دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (جبر)

کوهمولوژی موضعی و مدول‌های کوهن - مکالی تعمیم‌یافته

تدوین

اکرم قنبری دوست

استاد راهنما

دکتر ذاکری

اسفند ۱۳۹۰

تقدیم به

نازنین پدرم

و

مهربان مادرم

پروردگارا! چگونه ترا بخوانم در حالیکه من منم و چطور امیدم را از تو قطع کنم در حالیکه تو معبودم هستی. زمانی که روی به تو نمی آورم باز با فضل و رحمتت به من عطا می کنی پس کیست که درخواست کنم به من عطا می کند؟ هرگاه ترا نخوانم باز حاجتم را برآوری پس کیست که هرگاه بخوانم حاجتم را روا می سازد؟

اکنون زبانم قاصر است تا از این همه لطف و مهربانی که به من ارزانی داشتی سپاس گزاری کنم. تو خود بگو چطور از مهر و احساس مسئولیتی که در وجود دو فرشته نگهبان، پدر و مادرم قرار دادی تا همیشه و همه جا حامی من باشند قدردانی کنم؟ یا چگونه از تو سپاس گزاری کنم که در راه پژوهش فرهیخته عزیز، دکتر حسین ذاکری را راهنمای من قرار دادی تا راه را برای من روشن گرداند؟ معبودا! چگونه شکر گویم در حالیکه بر خود می بالم دو عزیز بزرگوار، دکتر محمد تقی دیبایی و دکتر کامران دیوانی آذر داوری این پژوهش را بر عهده گرفتند؟

چکیده

این پایان‌نامه از دو قسمت اصلی تشکیل شده است.

در قسمت اول فرض بر این است که R یک حلقه نوتری جابه‌جایی و M یک R- مدول با تولید متناهی است. برای عدد صحیح t، اگر مدول کوهمولوژی موضعی $H_{\mathfrak{a}}^{i}(M)$ نسبت به ایده‌آل $\mathfrak{a}$ برای هر $i < t$ با تولید متناهی باشد، آنگاه ثابت می‌شود که رابطه‌ی

$$H_{\mathfrak{a}}^{i}(M/xM) \cong H_{\mathfrak{a}}^{i}(M) \oplus H_{\mathfrak{a}}^{i+1}(M)$$

برای هر عضو $\mathfrak{a}$- فیلتر منظم x واقع در یک توان به اندازه کافی بزرگ از $\mathfrak{a}$ و هر $i < t - 1$ برقرار است.

در قسمت دوم فرض بر این است که $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی نوتری کوهن - مکالی تعمیم‌یافته باشد. در این مرحله هدف یافتن پاسخی کامل به دو سوال مطرح شده است که اولین سوال توسط روگرس [1] و دومین سوال مربوط به گوتو [2] و ساکورای [3] است. سوال‌ها به این گونه مطرح می‌شوند که آیا برای هر ایده‌آل پارامتری $\mathfrak{q}$ واقع در یک توان به اندازه کافی بزرگ از ایده‌آل $\mathfrak{m}$ گزاره های زیر برقرار می‌باشند؟

۱) اندیس تحویل‌پذیری $N_R(\mathfrak{q}; M)$ مستقل از انتخاب $\mathfrak{q}$ است و

۲) $I^2 = \mathfrak{q}I$ که در آن $I = \mathfrak{q} :_R \mathfrak{m}$.

واژه های کلیدی: مدول کوهمولوژی موضعی، دنباله دقیق شکافته شده، مدول کوهن - مکالی تعمیم‌یافته، گروه توسیع‌ها، اندیس تحویل‌پذیری، سوکل[4].

رده بندی موضوعی ریاضی (۲۰۰۰): ۱۳H۱۰ ، ۱۳D۴۵

[1] M. Rogers
[2] S. Goto
[3] H. Sakurai
[4] socle

مقدمه

این پایان‌نامه بر اساس مقاله

N.T. Cuong , P.H. Quy , A spliting theorem for local cohomology and its applications, *J.Algebra* 331 (2011) 512-522.

و مقاله

N.T. Cuong, H.L. Truong, Asymptotic behavior of parameter ideals in generalized Cohen-Macaulay module, *J.Algebra* 320 (2008) 158-168.

تدوین شده است .

در این پایان‌نامه خواصی از مدول‌های کوهمولوژی موضعی و برخی از رفتارهای مدول‌های کوهن-مکالی تعمیم‌یافته مورد بحث و بررسی قرار گرفته است و در چهار بخش تنظیم گردیده است. در بخش اول مفاهیم و قضایای مورد نیاز سایر بخش‌ها آورده شده است.

در بخش دوم قضیه زیر مطرح می‌شود:

قضیه A: فرض کنید M یک مدول با تولید متناهی روی حلقه نوتری R و $\mathfrak{a}$ یک ایده‌آل از R باشد و هم‌چنین فرض کنید t و $n_۰$ اعداد صحیح مثبتی باشند که برای هر $i < t$، $\mathfrak{a}^{n_۰} H^i_{\mathfrak{a}}(M) = ۰$. در این صورت برای هر عضو $\mathfrak{a}$- فیلتر منظم از M مانند x واقع در $\mathfrak{a}^{n_۰}$ و برای هر $i < t - ۱$ یکریختی

$$H^i_{\mathfrak{a}}(M/xM) \cong H^i_{\mathfrak{a}}(M) \oplus H^{i+۱}_{\mathfrak{a}}(M) \quad (\forall i < t - ۱)$$

برقرار است. هم‌چنین

$$۰ :_{H^{t-۱}_{\mathfrak{a}}(M/xM)} \mathfrak{a}^{n_۰} \cong H^{t-۱}_{\mathfrak{a}}(M) \oplus ۰ :_{H^t_{\mathfrak{a}}(M)} \mathfrak{a}^{n_۰}.$$

نکته اصلی در برهان این قضیه به صورت زیر است.

فرض می‌کنیم x و t در مفروضات قضیه A صدق کنند. از دنباله دقیق کوتاه

$$۰ \longrightarrow M/H^۰_{\mathfrak{a}}(M) \xrightarrow{x} M \longrightarrow M/xM \longrightarrow ۰$$

دنباله دقیق کوتاه

$$(*)\quad 0 \longrightarrow H^{i}_{\mathfrak{a}}(M) \longrightarrow H^{i}_{\mathfrak{a}}(M/xM) \longrightarrow H^{i+1}_{\mathfrak{a}}(M) \longrightarrow 0$$

برای $i = 0, ..., t-2$ نتیجه می‌شود. بنابراین برای هر $i < t-1$، می توان دنباله دقیق کوتاه $(*)$ را به عنوان یک عضو از گروه توسیع $\mathrm{Ext}^{1}_{R}(H^{i+1}_{\mathfrak{a}}(M), H^{i}_{\mathfrak{a}}(M))$ در نظر گرفت. با بررسی ساختار R- مدولی این گروه بالاخره در انتهای این بخش برهان قضیه A آورده شده است.

در بخش سوم R یک حلقه موضعی نوتری جابه‌جایی با ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ و میدان خارج‌قسمتی $\mathfrak{k} = R/\mathfrak{m}$ و M یک R- مدول با تولید متناهی با $\dim M = d$ است.

می‌دانیم که هر زیرمدول N از M را می‌توان به صورت اشتراک غیرزاید از زیرمدول‌های تحویل‌ناپذیر نوشت که تعداد زیرمدول‌های تحویل‌ناپذیر ظاهر شده در چنین عبارتی تنها به N وابسته است. برای ایده‌آل پارامتری $\mathfrak{q}$ از M، تعداد زیرمدول‌های تحویل‌ناپذیر از M که در تجزیه تحویل‌ناپذیر غیرزاید از $\mathfrak{q}M$ ظاهر شده‌اند را اندیس تحویل‌پذیری $\mathfrak{q}$ روی M می‌نامند و با علامت $N_R(\mathfrak{q}, M)$ نشان می‌دهند. فرض کنید N یک R- مدول دلخواه باشد، سوکل N را با $\mathrm{Soc}(N)$ نشان می‌دهیم. چون

$$\mathrm{Soc}(N) \cong 0 :_N \mathfrak{m} \cong \mathrm{Hom}(\mathfrak{k}, N)$$

یک فضای $\mathfrak{k}$- برداری است، قرار می‌دهیم $S(N) = \dim_{\mathfrak{k}} \mathrm{Soc}(N)$. لذا $N_R(\mathfrak{q}; M) = S(M/\mathfrak{q}M)$.

در ۱۹۵۷، نرثکات [5] در [21, Theorem 3] ثابت کرد که اندیس تحویل‌پذیری هر ایده‌آل پارامتری در یک حلقه موضعی کوهن - مکالی تنها به حلقه وابسته است و به انتخاب ایده‌آل پارامتری بستگی ندارد. اولین مثال از یک حلقه موضعی نوتری غیر کوهن - مکالی که اندیس تحویل‌پذیری از ایده‌آل‌های پارامتری آن ثابت است، توسط اندو[6] و ناریتا [7] در [9] ارائه شد. سوپریموم تمام اندیس‌های تحویل‌پذیری از ایده‌آل‌های پارامتری از M را با علامت $r(M)$ نشان می‌دهیم. در سال ۱۹۸۴ گوتو [8] و سوزوکی[9] در [11] ثابت کردند که اگر M یک مدول کوهن - مکالی تعمیم‌یافته باشد، آنگاه $r(M)$ متناهی است. به علاوه، آن‌ها ثابت کردند که

[5] D.G. Northcott
[6] S. Endo
[7] M. Narita
[8] S. Goto
[9] N. Suzuki

$r(M) \geq \sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} S(H_{\mathfrak{m}}^i(R))$. بعدها، گوتو و ساکورای [۱۰] در [*10, Corollary 3.13*] نشان دادند که اگر R یک حلقه $Buchsbaum$ با بعد مثبت باشد، آنگاه یک توان از ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ وجود دارد که تمام ایده‌آل‌های پارامتری واقع در آن، اندیس تحویل‌پذیری یکسان دارند. لیو [۱۱] و روگرس [۱۲] در [*16*] این مطلب را به این صورت بیان کردند که R دارای اندیس ثابت نهایی در مورد تحویل‌پذیری ایده‌آل‌های پارامتری است. بنابراین سوال زیر که اولین بار توسط روگرس در [*22, Question 1.2*] مطرح شده است، یک سوال طبیعی است.

سوال: آیا یک حلقه کوهن - مکالی تعمیم‌یافته، دارای اندیس ثابت نهایی در مورد تحویل‌پذیری ایده‌آل‌های پارامتری است؟

لیو و روگرس در حالات خاصی جواب مثبت به سوال بالا ارائه کردند. به بیان دقیق‌تر، روگرس در [*22, Theorem 1.3*] برقراری مطلب بالا را برای مدول‌های کوهن - مکالی تعمیم‌یافته با بعد نابیشتر از دو ثابت کرد. همچنین لیو و روگرس در [*16, Theorem 1.4*] نشان دادند که اگر M یک مدول کوهن - مکالی تعمیم‌یافته باشد که در شرط $H_{\mathfrak{m}}^i(M) \neq 0$ برای هر $i \in \{0, t, d\}$ صدق کند، آنگاه جواب سوال فوق مثبت است.

با توجه به قضیه زیر که اولین قضیه اصلی این بخش است، می توان جواب کاملی به این سوال داد.

قضیه B: فرض کنید M یک مدول کوهن - مکالی تعمیم‌یافته از بعد d روی حلقه موضعی نوتری $(R, \mathfrak{m})$ باشد. در این صورت عددی صحیح و مثبت مانند n وجود دارد که برای هر ایده‌آل پارامتری $\mathfrak{q}$ از M واقع در $\mathfrak{m}^n$، اندیس تحویل‌پذیری $N(\mathfrak{q}; M)$ مستقل از انتخاب $\mathfrak{q}$ است و

$$N(\mathfrak{q}; M) = \sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} S(H_{\mathfrak{m}}^i(M)).$$

در [*10*] گوتو و ساکورای روی اندیس تحویل‌پذیری ایده‌آل‌های پارامتری مطالعه کردند تا بفهمند که چه موقع به ازای هر ایده‌آل پارامتری $\mathfrak{q}$ از R، تساوی $I^2 = \mathfrak{q}I$ که در آن $I = \mathfrak{q} : \mathfrak{m}$، برقرار است. با توجه به مطالبی که کرسو [۱۳]، هونیکی [۱۴]، پاولین [۱۵] و وسکونسلوس [۱۶] در [*6-8*] آورده‌اند، این تساوی برای

[۱۰] H. Sakurai
[۱۱] J.C. Liu
[۱۲] M.Rogers
[۱۳] A. Corso
[۱۴] C. Huneke
[۱۵] C. Polini

هر ایده‌آل پارامتری در یک حلقه موضعی کوهن - مکالی R که نامنظم یا بعد آن حداقل ۲ و $e(R) > 1$ است، برقرار می‌باشد که در آن $e(R)$ چندگانگی R نسبت به ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ است. گوتو و ساکورای این مطلب را تعمیم دادند و در [*10, Theorem 3.11*] ثابت کردند که اگر R یک حلقه $Buchsbaum$ باشد که $\dim M \geq 2$ یا $\dim R = 1$ و $e(R) > 1$، آنگاه تساوی $I^2 = \mathfrak{q}I$ برای هر ایده‌آل پارامتری $\mathfrak{q}$ واقع در یک توان به اندازه کافی بزرگ از ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ برقرار است. با این نقطه نظر طبیعی است که سوال زیر مطرح شود. این سوال توسط گوتو و ساکورای در [*10, P. 34*] بیان گردیده‌است.

سوال: فرض کنید R یک حلقه کوهن - مکالی تعمیم یافته با شرط $e(R) > 1$ باشد. آیا عددی صحیح مانند n موجود است به طوری که برای هر ایده‌آل پارامتری $\mathfrak{q}$ واقع در $\mathfrak{m}^n$، $I^2 = \mathfrak{q}I$؟

به عنوان نتیجه ای از قضیه B، دومین قضیه اصلی این بخش را مطرح می‌کنیم که با توجه به این قضیه می‌توان جواب کاملی به سوال مطرح شده فوق داد.

قضیه C: فرض کنید R یک حلقه کوهن - مکالی تعمیم‌یافته با $\dim R \geq 2$ یا $\dim R = 1$ و $e(R) > 1$ باشد. در این صورت عددی صحیح مثبت مانند n چنان موجود است که برای هر ایده‌آل پارامتری $\mathfrak{q}$ واقع در $\mathfrak{m}^n$، $I^2 = \mathfrak{q}I$ که $I = \mathfrak{q} : \mathfrak{m}$.

قضیه B را با استقرا روی $\dim M = d$ اثبات می‌کنیم که قبل از آن در بخش ۱.۳ چندین لم در رابطه با رفتار ایده‌آل‌های پارامتری در یک مدول کوهن - مکالی تعمیم یافته M آورده شده‌است. این لم‌ها قضیه کلیدی بخش ۲.۳ (قضیه ۵.۲.۳) را نتیجه می‌دهند:(فرض کنید M یک R- مدول کوهن - مکالی تعمیم یافته باشد، در این صورت عددی صحیح به اندازه کافی بزرگ مانند k وجود دارد که برای هر ایده‌آل پارامتری $\mathfrak{q} = (x_1, ..., x_d) \subseteq \mathfrak{m}^k$ و هر $0 \leq i + j \leq d - 1$، تساوی

$$S(H^i_{\mathfrak{m}}(M/\mathfrak{q}_{j+1}M)) = S(H^i_{\mathfrak{m}}(M/\mathfrak{q}_jM)) + S(H^{i+1}_{\mathfrak{m}}(M/\mathfrak{q}_jM))$$

برقرار است، که در آن $\mathfrak{q}_j = (x_1, ..., x_d)$.) بالاخره، در انتهای بخش سوم به اثبات قضیه C و نتیجه آن اختصاص یافته است.

در بخش چهارم که بخش کاربردها نام دارد. نتایجی از قضیه A آورده شده‌است در نتیجه ۱.۴ پاسخی کامل به پرسش زیر داده می‌شود.

[16] W.V. Vasconcelos

سوال: فرض کنید M یک مدول کوهن - مکالی تعمیم یافته باشد. آیا عددی صحیح مثبت مانند n موجود است، به طوری‌که برای هر عضو پارامتری x از M واقع در $\mathfrak{m}^n$ رابطه‌ی

$$H^i_{\mathfrak{m}}(M/xM) \cong H^i_{\mathfrak{m}}(M) \oplus H^{i+۱}_{\mathfrak{m}}(M)$$

برای هر $i < d - ۱$ برقرار است؟

نکته جالب این بخش نتیجه ۳.۴ است که با استفاده از قضیه A تعمیمی به قضیه B داده است.

فهرست مطالب

۱ تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ کوهمولوژی موضعی

تعریف ۱.۱.۱. [*4, Definition 1.1.1*] فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی و نوتری، $\mathfrak{a}$ یک ایده‌آل از R و M یک R- مدول دلخواه باشد. $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ چنین تعریف می‌شود:

$$\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = \{m \in M | \exists n \in \mathbb{N} \ s.t \ \mathfrak{a}^n m = 0\}$$

به عبارت دیگر $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (0 :_M \mathfrak{a}^n)$.

از جمله خواص $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ به شرح زیر است:
۱) $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ یک زیر مدول از M است.
۲) فرض کنیم $f : M \longrightarrow N$ یک همریختی از R- مدول‌ها باشد. چون $f(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) \subseteq \Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$، نگاشت $\Gamma_{\mathfrak{a}}(f) : \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \longrightarrow \Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$ در واقع تحدید f به $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ است.
۳) فرض کنیم $r \in R$ و $g : M \longrightarrow N$، $h : N \longrightarrow L$ دو همریختی دیگر از R-مدول‌ها باشند. در این صورت:

$$a)\Gamma_{\mathfrak{a}}(hof) = \Gamma_{\mathfrak{a}}(h)o\Gamma_{\mathfrak{a}}(f)$$
$$b)\Gamma_{\mathfrak{a}}(f+g) = \Gamma_{\mathfrak{a}}(f) + \Gamma_{\mathfrak{a}}(g)$$
$$c)\Gamma_{\mathfrak{a}}(rf) = r\Gamma_{\mathfrak{a}}(f)$$
$$d)\Gamma_{\mathfrak{a}}(Id_M) = Id_{\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)}$$

از توضیحات فوق نتیجه می‌شود که $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ یک فانکتور R- خطی و هموردا از $\mathscr{C}(R)$ به خودش است. (فانکتور $T : \mathscr{C}(R) \longrightarrow \mathscr{C}(R)$ ، R- خطی نامیده می‌شود اگر (آ) جمعی باشد و (ب) به ازای هر $r \in R$ و هر همریختی f از R- مدول‌ها، $T(rf) = rT(f)$.)
۴) $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ یک فانکتور دقیق چپ است.

تعریف ۲.۱.۱. [*4, Definitions 1.2.1*] اگر $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = M$، آنگاه R- مدول M را $\mathfrak{a}$- تاب [17] می‌نامند و اگر $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = 0$ آنگاه R- مدول M را $\mathfrak{a}$- تاب آزاد [18] می‌نامند.

تعریف ۳.۱.۱. برای $i \in \mathbb{N}_0$، i- امین فانکتور مشتق راست از $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ را با $H^i_{\mathfrak{a}}$ نشان می‌دهیم و آن را i- امین فانکتور کوهمولوژی موضعی نسبت به $\mathfrak{a}$ می‌نامیم.

---
[17] a-torsion
[18] a-torsion free

ویژگی‌های مدول‌های کوهمولوژی موضعی [*4, 1.2.2*]

۱) روش محاسبه $H^i_{\mathfrak{a}}(M)$: یک تحلیل انژکتیو از M مانند زیر در نظر می‌گیریم

$$I^* : ۰ \xrightarrow{d^{-۱}} I^۰ \xrightarrow{d^۰} I^۱ \longrightarrow \ldots \longrightarrow I^i \xrightarrow{d^i} I^{i+۱} \longrightarrow \ldots$$

بنابراین یک R- همریختی مانند $x : M \longrightarrow I^۰$ موجود است به طوری‌که دنباله زیر دقیق است

$$۰ \longrightarrow M \xrightarrow{x} I^۰ \xrightarrow{d^۰} I^۱ \longrightarrow \ldots \longrightarrow I^i \xrightarrow{d^i} I^{i+۱} \longrightarrow \ldots$$

حال فانکتور $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ را روی همبافت I^* اثر می‌دهیم

$$۰ \xrightarrow{\Gamma_{\mathfrak{a}}(d^{-۱})} \Gamma_{\mathfrak{a}}(I^۰) \xrightarrow{\Gamma_{\mathfrak{a}}(d^۰)} \Gamma_{\mathfrak{a}}(I^۱) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \Gamma_{\mathfrak{a}}(I^i \xrightarrow{\Gamma_{\mathfrak{a}}(d^i)} \Gamma_{\mathfrak{a}}(I^{i+۱}) \longrightarrow \ldots$$

قرار می دهیم: $H^i_{\mathfrak{a}}(M) = \dfrac{\ker(\Gamma_{\mathfrak{a}}(d^i))}{Im(\Gamma_{\mathfrak{a}}(d^{i-۱}))}$. توجه شود که محاسبه $H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ مستقل از انتخاب تحلیل انژکتیو برای M است.

۲) چون $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ یک فانکتور R- خطی و هموردا است، فانکتور $H^i_{\mathfrak{a}}$، $(i \in \mathbb{N}_۰)$ یک فانکتور R- خطی و هموردا است.

۳) فرض کنیم $۰ \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow ۰$ یک دنباله دقیق از R- مدول‌ها و R- همریختی‌ها باشد، در این صورت برای هر $i \in \mathbb{N}_۰$، همریختی پیوند $H^i_{\mathfrak{a}}(N) \longrightarrow H^{i+۱}_{\mathfrak{a}}(L)$ وجود دارد و این همریختی‌های پیوند طوری هستند که دنباله زیر دقیق باشد.

$$۰ \longrightarrow H^۰_{\mathfrak{a}}(L) \xrightarrow{H^۰_{\mathfrak{a}}(f)} H^۰_{\mathfrak{a}}(M) \xrightarrow{H^۰_{\mathfrak{a}}(g)} H^۰_{\mathfrak{a}}(N) \longrightarrow H^۱_{\mathfrak{a}}(L) \xrightarrow{H^۱_{\mathfrak{a}}(f)} H^۱_{\mathfrak{a}}(M) \xrightarrow{H^۱_{\mathfrak{a}}(g)} H^۱_{\mathfrak{a}}(N) \longrightarrow$$
$$\ldots \longrightarrow H^i_{\mathfrak{a}}(L) \xrightarrow{H^i_{\mathfrak{a}}(f)} H^i_{\mathfrak{a}}(M) \xrightarrow{H^i_{\mathfrak{a}}(g)} H^i_{\mathfrak{a}}(N) \longrightarrow H^{i+۱}_{\mathfrak{a}}(L) \longrightarrow \ldots$$

ملاحظه ۴.۱.۱. [*4, Remark 1.2.3*] *فرض کنید $\mathfrak{b}$ یک ایده‌آل دیگری از R باشد به طوری‌که $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{b}}$ در این صورت برای هر $i \in \mathbb{N}_۰$، $H^i_{\mathfrak{a}} = H^i_{\mathfrak{b}}$. بنابراین برای هر R- مدول M و هر $i \in \mathbb{N}_۰$،*

$$H^i_{\mathfrak{a}}(M) = H^i_{\mathfrak{b}}(M).$$

نتیجه ۵.۱.۱. [*4, Corollary 2.1.7*]

الف) اگر M یک R- مدول $\mathfrak{a}$- تاب باشد، آنگاه برای هر $i > ۰$، $H^i_{\mathfrak{a}}(M) = ۰$.

ب) برای هر R- مدول N، به ازای هر $i > ۰$، $H^i_{\mathfrak{a}}(\Gamma_{\mathfrak{a}}(N)) = ۰$.

پ) به ازای هر R- مدول N، همریختی طبیعی $\pi : N \longrightarrow N/\Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$ یکریختی

$$H^i_{\mathfrak{a}}(\pi) : H^i_{\mathfrak{a}}(N) \longrightarrow H^i_{\mathfrak{a}}(N/\Gamma_{\mathfrak{a}}(N))$$

را برای هر $i > ۰$ نتیجه می‌دهد.

ملاحظه ۶.۱.۱. [*4, Exercise 2.1.9*] *فرض کنید $\mathfrak{b}$ یک ایده‌آل دیگر از R و M یک R- مدول $\mathfrak{b}$- تاب باشد. در این صورت برای هر $i \in \mathbb{N}_۰$، $H^i_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}(M) = H^i_{\mathfrak{a}}(M)$.*

قضیه ۷.۱.۱. [*4, Theorem 7.1.3*] *فرض کنید $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی و M یک R- مدول با تولید متناهی باشد در این صورت برای هر $i \in \mathbb{N}_{\circ}$، $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ R- مدول آرتینی است.*

گزاره ۸.۱.۱. [*4, Proposition 9.1.2*] *فرض کنید $t \in \mathbb{N}$ و M یک R- مدول با تولید متناهی باشد در این صورت گزار ه های زیر معادلند:*

الف) به ازای هر $i < t$، $H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ با تولید متناهی است.

ب) به ازای هر $i < t$، $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{(\circ : H^i_{\mathfrak{a}}(M))}$.

۲.۱ همبافت کزول

تعریف ۱.۲.۱. [*4, Notation 5.1.4*] فرض کنید $l \in \mathbb{N}$ و $۱ \leq l \leq n$. $I(l,n)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I(l,n) := \{(i(۱),...i(l)) \in \mathbb{N}^l \mid ۱ \leq i(۱) < i(۲) < ... < i(l) \leq n\}$$

در واقع این مجموعه، مجموعه‌ی همه‌ی دنباله‌های افزایشی اکید به طول l از اعداد طبیعی $\{۱,...,n\}$ است. برای $i \in I(l,n)$ و برای $۱ \leq j \leq l$، j- امین مولفه i را با $i(j)$ نشان می دهیم، بنابراین $i = i(i(۱),...,i(l))$.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید $x_۱,...,x_n \in R$ که $n > \circ$. همبافت کزول از R نسبت به $x = (x_۱,...,x_n)$ را با $K(x)_*$ یا $K(x_۱,...,x_n)_*$ نشان می‌دهند. اگر R- مدول آزاد R^n را با F و برای هر $i = ۱,...,n$ عضو $(\circ,...,\circ,۱,\circ,...,\circ)$ که i- امین مولفه آن یک و بقیه صفر است را با e_i نشان دهیم، آنگاه $K(x)_*$ به شکل زیر است:

$$\circ \longrightarrow K_n \longrightarrow ... \longrightarrow K_l \xrightarrow{d_l} K_{l-۱} \longrightarrow ... \longrightarrow K_۱ \longrightarrow K_{\circ} \longrightarrow \circ$$

که برای $l = \circ,...,n$، $K_l = \wedge^l F = \wedge^l(R^n)$. بنابراین $K_{\circ} = R$ و برای $l = ۱,...,n$ و $i \in I(l,n)$

$$d_l(e_{i(۱)} \wedge ... \wedge e_{i(l)}) = \sum_{h=۱}^{l} (-۱)^{h-۱} x_{i(h)} e_{i(۱)} \wedge ... \wedge e_{\hat{i(h)}} \wedge ... \wedge e_{i(l)}$$

که $e_{\hat{i(h)}}$ نشان دهنده‌ی آن است که مولفه $e_{i(h)}$ حذف شده‌است.

فرض کنید M یک R- مدول دلخواه باشد همبافت $K(x)_* \otimes_R M$

$$\circ \longrightarrow K_n \otimes M \overset{d_n \otimes id_M}{\longrightarrow} K_{n-۱} \otimes M \longrightarrow ... \longrightarrow K_۱ \otimes M \longrightarrow K_{\circ} \otimes M \longrightarrow \circ$$

را همبافت کزول M نسبت به $x = (x_۱,...,x_n)$ می‌نامند و با علامت $K(x,M)_*$ نشان می‌دهند. i- امین همولوژی مدول $K(x)_*$ را با $H_i(x)$ و i- امین همولوژی مدول $K(x,M)_*$ را با علامت $H_i(x,M)$ نشان

می‌دهند.

$$H_i(x, M) = H_i(K(x)_* \otimes_R M)$$

همبافت $\mathrm{Hom}_R(K(x)_*, M)$ یعنی

$$\circ \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(K_\circ, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(K_۱, M) \longrightarrow ... \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(K_n, M) \longrightarrow \circ$$

را همبافت دوگان همبافت کزول M نسبت به $x = (x_۱, ..., x_n)$ می‌نامند و با علامت $K(x, M)^*$ نشان می‌دهند، در حالت خاص $K(x, R)^*$ را با علامت $K(x)^*$ نشان می‌دهند. i- امین همولوژی مدول $K(x, M)^*$ را با علامت $H^i(x, M)$ نشان می‌دهند. به عبارت دیگر

$$H^i(x, M) = H^i(\mathrm{Hom}(K(x)_*, M))$$

قضیه ۳.۲.۱. *[5, Proposition 1.6.10] فرض کنید $x = x_۱, ..., x_n$ یک دنباله در حلقه R و M یک R-مدول دلخواه باشد در این صورت برای هر $i = \circ, ..., n$، $H_i(x, M) \cong H^{n-i}(x, M)$.*

تعریف ۴.۲.۱. [*4, Definition 1.3.1*] فرض کنید $\acute{R}$ یک حلقه جابه‌جایی باشد. دنباله $(T^i)_{i\in\mathbb{N}_\circ}$ از فانکتورهای هموردا از $\mathscr{C}(R)$ به $\mathscr{C}(\acute{R})$ یک دنباله پیوسته منفی نامیده می‌شود، اگر در شرایط زیر صدق کند

الف) اگر $\circ \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow \circ$ یک دنباله دقیق در $\mathscr{C}(R)$ باشد، برای هر $i \in \mathbb{N}_\circ$، $\acute{R}$-همریختی $T^i(N) \longrightarrow T^{i+۱}(L)$ موجود است به طوری‌که دنباله بلند

$$\circ \longrightarrow T^\circ(L) \xrightarrow{T^\circ(f)} T^\circ(M) \xrightarrow{T^\circ(g)} T^\circ(N) \longrightarrow T^۱(L) \xrightarrow{T^۱(f)} ...$$

دقیق است.

ب) اگر

$$\begin{array}{ccccccccc}
\circ & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & \circ \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\lambda} & & \downarrow{\scriptstyle\mu} & & \downarrow{\scriptstyle\nu} & & \\
\circ & \longrightarrow & \acute{L} & \longrightarrow & \acute{M} & \longrightarrow & \acute{N} & \longrightarrow & \circ
\end{array}$$

یک دیاگرام جابه‌جایی از R- مدول ها و R- همریختی‌ها با سطرهای دقیق باشد، آنگاه همریختی‌های القایی از λ، μ و ν و همریختی‌های زنجیری از همبافت بلند که در (الف) ذکر شده است برای سطر بالایی چنان موجود باشد که در تناظر یک‌به‌یک با همبافت بلند از سطر پایین باشد.

قضیه ۵.۲.۱. *[4, Independence Theorem 4.2.1] فانکتورهای $\Gamma_{\mathfrak{a}\acute{R}}(.)\lceil_R$ و $\Gamma_{\mathfrak{a}}(.\lceil_R)$ از کاتگوری $\mathscr{C}(\acute{R})$ به $\mathscr{C}(R)$ یکسان هستند، و یکریختی یکتا*

$$\Lambda = (\lambda^i)_{i\in\mathbb{N}_\circ} : (H^i_{\mathfrak{a}\acute{R}}(.)\lceil_R)_{i\in\mathbb{N}_\circ} \xrightarrow{\cong} (H^i_{\mathfrak{a}}(.\lceil_R))_{i\in\mathbb{N}_\circ}$$

از دنباله‌های پیوسته اکید منفی از فانکتورهای هموردا از $\mathscr{C}(\acute{R})$ به $\mathscr{C}(R)$ وجود دارد. به ویژه، برای هر $i \in \mathbb{N}_\circ$ فانکتورهای $H^i_{\mathfrak{a}\acute{R}}(.)\lceil_R$ و $H^i_{\mathfrak{a}}(.\lceil_R)$ به طور طبیعی هم‌ارزند.

فرض کنید $\mathfrak{a}=(a_1,...,a_n)$ یک ایده‌آل از R باشد. ایده‌آل $(a_1^u,...,a_n^u)$ را با $\mathfrak{a}^u$ نشان می‌دهیم.

ملاحظه ۶.۲.۱. *[4, Exercise 5.2.8] برای هر $u\in\mathbb{N}$، فرض کنید $K(\mathfrak{a}^u,M)_*$ نشان دهنده‌ی $M\otimes K(a^u)_*$، همبافت کزول از M نسبت به $a_1^u,...,a_n^u$ باشد و فرض کنید $x:M\longrightarrow N$ یک همریختی از R- مدول‌ها باشد. برای $v,w\in\mathbb{N}$ که $v\leq w$، دیاگرام جابه‌جایی زیر از همبافت‌ها و نگاشت‌های زنجیری موجود است.*

$$\begin{array}{ccc} M\otimes K(\mathfrak{a}^v)_* & \xrightarrow{x\otimes K(\mathfrak{a}^v)_*} & N\otimes K(\mathfrak{a}^v)_* \\ {\scriptstyle M\otimes(\psi_v^w)_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle N\otimes(\psi_v^w)_*} \\ M\otimes K(\mathfrak{a}^w)_* & \xrightarrow{x\otimes K(\mathfrak{a}^w)_*} & N\otimes K(\mathfrak{a}^w)_* \end{array}$$

با استفاده از این دیاگرام می توان نشان داد که برای هر $j\in\mathbb{Z}$، خانواده $(H_j(K(\mathfrak{a}^u,M)_*))_{u\in\mathbb{N}}$ یک دستگاه مستقیم است و $\varinjlim_{u\in\mathbb{N}} H_j(K(\mathfrak{a}^u,.)_*)$ یک فانکتور هممورد، R- خطی از $\mathscr{C}(R)$ به خودش است. به علاوه می توان نشان داد که $\varinjlim_{u\in\mathbb{N}} H_{n-i}(K(\mathfrak{a}^u,.)_*)_{i\in\mathbb{N}_0}$ یک دنباله به طور اکید پیوسته منفی از فانکتورها از $\mathscr{C}(R)$ به خودش است.

قضیه ۷.۲.۱. *[4, Theorem 5.2.9] با مفروضات ملاحظه ۶.۲.۱، یک هم ارزی طبیعی از فانکتورها مانند*

$$\delta^\circ:\varinjlim_{u\in\mathbb{N}} H_n(K(\mathfrak{a}^u,.)_*)\xrightarrow{\cong}\Gamma_{\mathfrak{a}}$$

از $\mathscr{C}(R)$ به خودش وجود دارد؛ به علاوه، یک یکریختی یکتا مانند

$$(\delta^i)_{i\in\mathbb{N}_0}:(\varinjlim_{u\in\mathbb{N}} H_{n-i}(K(\mathfrak{a}^u,.)_*))_{i\in\mathbb{N}_0}\xrightarrow{\cong} H^i_{\mathfrak{a}}$$

از دنباله‌های به طور اکید پیوسته منفی از فانکتورهای هممورد از $\mathscr{C}(R)$ به $\mathscr{C}(R)$ وجود دارد که توسیع‌یافته δ° است. در نتیجه برای هر $i\in\mathbb{N}_0$ و هر R- مدول M، $H^i_{\mathfrak{a}}(M)\cong\varinjlim_{u\in\mathbb{N}} H_{n-i}(K(\mathfrak{a}^u,M)_*)$.

۳.۱ حلقه و مدول کسرها

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید R یک حلقه و $S\subseteq R$ یک زیر مجموعه‌ی بسته ضربی باشد. در $R\times S$ نسبت $\sim$ را چنین تعریف می کنند:

$$(a_1,s_1)\sim(a_2,s_2)\Longleftrightarrow \exists t\in s\ :\ t(s_2a_1-s_1a_2)=0$$

$\sim$ یک رابطه هم‌ارزی در $R\times S$ است و هم‌چنین $S^{-1}R$ را گردایه تمام کلاس‌های هم‌ارزی در $R\times S$ نسبت به $\sim$ تعریف می کنند. $S^{-1}R$ با دو عمل جمع و ضرب به صورت زیر یک حلقه جابه‌جایی و یکدار است.

$$\frac{a_1}{s_1}+\frac{a_2}{s_2}:=\frac{s_2a_1+s_1a_2}{s_1s_2}$$
$$\frac{a_1}{s_1}.\frac{a_2}{s_2}:=\frac{a_1a_2}{s_1s_2}$$

$S^{-1}R$ را حلقه‌ی کسرهای R نسبت به S گویند.

گزاره ۲.۳.۱. *فرض کنید $S = R - \mathfrak{p}$ که $\mathfrak{p} \in \operatorname{spec}(R)$. در این صورت $S^{-1}R$ را با $R_{\mathfrak{p}}$ نشان می‌دهند. $R_{\mathfrak{p}}$ یک حلقه موضعی است که ایده‌آل ماکسیمال آن به صورت زیر است:*

$$\mathfrak{m} := \{\lambda \in R_{\mathfrak{p}} | \text{که می توان } \lambda \text{ را به صورت } \lambda = \frac{a}{s} \text{ نوشت که در آن } a \in \mathfrak{p} \text{ و } s \in S\}$$

تعریف ۳.۳.۱. فرض کنید M یک R- مدول و $S \subseteq R$ بسته ضربی باشد. در مجموعه‌ی $M \times S$، رابطه‌ی $\sim$ را چنین تعریف می کنند:

$$(m, s) \sim (\acute{m}, \acute{s}) \Longleftrightarrow \exists t \in S \ : \ t(\acute{s}m - s\acute{m}) = 0$$

$\sim$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی در $M \times S$ است و $S^{-1}M$ را گردایه‌ی تمام کلاس‌های هم ارزی $M \times S$ با رابطه‌ی $\sim$ تعریف می کنند. با دو عمل زیر $S^{-1}M$ یک $S^{-1}R$- مدول است.

$$\frac{m_1}{s_1} + \frac{m_2}{s_2} := \frac{s_2 m_1 + s_1 m_2}{s_1 s_2}$$

$$\frac{a}{s}.\frac{m}{t} := \frac{am}{st} \ \ (\frac{a}{s} \in S^{-1}R)$$

هم‌چنین $S^{-1}M$ توسط نگاشت طبیعی $\varphi : R \longrightarrow S^{-1}R$ یک R- مدول نیز است.

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنید $f : A \longrightarrow B$ یک همریختی حلقه‌ای و $\mathfrak{a}$ یک ایده‌آل از A باشد انبساط [۱۹] $\mathfrak{a}$ توسط f را با $\mathfrak{a}^e$ نشان می‌دهیم و چنین تعریف می‌شود:

$$\mathfrak{a}^e := < f(\mathfrak{a}) > = f(\mathfrak{a})B$$

فرض کنید $\mathfrak{b}$ یک ایده‌آل از B باشد در این صورت $f^{-1}(\mathfrak{b})$ را انقباض [۲۰] $\mathfrak{b}$ توسط f می‌نامیم و با علامت $\mathfrak{b}^c$ نمایش می‌دهیم.

گزاره ۵.۳.۱. *فرض کنید $f : A \longrightarrow B$ یک همریختی حلقه‌ای و $\mathfrak{a}$ و $\mathfrak{b}$ به ترتیب ایده‌آل‌هایی از A و B باشند در این صورت*

آ) $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}^{ec}$،

ب) $\mathfrak{b}^{ce} \subseteq \mathfrak{b}$،

پ) $\mathfrak{a}^{ece} = \mathfrak{a}^e$،

ت) $\mathfrak{b}^{cec} = \mathfrak{b}^c$.

قضیه ۶.۳.۱. *فرض کنید R یک حلقه و $S \subseteq R$ بسته ضربی و J اید ه‌آلی از R باشد در این صورت*

آ) $S^{-1}J = J^e$

---
[۱۹] Extension
[۲۰] Contraction

ب) فرض کنید $\mathfrak{p} \in \operatorname{spec}(R)$ و $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$، اگر $\lambda \in S^{-1}\mathfrak{p}$ آنگاه از هر عبارت به صورت $\lambda = \dfrac{a}{s}\ \ (s \in S, a \in R)$ نتیجه می‌شود که $a \in \mathfrak{p}$.

پ) اگر $\mathfrak{p} \in \operatorname{spec}(R)$ و $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$، آنگاه $S^{-1}\mathfrak{p} \in \operatorname{spec}(S^{-1}R)$ و به علاوه $\mathfrak{p}^{ec} = \mathfrak{p}$.

ت) تناظر ی دو سویی و حافظ جزییت بین ایده‌آل‌های اول حلقه R که با S اشتراک ندارند و ایده‌آل‌های اول حلقه $S^{-1}R$ برقرار است.

بنابراین اگر $\mathfrak{q} \in \operatorname{spec}(S^{-1}R)$، آنگاه $\mathfrak{p}$ به طور یکتا عضو $\operatorname{spec}(R)$ وجود دارد به طوری‌که $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$ و $S^{-1}\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$.

نتیجه ۱.۳.۷. *فرض کنید $\mathfrak{p} \in \operatorname{spec}(R)$، در این صورت تناظری دو سویی و حافظ جزییت بین دو مجموعه‌ی $\{\mathfrak{q} \in \operatorname{spec}(R) \mid \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\}$ و $\operatorname{spec}(R_{\mathfrak{p}})$ وجود دارد.*

۱.۴ تجزیه اولیه ایده‌آل‌ها

تعریف ۱.۴.۱. [*23, Definition 4.1*] فرض کنید $\mathfrak{q}$ ایده‌آلی از حلقه ی تعویض پذیر R باشد. می‌گوییم $\mathfrak{q}$ ایده‌آل اولیه R است اگر

آ) $\mathfrak{q} \subset R$، یعنی $\mathfrak{q}$ ایده‌آل سره‌ی R باشد، و

ب) هرگاه $a, b \in R$ و $ab \in \mathfrak{q}$ ولی $a \notin \mathfrak{q}$ آنگاه $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته‌باشد که $b^n \in \mathfrak{q}$.

تعریف ۱.۴.۲. [*23, Lemma and definition 4.5*] فرض کنید $\mathfrak{q}$ یک ایده‌آل اولیه حلقه‌ی تعویض‌پذیر R باشد. در این صورت $\mathfrak{p} := \sqrt{\mathfrak{q}}$ یک ایده‌آل اول R است و می‌گوییم $\mathfrak{q}$، $\mathfrak{p}$- اولیه است به علاوه $\mathfrak{p}$ کوچکترین ایده‌آل اول R است که $\mathfrak{q}$ را شامل می شود، زیرا هر ایده‌آل اول R که شامل $\mathfrak{q}$ باشد باید $\mathfrak{p}$ را نیز شامل شود. لذا $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اول مینیمال منحصر به فرد $\mathfrak{q}$ است.

تعریف ۱.۴.۳. [*23, Definition 4.15*] فرض کنید I ایده‌آل سره‌ای از حلقه‌ی تعویض‌پذیر R باشد. تجزیه اولیه I عبارتست از اشتراک تعدادی متناهی از ایده‌آل‌های اولیه R که برابر با I باشد. یعنی

$$I = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n$$

که در آن $\mathfrak{q}_i$ ها ایده‌آل‌های اولیه از R هستند. فرض کنید که به ازای $i = 1, \ldots, n$، $\sqrt{\mathfrak{q}_i} = \mathfrak{p}_i$ ($\mathfrak{p}_i \in \operatorname{spec} R$). در این صورت این تجزیه را تجزیه‌ی اولیه مینیمال می‌گویند اگر

آ) $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$، n ایده‌آل اول متمایز R باشند، و

ب) به ازای هر $j = 1, \ldots, n$ داشته باشیم $\mathfrak{q}_j \not\supseteq \bigcap_{i=1_{i\neq j}}^{n} \mathfrak{q}_i$.

می گوییم که I ایده‌آل تجزیه‌پذیر R است اگر تجزیه‌ی اولیه داشته باشد.

ملاحظه ۱.۴.۴. [*23, Remark 4.16*] *هر ایده‌آل تجزیه‌پذیر R، تجزیه اولیه مینیمال دارد.*

قضیه ۵.۴.۱. *فرض کنید R نوتری است. در این صورت هر ایده‌آل واقعی $\mathfrak{b}$ از R را می‌توان به صورت اشتراک تعدای متناهی از ایده‌آل‌های تحویل‌ناپذیر از R نوشت.*

قضیه ۶.۴.۱. *در هر حلقه نوتری، هر ایده‌آل تحویل‌ناپذیر، اولیه است.*

نتیجه ۷.۴.۱. *در هر حلقه نوتری، هر ایده‌آل واقعی تجزیه شدنی است.*

قضیه ۸.۴.۱. [*23, Lemma 8.21*] *فرض کنید I ایده‌آلی از حلقه‌ی تعویض پذیر R و $\sqrt{I}$ با تولید متناهی باشد، در این صورت $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $(\sqrt{I})^n \subseteq I$، یعنی I شامل توانی از رادیکالش است.*

در نتیجه هر ایده‌آل حلقه‌ی تعویض‌پذیر نوتری شامل توانی از رادیکالش است.

قضیه ۹.۴.۱. [*23, Corollary 4.18*] *(اولین قضیه یکتایی تجزیه‌ی اولیه) فرض کنید I ایده‌آل تجزیه‌پذیری از حلقه تعویض‌پذیر R باشد و تجزیه‌های*

$I = \mathfrak{q}_۱ \cap ... \cap \mathfrak{q}_n$ که به ازای $i = ۱, ..., n$، $\sqrt{\mathfrak{q}_i} = \mathfrak{p}_i$ و

$I = \acute{\mathfrak{q}}_۱ \cap ... \cap \acute{\mathfrak{q}}n$ که به ازای $i = ۱, ..., \acute{n}$، $\sqrt{\acute{\mathfrak{q}}_i} = \acute{\mathfrak{p}}_i$

دو تجزیه‌ی اولیه مینیمال I باشند. در این صورت $n = \acute{n}$ و $\{\mathfrak{p}_۱, ..., \mathfrak{p}_n\} = \{\acute{\mathfrak{p}}_۱, ..., \acute{\mathfrak{p}}_n\}$.

تعریف ۱۰.۴.۱. [*23, Definition 4.19*] فرض کنید I ایده‌آلی تجزیه‌پذیر از حلقه‌ی تعویض‌پذیر R و تجزیه‌ی $I = \mathfrak{q}_۱ \cap ... \cap \mathfrak{q}_n$ که به ازای $i = ۱, ..., n$، $\sqrt{\mathfrak{q}_i} = \mathfrak{p}_i$ تجزیه ی اولیه مینیمال I باشد. در این صورت مجموعه‌ی n عضوی $\{\mathfrak{p}_۱, ..., \mathfrak{p}_n\}$ را که بنا بر قضیه ۹.۴.۱ از هر تجزیه‌ی اولیه مینیمال I مستقل است، مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول وابسته به I می‌نامیم و با $\operatorname{ass} I$ یا $\operatorname{ass}_R I$ نشان می دهیم. عضوهای $\operatorname{ass} I$ را ایده‌آل‌های اول وابسته به I یا اول‌های وابسته به I می‌نامیم.

قضیه ۱۱.۴.۱. [*23, Theorem 4.17*] *فرض کنید I ایده‌آلی از حلقه‌ی تعویض‌پذیر R وتجزیه‌ی $I = \mathfrak{q}_۱ \cap ... \cap \mathfrak{q}_n$ که به ازای $i = ۱, ..., n$، $\sqrt{\mathfrak{q}_i} = \mathfrak{p}_i$ تجزیه‌ی اولیه مینیمال I باشد و فرض کنید $\mathfrak{p} \in \operatorname{spec}(R)$. در این صورت گزار های زیر معادلند:*

آ) به ازای iای که $۱ \leq i \leq n$، $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$.

ب) $a \in R$ وجود دارد به طوری‌که $(I : a)$ ایده‌آل $\mathfrak{p}$- اولیه باشد.

پ) $a \in R$ وجود دارد به طوری‌که $\sqrt{(I : a)} = \mathfrak{p}$.

ملاحظه ۱۲.۴.۱. [*23, Remark 4.20*] *فرض کنید I ایده‌آل تجزیه‌پذیری از حلقه‌ی تعویض‌پذیر R باشد و $\mathfrak{p} \in \operatorname{spec}(R)$. از قضیه ۱۱.۴.۱ نتیجه می‌شود که $\mathfrak{p} \in \operatorname{ass} I$ اگر و تنها اگر $a \in R$ وجود داشته باشد که $(I : a)$ ایده‌آل $\mathfrak{p}$- اولیه باشد، و این شرط برقرار است اگر و تنها اگر $b \in R$ و جود داشته باشد که $\sqrt{(I : b)} = \mathfrak{p}$.*

تعریف ۱.۴.۱۳. [23, Definition 9.32] فرض کنید M مدولی روی حلقه تعویض‌پذیر نوتری R باشد و $\mathfrak{p} \in \operatorname{spec}(R)$. $\mathfrak{p}$ را ایده‌آل اول وابسته به M گویند اگر $m \in M$ وجود داشته باشد که

$$\circ : m = \operatorname{Ann}(m) = \mathfrak{p}.$$

توجه کنید که اگر $m \in M$ و مانند فوق $\mathfrak{p} = (\circ : m)$ آنگاه $m \neq \circ$. مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول وابسته به M را با $\operatorname{Ass}(M)$ (یا ا گر بخواهیم بر حلقه‌ی مربوط تاکید کنیم، با $\operatorname{Ass}_R(M)$) نشان می‌دهیم.

توجه شود که اگر R- مد ول‌های M و $\acute{M}$ یکریخت باشند آنگاه $\operatorname{Ass}(M) = \operatorname{Ass}(\acute{M})$.

نتیجه ۱.۴.۱۴. [23, Corollary 9.35] *فرض کنید M مدولی روی حلقه‌ی تعویض‌پذیر نوتری R باشد. در این صورت $\operatorname{Ass}(M) \neq \varnothing$ اگر و تنها اگر $M \neq \circ$.*

قضیه ۱.۴.۱۵. [23, Exrcise 9.41] *فرض کنید $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اولی از حلقه‌ی تعویض‌پذیر نوتری R باشد، در این صورت $\operatorname{Ass}_R(R/\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$.*

قضیه ۱.۴.۱۶. [23, Exrcise 9.40] *اگر M مدولی با تولید متناهی و ناصفر روی حلقه‌ی تعویض‌پذیر نوتری R باشد، آنگاه زنجیره‌ای صعودی چون*

$$M_\circ \subset M_۱ \subset \ldots \subset M_{n-۱} \subset M_n$$

از زیرمدول‌های M وجود دارد که $M_\circ = \circ$ ، $M_n = M$ و به ازای هر $i = ۱, \ldots, n$ ایده‌آلی چون $\mathfrak{p}_i \in \operatorname{spec}(R)$ وجود دارد که $M_i/M_{i-۱} \cong R/\mathfrak{p}_i$.

قضیه ۱.۴.۱۷. [23, Exrcise 9.42] *اگر R حلقه‌ای نوتری و دنباله‌ی*

$$\circ \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow \circ$$

دنباله‌ی کامل کوتاهی از R- مدول‌ها و R- همریختی‌ها باشند، آنگاه

$$\operatorname{Ass}(L) \subseteq \operatorname{Ass}(M) \subseteq \operatorname{Ass}(L) \cup \operatorname{Ass}(N).$$

قضیه ۱.۴.۱۸. [4, Exrcise 21.12] *فرض کنید M یک R- مدول باشد. آنگاه $\operatorname{Ass}(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M))$ و $\operatorname{Ass}(M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M))$ مجزا هستند و*

$$\operatorname{Ass}(M) = \operatorname{Ass}(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) \cup \operatorname{Ass}(M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)).$$

قضیه ۱.۴.۱۹. *فرض کنید R یک حلقه نوتری و M یک R- مدول با تولید متناهی باشد در این صورت $\operatorname{Ass}(M)$ یک مجموعه متناهی است.*