دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

آمار ریاضی

استنباط بیزی در خانواده نمایی تعمیم یافته بر اساس داده های سانسور شده

استاد راهنما

خانم دکتر آرزو حبیبی راد

استاد مشاور

خانم دکتر ملیحه عباس نژاد

نگارش

سید عرفان رضوی

بهمن ۱۳۹۰

تقدیم به پدر و مادرم :

که از نگاهشان صلابت

از رفتارشان محبت

و از صبرشان ایستادگی را آموختم

تقدیم به خواهرانم :

که وجودشان شادی بخش و صفایشان مایه آرامش من است.

پیش گفتار

بیش از دو قرن است که نظریه قابلیت اعتماد توجه محققین در صنعت را به خود جلب کرده است و مطالعات فراوانی در زمینه های مختلف این شاخه از علم آمار صورت گرفته است. یکی از موضوعات مهم در قابلیت اعتماد استفاده بهینه از نمونه هایی با حجم کوچک است. غالباً در صنعت تعداد نمونه های در دسترس کم است اما در مقابل اطلاعات پیشینی در مورد نحوه و چگونگی کارکرد سیستم های مورد نظر وجود دارد. روش های معمول در برآورد پارامترها مانند درستنمایی ماکسیمم و یا گشتاوری از اطلاعات پیشین استفاده نمی کنند و همچنین با حجم های نمونه ی کوچک برآورد های نسبتاً خوبی ارایه نمی دهند. در مقابل روش های بیزی با اطلاعات و تجربیات پیشین ترکیب می شوند و یک چارچوب مناسب برای استنباط و تصمیم گیری را فراهم می کند و در نتیجه با حجم های نمونه ی کوچک برآورد های قابل قبولی ارایه می دهند.

داده ها در قابلیت اعتماد غالباً دارای ویژگی خاصی هستند و توابع توزیع خاصی از جمله وایبل ، گاما و لگ نرمال و . . . برای برازش این گونه داده ها پیشنهاد می شوند. در سال های اخیر توزیع های جدیدی برای مدل سازی داده های طول عمر ارایه شده اند. گوپتا و کاندو (۱۹۹۹)، حالت خاصی از توزیع وایبل نمایی شده را که توسط مودهولکار و همکاران (۱۹۹۵) معرفی شده بود، در نظر گرفتند و آن را توزیع نمایی تعمیم یافته نامیدند. آن ها نشان دادند که توزیع نمایی تعمیم یافته به عنوان جایگزین مناسبی برای توزیع های گاما و وایبل و حتی لگ نرمال است و در خیلی موارد و به طور کاملاً مؤثر در تحلیل داده های چوله مثبت به جای گاما، وایبل و لگ نرمال به کار می رود.

مطالب این پایان نامه شامل ۴ فصل است که در زیر خلاصه ای از مطالب هر فصل آمده است:

- در فصل اول، ابتدا تعاریفی از قابلیت اعتماد را توضیح داده و همچنین توابع مرتبط با قابلیت اعتماد را ارائه می دهیم. سپس کلیاتی درباره داده های سانسور شده و انواع سانسورها بیان می کنیم و همچنین مفاهیم و مقدمات مورد نیاز فصل های بعد که شامل مقدماتی از تئوری تصمیم بیزی ، برآورد از طریق زنجیر مارکف مونت کارلو $(MCMC)$ ، نمونه گیری برمبنای اهمیت و روش تکرار عددی است، را ارائه می دهیم.

- در فصل دوم بعد از معرفی توزیع نمایی تعمیم یافته، برخی از خصوصیات این توزیع و همچنین رفتار میانگین، میانه و نمای توزیع نمایی تعمیم یافته را بررسی می نماییم. سپس برآوردگرهای مختلف کلاسیک که شامل برآوردگرهای درستنمایی ماکسیمم، گشتاوری ، درصدی، L-گشتاوری و حداقل مربعات را برای پارامترهای مجهول این توزیع را به دست می آوریم و سپس به کمک روش های عددی به مقایسه کارایی این برآوردگرها می پردازیم.

- فصل سوم، اختصاص به تحلیل بیزی داده های کامل در توزیع نمایی تعمیم یافته دارد. همچنین برآوردهای بیزی پارامترهای مجهول را تحت تابع زیان مربع خطا و لاینکس به دست می آوریم. از آنجا که برآوردگرهای بیزی را نمی توان به صورت صریحی به دست آورد، برای محاسبه برآوردها از روش تقریب لیندلی و روش $MCMC$ استفاده می کنیم و سپس با استفاده از نتایج شبیه سازی به مقایسه کارایی برآوردگرهای بیز به دست آمده با برآوردگرهای درستنمایی ماکسیمم می پردازیم.

- در فصل چهارم، مسأله برآورد پارامترها را از دیدگاه بیزی هنگامی که داده های طول عمر سانسور شده پیشرونده باشند، بررسی می کنیم و برآوردگر های بیز پارامتر های توزیع نمایی تعمیم یافته را با استفاده از روش نمونه گیری بر مبنای اهمیت به دست می آوریم. همچنین پیش گویی بیز بر اساس نمونه های سانسور پیشرونده را بررسی می کنیم و در پایان برای درک بهتر مطالب، مثال هایی با داده های واقعی ارایه می‌کنیم.

در پایان لازم می‌دانم که مراتب سپاسگزاری خود را از زحمات بی دریغ خانم دکتر آرزو حبیبی راد که راهنمایی این پایان نامه را بر عهده داشتند و در تدوین این پایان نامه، از هیچ کوششی فروگذار نکرده اند، به جای آورم. همچنین از خانم دکتر ملیحه عباس نژاد که سمت مشاوره این پایان نامه را بر عهده داشتند، تشکر و قدردانی می‌نمایم. از اساتید داور، جناب آقای دکتر مهدی عمادی و جناب آقای دکتر هادی جباری که زحمت داوری این پایان نامه را برعهده گرفتند تشکر می‌کنم. در اینجا از همکاری صمیمانه مسئولین محترم کتابخانه استاد تقی فاطمی دانشگاه فردوسی مشهد نیز سپاسگزاری می‌کنم. در نهایت، شایسته است مراتب قدردانی خود را از پدر و مادر عزیزم که همواره مشوق و همراه من بوده‌اند و از آنچه در توان داشتند برای کسب تحصیل من دریغ نکرده‌اند، اعلام نمایم.

سید عرفان رضوی

بهمن ۱۳۹۰

فهرست مطالب

لیست تصاویر

لیست جداول

فهرست نمادها

تابع بقا در زمان t	$\mathrm{S(t)}$
تابع نرخ خطر در زمان t	$\mathrm{h(t)}$
تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X	$\mathrm{f(x)}$
تابع توزیع احتمال متغیر تصادفی X	$\mathrm{F(x)}$
تابع زیان مربع خطا	SEL
تابع مخاطره برآوردگر $T(X)$ در برآورد پارامتر θ	$\mathrm{R}(\theta, \mathrm{T})$
زنجیر مارکف مونت کارلو	MCMC
معکوس تابع نرخ شکست	$\mathrm{r}(\mathrm{x}; \alpha, \lambda)$
برآوردگر گشتاوری	MME
برآوردگر درصدی	PCE
لگاریتم تابع درستنمایی براساس داده ها ی کامل	$\ell_{\mathrm{c}}(\theta)$
مستقل و هم توزیع	i.i.d.
توزیع گاما با پارامترهای α و λ	$\mathrm{Ga}(\alpha, \lambda)$
توزیع وایبل با پارامترهای α و λ	$\mathrm{WE}(\alpha, \lambda)$
توزیع نمایی تعمیم یافته با پارامتر های α و λ	$\mathrm{GE}(\alpha, \lambda)$
تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X	$\mathrm{M_X(t)}$

تابع دای گاما	$\Psi(.)$
i امین آماره مرتب	$\mathrm{X_{(i)}}$
برآوردگر حداقل مربعات	LSE
برآوردگر L - گشتاوری	$\mathrm{L-Moment}$
برآوردگر درستنمایی ماکسیمم	MLE
آماره کولموگوروف - اسمیرنوف	$\mathrm{K-S}$
امید ریاضی	$\mathrm{E}(.)$
واریانس	$\mathrm{Var}(.)$
تابع درستنمایی پیشگویی	PLF
میانگین مربع خطا	MSE

فصل ۱

مقدمات و مفاهیم پایه

۱.۱ تعاریفی در قابلیت اعتماد

تحلیل بقاء از نظر علم آمار، عبارت از استفاده از فنون آماری در تحلیل متغیر های تصادفی مثبت که نوعاً مقدار این متغیرها زمان شکست یک مؤلفه ی صنعتی (مکانیکی یا الکتریکی) یا زمان مرگ یک واحد زنده (سلول، بیمار، حیوان وغیره) است. ممکن است این متغیر زمان یادگیری یک مهارت باشد و یا امکان دارد به زمان هیچ ارتباطی نداشته باشد. برای مثال متغیر می تواند مبلغ پرداختی یک شرکت بیمه در وضعیت خاص باشد.

قابلیت اعتماد معمولاً به عنوان احتمالی که یک سیستم، ماشین و یا دستگاه، کار خود را تحت شرایط استاندارد برای یک دوره زمانی مشخص انجام دهد، تعریف می شود. بهبود قابلیت اعتماد، بخش مهمی از تصویر کلی بهبود کیفیت محصول می باشد. تعاریف بسیاری از کیفیت موجود است ولی توافق عمومی آن است که یک محصول غیر قابل اعتماد یک محصول با کیفیت نمی باشد.

یک عامل مهم که همواره باید در امور نگهداری و تعمیرات، انجام خدمات، برنامه ریزی های تولید در صنعت و . . . مورد ارزیابی قرار گیرد، آگاهی از این امر است که سیستم های موجود با چند درصد اطمینان برای انجام مأموریت های تعیین شده آمادگی دارند؟ به عبارت دیگر احتمال این که سیستم های مأمور در ضمن انجام کار دچار خرابی و رکودهای اضطراری شوند چقدر است؟ با دید واقع بینانه به مسأله، بدیهی است که اطمینان کامل ۱۰۰٪ از انجام موفقیت آمیز مأموریت امکان پذیر نخواهد بود. در هر حال چنین امکانی را باید در کنار عامل احتمال بیان نمود، به بیان دیگر در بررسی امکانات و قابلیت های یک سیستم باید احتمال کارکرد موفقیت آمیز و بدون اشکال آن را ارزیابی نمود. در اینجا منظور از سیستم، مجموعه یا گروهی از اشیا مرتبط، یا غیر مرتبط است که هدفی (اهدافی) خاص را دنبال می کنند، به نحوی که یک واحد پیچیده را تشکیل می دهند.

نظریه قابلیت اعتماد در قرن نوزدهم میلادی جهت کمک به شرکت های بیمه در محاسبه نرخ سود و در مقابل مطالبه حق بیمه از مشتریان به وجود آمد. شکست در عملکرد وسایل ماشینی مانند کشتی ها، قطارها و خودروها در بسیاری جهات شبیه زندگی و مرگ موجودات زنده می باشد. از این رو مدل های آماری

مناسب برای هر یک از این موضوع ها به طور کلی مدل های زمان تا پیشامد [۱] نامیده می شوند.
بسیاری از روش های مرتبط با داده های طول عمر کاملاً قدیمی هستند. اما تقریبا از سال ۱۹۷۰ تئوری و کارهای کاربردی مرتبط با طول عمر به سرعت گسترش یافت و بسته های نرم افزاری برای آنالیز داده های طول عمر از سال ۱۹۶۸ به طور گسترده ای در دسترس قرار گرفت.

مفهوم طول عمر

در زمینه های مختلف آنالیز بقاء، اصطلاح طول عمر (که به آن مدت زمان زندگی یا زمان شکست نیز می گویند) معانی متفاوتی دارد که در ادامه با چند مثال این مفهوم را توضیح خواهیم داد.

مثال ۱.۱. در آزمایش اقلام تولید شده کارخانه ای برطبق اطلاعات در مورد دوام این اقلام آنها را در آزمایشگاهی در معرض آزمایش قرار می دهند و تا زمان خرابی تحت نظر می گیرند. در اینجا مدت زندگی بر اساس زمان خراب شدن محصول بیان می شود. زمانی که یک محصول آن گونه که مدنظر ماست کار نکند می گوییم آن محصول خراب شده است.

مثال ۲.۱. آمارگیران جمعیت و متخصصان علوم اجتماعی علاقه مند به بررسی طول عمر برخی وقایع از وضعیت زندگی بشر می باشند. به عنوان مثال ازدواج افراد یک جامعه را در نظر بگیرید. ازدواجهایی که در طول سال ۱۹۸۰ در یک کشور خاصی صورت گرفته است. در اینجا طول عمر یک ازدواج ممکن است مدت دوام آن باشد. ممکن است یک ازدواج به دلیل طلاق یا مرگ به پایان برسد.

مثال ۳.۱. در یک آزمایش می خواهند تاثیر یک دارو را که موجب پیدایش غده ای در بدن می شود برروی موجود زنده ای مورد بررسی قرار دهند. در اینجا زمان پیدایش غده یک متغیر تصادفی است و منظور از طول عمر فاصله بین زمان استفاده از دارو تا زمان پیدایش غده می باشد.

مثال ۴.۱. در مطالعات پزشکی مرتبط با بیماری های وخیم و کشنده طول عمر افراد بیمار مورد مطالعه قرار می گیرند که از تاریخ تشخیص بیماری یا مراجعه افراد یا بروز بیماری یا شروع بیماری محاسبه می شود. به عنوان مثال برای درمان یک بیماری، توزیع طول عمر بیماران مختلف با روش های درمان مختلف را با هم مقایسه می کنند. در این مثال طول عمر مدت زمان زندگی شخص از لحظه تشخیص یا

[۱] time to event

بروز بیماری تا زمان مرگ است و منظور از زمان شکست یا مدت زندگی زمان مرگ افراد از مبدأ در نظر گرفته شده می باشد.

توزیع احتمال برای زمان شکست T می تواند توسط تابع توزیع تجمعی، تابع چگالی احتمال، تابع بقا[۲] و یا تابع نرخ خطر[۳] بیان شود. این توابع در زیر توصیف می گردند.

تابع توزیع تجمعی:

تابع توزیع تجمعی T، $F(t) = P(T \leq t)$، احتمال این که یک مؤلفه قبل از زمان t از کار بیافتد، را بیان می کند. همچنین $F(t)$ می تواند به عنوان نسبت مؤلفه هایی از جامعه که قبل از زمان t از کار می افتند، تفسیر شود.

تابع چگالی احتمال:

تابع چگالی احتمال برای یک متغیر تصادفی پیوسته T به صورت مشتق $F(t)$ نسبت به t تعریف می شود

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt}, \qquad (۱.۱)$$

اگر چه تابع چگالی احتمال، اهمیت کمتری نسبت به دیگر توابع در کاربردهای قابلیت اعتماد دارد، ولی به طور گسترده در توسعه نتایج فنی به کار می رود.

تابع بقاء:

تابع بقاء T، $S(t) = P(T > t)$، معروف به تابع قابلیت اعتماد، متمم تابع توزیع احتمال است که بیانگر احتمال عدم خرابی مؤلفه مورد بررسی (فرد، دستگاه) در یک فاصله زمانی معین بوده و برابر است با:

$$S(t) = P(T > t) = ۱ - F(t) = \int_t^\infty f(x)dx. \qquad (۲.۱)$$

تابع بقاء $S(t)$ یک تابع پیوسته نزولی است به طوری که :

$$S(\infty) = \lim_{t\to\infty} S(t) = ۰, \qquad S(۰) = ۱ \qquad (۳.۱)$$

[۲] Survival function

[۳] Hazard rate function

تابع نرخ خطر:

اگر مؤلفه (فرد، دستگاه) در زمان t دچار شکست نشده باشد $(T > t)$ آنگاه احتمال آن که در فاصله زمانی کوچک Δt خراب شود را نرخ شکست در زمان t گوییم و آن را با $h(t)$ نمایش می دهیم. به عبارت دیگر:

$$\begin{aligned} &h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t < T < T + \Delta t | T > t)}{\Delta t} = \frac{f(t)}{S(t)}, \\ &h(t) = -\frac{S'(t)}{S(t)}, \\ &\ln S(t)|_0^t = -\int_0^t h(t)dt \quad \to \quad S(t) = exp\Big(-\int_0^t h(t)dt\Big) \end{aligned} \tag{۱.۴}$$

نرخ خطر را می توان سرعت لحظه ای شکست دانست.

تابع نرخ خطر یک مشخصه مهم از توزیع داده های طول عمر است و نشان دهنده عملکرد شکست در طول زمان است. اطلاعات پیشین در باره شکل تابع نرخ خطر در انتخاب مدل مناسب می تواند راهنما باشد. در نهایت اگر عوامل مؤثر بر طول عمر یک فرد یا یک دستگاه در طول زمان تغییر کند ضروری به نظر می رسد که برای مدل کردن داده های طول عمر از تابع نرخ خطر استفاده کنیم. شکل های تابع نرخ خطر از لحاظ کیفی کاملاً متفاوت می باشد و بعضی از این اشکال به صورت زیر می باشند.

۱ - ثابت

۲ - یکنوا (نزولی یکنوا - صعودی یکنوا)

۳ - $\cap$ - شکل

۴ - $\cup$ - شکل

به عنوان مثال اگر افراد یک جامعه را در نظر بگیریم در این حالت تابع نرخ خطر (نرخ خطر آنی مرگ) اغلب به صورت $\cup$ -شکل می باشد. زیرا ما با این حقیقت در جوامع بشری آشنا هستیم که بعد از دوره اولیه که مرگ ناشی از تولد بچه های ناقص یا بیمار است، نرخ مرگ با افزایش زمان کاهش می یابد و بعد از مدت زمانی با کهولت سن نرخ مرگ افزایش پیدا می کند.

۲.۱ داده های سانسور شده

یکی از مشکلات در مطالعه داده های زمان تا پیشامد و در واقع آنچه تحلیل بقاء را از سایر مباحث آماری جدا می کند، عمل سانسور است. در تحلیل داده های بقاء مانند آزمون های طول عمر، آزمایش های کلینیکی، مطالعات تأثیر دوز سم ها و دیگر زمینه های علم آمار، این امکان وجود دارد که زمان شکست کامل برخی از واحد ها مشاهده نشود. به این معنی که در برخی وضعیت ها، برای برخی از واحد ها در طول آزمایش شکست اتفاق نمی افتد و یا از ادامه آزمایش باز نمی مانند و به جای دانستن زمان شکست ، تمام آنچه می دانیم این است که این واحد ها طول عمری متجاوز از مقداری مانند y دارند. در آمار سانسور زمانی رخ می دهد که تنها قسمتی از مقدار یک مشاهده معلوم باشد یا هنگامی که یک مقدار خارج از حیطه اندازه گیری روی دهد.

این محدودیت، ممکن است از روی اجبار و یا به صورت اختیاری توسط آمارگر اعمال شود. بعضی از این محدودیت ها عبارتند از: فرصت کم برای اعلام نتایج، طولانی شدن مدت آزمایش، عدم دسترسی به همه واحد ها و یا مأیوس شدن از نتیجه دادن همه واحد ها. این محدودیت های پیش آمده در نمونه ها را سانسور می نامند. سانسور ها معمولاً به صورت های مختلفی اعمال می شوند. بعضی از انواع سانسورها عبارتند از: سانسور نوع اول، سانسور نوع دوم، سانسور تصادفی، سانسور پیشرونده، سانسور هیبرید و دیگر سانسور ها. برای جزئیات بیشتر درباره انواع سانسور ها و کاربرد آن ها می توان به کتاب آرنولد و همکاران [۴] (۱۹۹۲)، لاولس [۵] (۱۹۸۲) و نلسن [۶] (۲۰۰۴) مراجعه نمود.

یکی از اولین تلاش ها در جهت تحلیل مسائل آماری که شامل داده های سانسور شده بود، توسط دانیل برنولی [۷] (۱۷۶۶) انجام گرفت که در تحلیل شیوع بیماری آبله و اطلاعات مربوط به مرگ و میر در اثر این بیماری بود.

---

[۴] Arnold et al

[۵] Lawless

[۶] Nelson

[۷] Daniel Bernoulli

۱.۲.۱ سانسور نوع اول

فرض کنید یک آزمون طول عمر با n واحد، باید در زمان مشخص T به پایان برسد، در این صورت همه واحد ها در زمان $t = 0$ فعال می شوند و شروع به کار می کنند و در زمان T، آزمایش به پایان می رسد، به این روش از سانسور، سانسور نوع اول یک مرحله ای از راست گویند.
در این روش از سانسور، تعداد شکست ها، یک متغیر تصادفی است، در واقع تعداد شکست ها دارای توزیع دو جمله ای با پارامتر های n و $p = F(T)$ است، که $F(.)$ تابع توزیع واحد های تحت آزمایش می باشد.
سانسور نوع اول یک مرحله ای از راست، می تواند به حالت سانسور نوع اول دو مرحله ای (از راست و چپ) تعمیم داده شود. این حالت زمانی رخ می دهد که شکست های اول به سرعت رخ دهند به طوری که نتوان زمان دقیق آن ها را ثبت نمود، بنابراین مشاهدات از زمان ثابت T_L شروع می شوند و در زمان از قبل تعیین شده $T(T > T_L)$، آزمایش به پایان می رسد.

۲.۲.۱ سانسور نوع دوم

اگر در آزمایشی با n واحد بخواهیم دقیقا $m(m < n)$ شکست را مشاهده کنیم و بعد از مشاهده m امین شکست آزمایش را متوقف کنیم، در این صورت طول عمر $(n - m)$ واحد باقیمانده سانسور می شوند، به این روش از سانسور، سانسور نوع دوم یک مرحله ای از راست گویند.
در این روش از سانسور زمان لازم برای رسیدن به m امین شکست یک متغیر تصادفی است. در حقیقت، زمان مشاهده m امین شکست، برابر با توزیع m امین آماره مرتب معمولی است. این روش از سانسور نیز می تواند به سانسور نوع دوم دو مرحله ای (از راست و چپ) تعمیم داده شود، این حالت زمانی رخ می دهد که زمان های r شکست اول ثبت نشده باشند و مشاهدات از زمان $(r + 1)$ امین شکست شروع شوند و در زمان مشاهده m امین شکست، آزمایش به اتمام می رسد.

برای جزئیات بیشتر در مورد سانسور های نوع اول و دوم، می توان به کوهن[۸] (۱۹۶۶)، بالاکریشنان[۹] (۱۹۸۹) و بین و انگلهارت[۱۰] (۱۹۹۱) مراجعه نمود.

۳.۲.۱ سانسور پیشرونده نوع دوم

با تعمیم سانسور نوع دوم یک مرحله ای از راست، می توان به یک روش مشابه دست یافت که سانسور پیشرونده نوع دوم از راست نامیده می شود. تحت این روش از سانسور، n واحد در زمان صفر مورد آزمایش قرار می گیرند، بلافاصله بعد از مشاهده اولین شکست تعداد R_1 واحد از $n-1$ واحد باقیمانده به طور تصادفی از آزمایش حذف می شوند، بعد از مشاهده دومین شکست تعداد R_2 واحد از $n-R_1-2$ واحد باقیمانده به طور تصادفی حذف می شوند و در نهایت در زمان مشاهده m امین شکست تعداد R_m واحد باقیمانده از آزمایش حذف می شوند طوری که $R_m = n - \sum_{i=1}^{m-1} R_i - m$.

در این روش از سانسور، R_i ها مقادیری ثابت و از قبل تعیین شده می باشند و زمان های شکست، متغیرهای تصادفی هستند، که آماره های مرتب سانسور پیشرونده نوع دوم از راست نامیده می شوند. بنابراین طرح سانسور پیشرونده نوع دو بر اساس m و بردار $R = (R_1, R_2, ..., R_m)$ مشخص می شود.

در سانسور پیشرونده نوع دوم از راست، ممکن است شکست ها از زمان $r+1$ امین شکست مشاهده شوند، یعنی قبلاً r واحد از کار افتاده باشند ولی زمان آن ها ثبت نشده باشد. بنابراین، در زمان مشاهده $r+1$ امین شکست تعداد R_{r+1} واحد از آزمایش خارج می شوند و در زمان مشاهده $r+2$ امین شکست تعداد R_{r+2} واحد به طور تصادفی حذف می شوند و بالاخره در زمان مشاهده m امین شکست تعداد R_m واحد باقیمانده از آزمایش حذف می شوند که در این حالت، $R_m = n - \sum_{i=1}^{m-1} R_i - m$.

یکی از ایرادات سانسور های نوع اول و دوم معمولی این است که امکان خروج واحد ها به جز در نقطه نهایی آزمایش وجود ندارد، اما در روش سانسور پیشرونده می توان تعدادی از واحد های تحت آزمایش

[۸] Cohen

[۹] Balakrishnan

[۱۰] Bain and Englhardt