک ماتریس $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ تحویل پذیر نامیده می شود هر گاه یک مجموعه ناتهی S که $S \subset N = \{۱, ۲, \ldots, n\}$ و $S \neq N$ است وجود داشته باشد به طوری که برای هر زوج اندیس (i,j) که $i \in S$ و $j \in N - S$ است $a_{ij} = ۰$ باشد. ماتریسی که تحویل پذیر نباشد تحویل ناپذیر نامیده می شود.

تعریف ۱۲.۱ ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ را معین مثبت گوییم، هرگاه:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad : \quad x^T A x > ۰.$$

اگر A متقارن و معین مثبت باشد ماتریس A را معین مثبت متقارن (SPD) گوییم.
همچنین ماتریس A را نیمه معین مثبت متقارن گویند هرگاه A متقارن بوده و برای هر $x \in \mathbb{R}^n$، $x^T A x \geq ۰$.

تعریف ۱۳.۱ فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. گوییم $\lambda \in \mathbb{C}$ یک مقدارویژه متناظر به بردار ویژه x برای ماتریس A است، هرگاه

$$Ax = \lambda x, \qquad x \neq ۰,$$

در این صورت (λ, x) را یک زوج ویژهٔ A گویند.

تعریف ۱۴.۱ بزرگترین مقدار ویژه‌ی ماتریس A از حیث قدر مطلق را، شعاع طیفی ماتریس A گویند و با $\rho(A)$ نشان می‌دهند، به عبارت دیگر

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \ \sigma(A)} |\lambda|,$$

که در آن $\sigma(A)$ مجموعه تمام مقادیر ویژه ماتریس A می‌باشد و به آن طیف ماتریس A گویند.

تعریف ۱۵.۱ ماتریس A را تُنُک گویند هر گاه اکثر مولفه‌های آن صفر باشد.

تعریف ۱۶.۱ ماتریس A را پر گویند هر گاه اکثر مولفه‌های آن ناصفر باشد.

تعریف ۱۷.۱ معادله بیضوی

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = f(x,y) \ ,$$

به معادله پواسون معروف است که در آن $f(x,y)$ یک تابع معلوم است. اگر $f(x,y) = 0$ باشد معادله را معادله لاپلاس می‌نامند.

تعریف ۱۸.۱ فرض کنید $F_i(u) = 0$، یک معادله‌ی تفاضلی در گره i—ام باشد، که در آن u جواب دقیق می‌باشد. اگر به‌جای u، از مقدار تقریبی U استفاده کنیم، در این صورت $F_i(U)$ را خطای برشی[1] $(T.E)$ موضعی معادله‌ی تفاضلی در گره i—ام می‌نامند.

قضیه ۱.۱ اگر λ مقدار ویژه ماتریس A باشد $\lambda - p$ مقدار ویژه ماتریس $A - pI$ خواهد بود(p یک عدد حقیقی ثابت است.)

برهان : به [۱۲] مراجعه شود. □

قضیه ۲.۱ فرض کنید λ یک مقدار ویژه A و x بردار ویژه نظیر آن است ، اگر A^{-1} موجود باشد آنگاه $\frac{1}{\lambda}$ مقدار ویژه A^{-1} است و بردار ویژه نظیر آن همان x است.

برهان : به [۱۲] مراجعه شود. □

قضیه ۳.۱ اگر ماتریس A وارون پذیر باشد، داریم

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

برهان : به [۱۲] مراجعه شود. □

[1] Truncation Error