گروه ریاضیات و کاربردها

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

حل عددی معادلات دیفرانسیل کسری با استفاده از روش تاو

نگارش:

نرگس عزیزی

استاد راهنما:

دکتر ابوالفضل تاری مرزآباد

استاد مشاور:

دکتر محمد اکبری

آبان ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به

پدر عزیزم،

مادر دلسوز

و

همسر مهربانم

قدرداني

سپاس خدای را که به ید قدرت بی منتهایش دریای آفرینش را جاری کرد و به اراده ازلی اش همه خلق را صورت بخشید؛ هر کس را در سایه اراده اش به راهی راهرو گردانید و آتش عشق خود را در وجودشان برانگیخت؛ نه از آن سوی که پیش فرستادشان توان برگشت دارند و نه در این سوی که بازشان داشت توان سبقت. امتنان و سپاس می گزارم زحمات و راهنمایی های ارزشمند و بی شائبه استاد فرهیخته و فرزانه ام جناب آقای دکتر ابوالفضل تاری که با کرامتی چون خورشید، سرزمین دل را روشنی بخشیدند و گلشن سرای علم و دانش را با راهنمایی های کارساز خویش بارور ساختند؛ و نیز صمیمانه سپاسگزارم از استاد مشاور گرانقدرم جناب آقای دکتر محمد اکبری با راهنمایی های ارزشمندشان. و بی نهایت ترین سپاس را دارم از پربهاترین گنج گیتی پدر و مادر دلسوز و مهربانم گرچه بسیار ناچیز است این سپاسگزاری در مقایسه با انبوه لطف و فداکاری هایشان. همچنین از همسر عزیزم که آرامش روحی و آسایش فکری فراهم نمود تا با حمایت های همه جانبه در محیطی مطلوب، مراتب تحصیلی و نیز پایان نامه درسی را به نحو احسن به اتمام برسانم سپاسگزاری می نمایم. برای همه عزیزان آرامش الهی، لطف و بخشش الهی، عشق و هدایت الهی، سلامتی و تندرستی، رزق و روزی فراوان و از صمیم قلب دلی شاد آرزومندم.

چکیده

در این پایان نامه، روش تاو- لژاندر شیفت داده شده را برای حل معادلات دیفرانسیل کسری چند مرتبه ای با ضرایب متغیر بر اساس مرجع [۲۰] تعمیم می‌دهیم. این روش تقریبی، بر چند جمله ایهای لژاندر شیفت داده شده استوار است. برای این منظور فرمول جدیدی بدست می‌آوریم که مشتق چند جمله ایهای لژاندر شیفت داده شده از درجه دلخواه را بر حسب خود چند جمله ایهای لژاندر شیفت داده شده نمایش می‌دهد. تعمیم روش تاو برای معادلات دیفرانسیل کسری با ضرایب متغیر با استفاده ازکوادراتور لژاندر- گاوس- لباتو مورد بررسی قرار می‌گیرد.

همچنین تعمیمی از روش تاو عملیاتی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل کسری بر اساس مرجع [۳۸] پیشنهاد می‌شود. در این روش، از چندجمله ای درونیاب برای تقریب عبارت انتگرالی معادله استفاده کردیم. ما تحلیل خطای کارایی برای روش مذکور ارائه می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: معادلات دیفرانسیل کسری، انتگرالگیری گاوس- لباتو، چندجمله ایهای لژاندر شیفت داده شده، چندجمله ایهای چبیشف شیفت داده شده، روش تاو.

فهرست مطالب

لیست جداول

پیشگفتار

در دهه های گذشته، معادلات دیفرانسیل کسری نظر خیلی از محققین رشته های مختلف ازجمله فیزیک، شیمی، مهندسی و حتی علوم اجتماعی را به خود جلب کرده است [۱۱،۱۲]. علاوه بر روشهای عددی، برخی روشهای تقریبی مانند روش تجزیه ادومیان [۱۳،۱۴]، روش هموتوپی [۱۵]، روش تکرار تغییراتی [۱۶] و روش آنالیز هموتوپی [۱۷] نسبتا روشهای جدیدی برای تقریبهای تحلیلی معادلات دیفرانسیل کسری هستند. روشهای طیفی، رویه ای محاسباتی هستند که عموما در چهار دهه اخیر بدست آمده‌اند. این روشها محبوبیت جدیدی در محاسبات اتوماتیک برای کلاس وسیعی از مسایل فیزیک در جریان گرما و سیال بدست آوردند که محبوبیت آنها به خاطر دقت بالای آنهاست. بنابراین آنها با موفقیت در شبیه سازی عددی بعضی مسایل در علوم و مهندسی به کار برده می‌شوند [۲۲-۱۸].

ساختار این پایان نامه به این صورت است که در فصل ۱ مفاهیمی مقدماتی را در مورد معادلات دیفرانسیل کسری بیان می‌کنیم. در فصل ۲ روش تاو-لژاندر شیفت داده شده را برای حل معادلات دیفرانسیل کسری چند مرتبه ای با ضرایب متغیر تعمیم می‌دهیم. در فصل ۳ وجود و یکتایی جواب مسائل مقدار اولیه برای معادلات دیفرانسیل کسری غیر خطی را بررسی می‌کنیم. در فصل ۴ یک تعمیم عملیاتی از روش تاو با پایه چندجمله ایهای متعامد برای تبدیل معادلات دیفرانسیل کسری به نمایش برداری-ماتریسی ارائه می‌شود.

نرخ همگرایی روش ارائه شده را در نرم L^2 ثابت می‌کنیم. سپس روشمان را روی

چندین مثال امتحان می‌کنیم. در پایان هر فصل نتایج عددی حاصل از روش آورده شده است. برنامه‌های کامپیوتری به کار رفته برای حل معادلات این پایان نامه به صورت پیوست آورده شده است.

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

در این فصل برخی مفاهیم مقدماتی را که در فصل‌های بعدی مورد نیاز هستند ارائه می‌کنیم با توجه به اینکه این پایان نامه در مورد معادلات دیفرانسیل کسری است بیشتر مطالب این فصل در مورد تعاریف و روابطی در مورد مشتقات کسری است، برای این منظور ابتدا لازم است که تابع گاما را معرفی کنیم.

۱.۱ معرفی تابع گاما و خواص آن

تعریف ۱.۱.۱. تابع گاما در α را با نماد $\Gamma(\alpha)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:[۱]

$$\Gamma(\alpha) = \int_{0}^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

محاسبه انتگرال بالا به ازای α های مختلف مشکل می‌باشد و برای α متعلق به بازه $[1,2]$ جدول موجود است و با استفاده از رابطه‌ای که در زیر ثابت می‌شود، $\Gamma(\alpha)$ برای α هایی که متعلق به بازه $[1,2]$ نباشند را بر حسب $\Gamma(\beta)$ که $\beta \in [1,2]$ ، بیان می‌کنیم.

با توجه به تعریف تابع گاما داریم:

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_{0}^{\infty} x^{\alpha}e^{-x}dx$$

با استفاده از روش جز به جز داریم:

$$u = x^{\alpha} \Rightarrow du = \alpha x^{\alpha-1}dx$$

$$dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x}$$

$$\Gamma(\alpha+1) = -x^{\alpha}e^{-x}|_{0}^{\infty} + \alpha\int_{0}^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

و می‌دانیم

$$Lim_{x\to+\infty} x^{\alpha}e^{-x} = 0$$

در نتیجه داریم

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha) \tag{1.1}$$

مثال ۲.۱.۱. مقدار $\Gamma(1)$ را حساب کنید.

حل. به ازای ۱ = α در تعریف ۱.۱.۱ داریم:

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \int_0^\infty e^{-x}dx \\ &= -e^{-x}|_0^\infty = 1\end{aligned}$$

مثال ۳.۱.۱. مقدار $\Gamma(4)$ را حساب کنید.

حل. با استفاده مکرر از (۱.۱) داریم:

$$\begin{aligned}\Gamma(4) &= \Gamma(3+1) = 3\Gamma(3) \\ &= 3\times 2\Gamma(2) \\ &= 3\times 2\times 1\times\Gamma(1) \\ &= 3!\end{aligned}$$

تعریف ۴.۱.۱. $\Gamma(\alpha+1)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha!$$

مثال ۵.۱.۱. مقدار $0!$ را حساب کنید.

حل. با توجه به تعریف ۴.۱.۱ و مثال ۳.۱.۱ داریم:

$$0! = \Gamma(1) = 1$$

۲.۱ محاسبات مشتقات کسری

سوال اصلی که منجر به ایجاد مفهوم حساب دیفرانسیل کسری شد این بود که آیا می‌توان مشتق $\frac{d^ny}{dx^n}$ از مرتبه صحیح را به حالتی که n کسری است تعمیم داد؟

برای اولین بار لایبنیتز[۱] نماد $\frac{d^n y}{dx^n}$ را بکار برد. در سال ۱۷۳۰، اویلر[۲] عنوان کرد زمانی که n عدد صحیح مثبت و p تابعی از x باشد نسبت $d^n p$ به dx^n بطور جبری بیان می‌شود. اگر $n = 2$ و $p = x^3$ باشد داریم

$$\frac{d^2 x^3}{dx^2} = 6x$$

در سال ۱۷۷۲، لاگرانژ [۳] قانون توانها را برای عملگرهای دیفرانسیل از مرتبه صحیح بیان کرد:

$$\frac{d^m}{dx^m}\frac{d^n}{dx^n}y = \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}y$$

در سال ۱۸۱۲، لاپلاس[۴] مشتق کسری را تعریف کرد و در سال ۱۸۱۹، لاکروکس[۵] با شروع از $y = x^m$ به ازای عدد صحیح و مثبت m، به آسانی مشتق n ام $(n \leq m)$ را بدست آورد.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}, \qquad m \geq n$$

که با استفاده از تابع گاما [۱] می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}x^{m-n}$$

به عنوان مثال برای $y = x$ و $n = \frac{1}{2}$ داریم:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} y}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$$

لایبنیتز، اویلر، لاپلاس و فوریه[۶] به مشتقات از مرتبه دلخواه اشاره کردند. اما اولین استفاده از عملگرهای کسری توسط آبل[۷] در سال ۱۸۲۳، انجام شد. موضوع حساب دیفرانسیل کسری برای چندین دهه ساکن ماند. تا اینکه لیوویل[۸]

---
[۱] *Leibniz*
[۲] *Euler*
[۳] *Lagrange*
[۴] *Laplace*
[۵] *Lacroix*
[۶] *Fourier*
[۷] *Abel*
[۸] *Liouville*

پدیدار شد. او در این زمینه مطالعات زیادی داشت و سه یادداشت و چندین مقاله متوالی در سال ۱۸۳۲، منتشر کرد.
نقطه شروع نظریه او گسترش نتایج برای مشتقات مرتبه صحیح بود:

$$D^m e^{ax} = a^m e^{ax}$$

ومشتقات مرتبه ی دلخواه به صورت زیر می‌باشند:

$$D^v e^{ax} = a^v e^{ax}$$

او مشتق دلخواه تابع $f(x)$ را که به فرم سری بسط یافته است به صورت زیر تعریف کرد:

$$f(x) = \Sigma_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x}, \quad a_n > 0$$

$$D^v f(x) = \Sigma_{n=0}^{\infty} c_n a_n^v e^{a_n x} \tag{۲.۱}$$

فرمول فوق به عنوان اولین فرمول لیوویل برای مشتق کسری شناخته شده است. او مشتق از مرتبه دلخواه v که در آن v عددی گویا، گنگ یا مختلط باشد را تعمیم داد.

اما قابلیت اجرا فقط روی توابعی به فرم فوق را بی فایده دانست به همین دلیل تعریف دومی را بیان کرد که برای این منظور ابتدا قرار می‌دهیم:

$$I = \int_0^{\infty} u^{a-1} e^{-xu} du$$

و با تغییر متغیر $xu = t$ داریم:

$$I = x^{-a} \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$$
$$I = x^{-a} \Gamma(a)$$
$$x^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)} I$$

حال با بکار بردن D^{ν} در دو طرف معادله بالا بدست می‌آوریم:

$$D^{\nu}x^{-a} = \frac{(-1)^{\nu}}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty} u^{a+\nu-1}e^{-xu}du$$

$$= \frac{(-1)^{\nu}\Gamma(a+\nu)}{\Gamma(a)}x^{-a-\nu} \qquad (۳.۱)$$

اما تعاریف لیوویل محدود به توابع خاصی می‌باشند. اولین تعریف، محدود به توابعی به فرم $\Sigma_{n=0}^{\infty}c_n e^{a_n x}$ است و دومین تعریف، فقط برای توابعی به فرم x^{-a} $(a > 0)$ مناسب است.

ویلیام سنتر[۹] در سال ۱۸۴۸، مشاهده کرد که مشتق کسری یک ثابت، برابر صفر نمی‌باشد. سنتر مشتق کسری از مرتبه $1/2$ برای x^0 را محاسبه کرد.

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}x^0 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1/2)}x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}$$

اما بر طبق سیستم لیوویل با قرار دادن $a = 0$ مشتق کسری برابر صفر می‌شود زیرا $\Gamma(0) = \infty$. همچنین ریمان[۱۰] [۱۰] در زمینه انتگرال گیری کسری مطالعه کرد. عملگر انتگرال کسری از مرتبه $\alpha \geq 0$ برای تابع f به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)ds, \qquad \alpha > 0, t > 0 \qquad (۴.۱)$$

$$J^0 f(t) = f(t)$$

برای $\gamma > -1$ خاصیت زیر برقرار است:

$$J^{\alpha}t^{\gamma} = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)}t^{\alpha+\gamma} \qquad (۵.۱)$$

---

[۹] *William Center*

[۱۰] *Riemann*

۳.۱ یادآوری از آنالیز ریاضی

۱.۳.۱ قضیه نقطه ثابت باناخ

قضیه نقطه ثابت باناخ[۱۱] یک قضیه مهم در فضاهای متریک است. این قضیه برای اثبات وجود و یکتایی جواب مسائل مقدار اولیه برای معادلات دیفرانسیل کسری غیر خطی کاربرد دارد. قضیه نقطه ثابت باناخ برای نشان دادن اینکه عملگر دیفرانسیل، نقطه ثابت منحصر به فرد دارد مورد استفاده قرار می‌گیرد.

قضیه ۱.۳.۱. (قضیه نقطه ثابت باناخ) فرض می‌کنیم (Y,d) یک فضای متریک کامل غیر تهی بوده و فرض می‌کنیم $Z:Y\to Y$ یک نگاشت انقباضی روی Y باشد یعنی یک عدد حقیقی نامنفی $q<1$ وجود دارد به طوریکه برای هر $y,x\in Y$ داریم

$$d(Z(y),Z(x))\leq q.d(y,x)$$

آنگاه نگاشت Z یک و فقط یک نقطه ثابت y^* در Y دارد (یعنی $Z(y^*)=y^*$).

به علاوه این نقطه ثابت را می‌توان به صورت زیر یافت:
با یک عنصر دلخواه $y_0\in Y$ شروع می‌کنیم و یک دنباله تکراری به صورت $y_n=Z(x_{n-1})$ تعریف می‌کنیم. این دنباله همگراست و حد آن y^* است.
نابرابری زیر سرعت همگرایی را نشان می‌دهد

$$d(y^*,y_n)\leq\frac{q^n}{1-q}.d(y_1,y_0)$$

[۱۱] $Banach\ fixed\ point\ theorem$

که معادل است با

$$d(y^*, y_{n+1}) \leq \frac{q}{1-q}.d(y_{n+1}, y_n)$$

و

$$d(y^*, y_{n+1}) \leq q.d(y^*, x_n).$$

مقدار q شرط لیپ شیتز برای Z نامیده می‌شود.
برای توضیحات بیشتر در این خصوص می‌توان به مراجع [۳-۲] مراجعه نمود.

۲.۳.۱ تابع تحلیلی

یک تابع تحلیلی[۱۲]، تابعی حقیقی روی یک مجموعه باز D در خط حقیقی است اگر برای هر $x_0 \in D$ بتوان نوشت

$$\begin{aligned} f(x) &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \\ &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \ldots \end{aligned}$$

که در آن a_0، a_1 و ... اعداد حقیقی بوده و سری برای xهای در همسایگی x_0 همگراست.
به عبارت دیگر یک تابع تحلیلی، تابعی بی‌نهایت مرتبه مشتق پذیر می‌باشد به طوری که سری تیلور در هر نقطه x_0 از دامنه‌اش به صورت

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

برای هر x در همسایگی x_0 همگراست.
مجموعه همه توابع تحلیلی حقیقی روی مجموعه داده شده D اغلب با نماد

[۱۲] $Analytic\ function$

$C^w(D)$ نشان داده می‌شود.
هرچندجمله‌ای یک تابع تحلیلی است، زیرا اگر چندجمله‌ای از درجه n باشد، جملات با درجه بزرگتر از n در بسط تیلورش صفر هستند و بنابراین سری همگرا خواهد بود. به علاوه هر چندجمله‌ای بسط مک لورن خودش است. جزئیات بیشتر را می‌توان در مراجع [۵-۴] دید.

۴.۱ چندجمله‌ایهای چبیشف

چندجمله‌ایهای چبیشف[۱۳]، جواب معادله دیفرانسیل چبیشف به صورت زیر می‌باشند

$$(1-x^2)''-xy'+n^2y=0.$$

که می‌توان نشان داد چندجمله‌ایهای چبیشف T_n، در رابطه بازگشتی زیر صدق می‌کنند

$$T_0(x)=1$$

$$T_1(x)=x$$

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x),\ \ n=1,2,\dots$$

[۱۳] *Chebyshev polynomials*

این چندجمله‌ای‌ها نسبت به تابع وزن $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ روی بازه $(-1,1)$ متعامد هستند، یعنی داریم

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0 \;, & n \neq m, \\ \pi \;, & n = m = 0, \\ \frac{\pi}{2} \;, & n = m \neq 0. \end{cases}$$

چندجمله‌ایهای چبیشف را می‌توان به عنوان پایه‌ای برای تقریب تابع دلخواه $f(x)$ در نظر گرفت، یعنی $f(x)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x).$$

برای اطلاع بیشتر از جزئیات می‌توان به مراجع [۷-۶] مراجعه کرد.

۵.۱ چندجمله‌ایهای لژاندر

چندجمله‌ایهای لژاندر[۱۴]، جواب معادلات دیفرانسیل لژاندر به صورت زیر می‌باشند

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}P_n(x)\right] + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

می‌توان نشان داد چندجمله‌ای لژاندر P_n، در رابطه بازگشتی زیر نیز صدق می‌کند

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), n = 1, 2, \ldots$$

[۱۴] *Legendre polynomials*