بسم الله الرحمن الرحيم

١١٢١١٤

۸۷/۱/۱۰۸۱۲۱
۸۸/۱/۲۴

دانشگاه سیستان و بلوچستان

تحصیلات تکمیلی

پایان نامه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض گرایش هندسه

عنوان:

برخی از ابرجبرهای لی کامل

استاد راهنما:

دکتر غلامرضا رضایی

تحقیق و نگارش:

پویان خامه چی

(این پایان نامه از حمایت مالی معاونت پژوهشی دانشگاه سیستان و بلوچستان بهره مند شده است)

۱۳۸۸/۱/۱۵

دی ماه ۸۷

۱۱۲۱۱۴

مدیریت آموزشی تحصیلات تکمیلی
دانشگاه سیستان و بلوچستان

بسمه تعالی

این پایان نامه با عنوان برخی از ابرجبرهای لی کامل قسمتی از برنامه آموزشی دوره کارشناسی ارشد ریاضی محض گرایش هندسه توسط دانشجو پویان خامه چی تحت راهنمایی استاد پایان نامه دکتر غلامرضا رضایی تهیه شده است. استفاده از مطالب آن به منظور اهداف آموزشی با ذکر مرجع و اطلاع کتبی به حوزه تحصیلات تکمیلی دانشگاه سیستان و بلوچستان مجاز می باشد.

پویان خامه چی

این پایان نامه ۶..... واحد درسی شناخته می شود و در تاریخ ۸۷/۱۰/۲۶ توسط هیئت داوران بررسی و درجه بسیار خوب به آن تعلق گرفت.

	نام و نام خانوادگی	امضاء	تاریخ
استاد راهنما:	دکتر غلامرضا رضایی		
داور ۱:	دکتر نصرالله گرامی		
داور ۲:	دکتر اکبر گلچین		
نماینده تحصیلات تکمیلی:	دکتر حسن رضایی		

دانشگاه سیستان و بلوچستان

تعهدنامه اصالت اثر

اینجانب پویان خامه چی تأیید می کنم که مطالب مندرج در این پایان نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و به دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این نوشته از آن استفاده شده است مطابق مقررات ارجاع گردیده است. این پایان نامه پیش از این برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نشده است.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به دانشگاه سیستان و بلوچستان می باشد.

نام و نام خانوادگی دانشجو: پویان خامه چی

امضاء

تقدیم به:

همه تلاش گران عرصه علم و اندیشه

سپاسگزاری

بر خود لازم می دانم که از کلیه دوستان و عزیزانی که در این دوره از راهنمایی، همکاری و مصاحبت آنان بهره مند شدم، قدر دانی نمایم. از جناب دکتر غلامرضا رضایی به عنوان استاد راهنمای این پایانامه که همواره در این مدت از راهنمایی و بذل توجه ایشان بهره بردم، صمیمانه تشکر نموده و موفقیت روز افزون ایشان را آرزو مندم.

از آقایان دکتر نصرالله گرامی و دکتر اکبر گلچین که داوری این پایانامه را قبول نمودند، از دکتر حسن رضایی نماینده تحصیلات تکمیلی، کمال تشکر را دارم.

همچنین از دوستان خوبم ابراهیم فاتحی، رسول ملک زاده و محمد خزاییلی بخاطر محبت و دلگرمی هایشان سپاس و قدردانی می کنم.

چکیده

در این پایان‌نامه، به معرفی دو گونه از ابر جبرهای لی کامل می‌پردازیم. مشتق ابر جبر هایزنبرگ $\mathcal{G}$ و همچنین تمام ریختی $\mathcal{H}(\mathcal{G})$ از $\mathcal{G}$ را نیز به دست می‌آوریم. هدف اصلی در این پایان‌نامه این است که نشان دهیم $Der\ \mathcal{G}$، ابر جبر لی کامل ساده است، $\mathcal{H}(\mathcal{G})$، ابر جبر لی کامل نیست ولی $Der\ \mathcal{H}(\mathcal{G})$ ابر جبر لی کامل ساده است. لذا دو رده جدید از ابر جبرهای لی کامل را به دست می‌آوزیم. به طور مشابه همین نتایج را برای جبر های لی کامل در فصل دوم به دست خواهیم آورد. در واقع این نتایج برای ابر جبرها، استنتاجی از جبر لی کامل است و مبین آن است که ارتباط و نزدیکی تنگاتنگی بین ابر جبرهای لی کامل و جبر لی کامل وجود دارد.

فهرست مندرجات

تاریخچه

در سال های اخیر مشاهده می‌شود که شاخه جدیدی از ریاضیات به سرعت در حال رشد و توسعه است. مقالات زیادی با پیشوند «ابر» در ریاضیات چاپ می‌گردد. این مطلب موجب بروز نظریه‌ای می‌شود که شاید ریاضیات متداول به سمت ریاضی جدید و نوینی به نام «ابر ریاضی» حرکت می‌کند.

امروزه توجه به مفهوم «ابر ریاضی»، از آن جهت است که دارای کاربردهای فراوانی در زمینه فیزیک نوین است. تئوری اتحاد در میدان های مغناطیسی قوی و ضعیف، فعل و انفعالات درونی جاذبه و به خصوص جاذبه کوانتمی را می‌توان به زبان ابر خمینه‌ها بیان کرد. برای اثبات این می‌توان به اگیوتسکی[۱] و مزینچسکو[۲] [۱۶] و فریدمن [۳] و نوون‌هاوزن [۴] [۵]، نظر افکند. همچنین به کارهای برزین[۵] و مارینف [۶] [۱۱] و اگیوتسکی و ساکاچف [۷] [۱۷]، مراجعه کرد. بی شک اولین ریاضیدانی که متوجه گردید در آستانه یک موضوع جدید (یعنی ابر ریاضیات) قرار گرفته است، برزین بود. وی زمانی که به پدیده ثانوی برخورد، سؤالات زیادی را برای خود مطرح ساخت. او در اوایل دهه ٦۰ میلادی به طور همزمان طرحی برای میدان های بوزونی[۸] و فرمیونی[۹] ریخت. بالاخره به این نتیجه رسید که یک شباهت نابدیهی در آنالیز آن‌ها وجود دارد. این نقش در عناصر گراسمان مشخص می‌گردد. هفت سال بعد اولین مقاله در زمینه ابر ریاضی ارائه گردید. به طور کلی این مقالات به تعریفی از ابر خمینه‌ها، ابر گروه‌های لی، تحلیل ساختاری ابر گروه‌های لی برای ابر گروه‌های لی و ابر جبرهای لی، توصیفی از ابر جبرهای لی ساده، نظریه انتگرالگیری روی ابر خمینه‌ها و نیز به مسائل حاشیه‌ای بیشتری در این خصوص می‌پردازد.

متن حاضر در بر گیرنده مفاهیمی در باب ابر جبرهای لی کامل و تمام ریختی از ابر جبرهای هایزنبرگ و کامل بودن آن‌ها می‌باشد.

---

[۱] Ogivetskii
[۲] Mezinchesku
[۳] Freedman
[۴] Nieuwenhuisen
[۵] Berzin
[۶] Marinov
[۷] sakachev
[۸] Bozon
[۹] Fermion

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱-۱ مقدمه

در این فصل تعاریف و مفاهیم مقدماتی برای آشنایی بیشتر با موضوع پایان نامه را می‌آوریم. تعاریف موجود در این فصل به نوبه خود در فصل های آتی مورد استفاده و کاربرد قرار می‌گیرند.

۱-۲ جبر لی

تعریف ۱.۲.۱: فرض کنیم $\mathbb{F}$ یک میدان باشد. فضای برداری $\mathcal{L}$، همراه با یک نگاشت دو خطی به عنوان کروشه لی [۱]، $\begin{cases} \mathcal{L}\times\mathcal{L}\to\mathcal{L} \\ (x,y)\mapsto[x,y] \end{cases}$، را جبر لی [۲] گوئیم، اگر شرایط زیر برقرار باشند

الف) برای هر $x \in \mathcal{L}$، $[x,x] = 0$؛

ب) برای هر $x,y,z \in \mathcal{L}$، $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$.

رابطه (ب) را اتحاد ژاکوبی [۳] می‌گوئیم.

بنابر دو خطی بودن کروشه لی، $[\ ,\ ]$، داریم

$$
\begin{aligned}
0 &= [x+y, x+y] \\
&= [x,x] + [x,y] + [y,x] + [y,y] = [x,y] + [y,x].
\end{aligned}
$$

لذا داریم

$$
\forall x,y \in \mathcal{L}: \quad [x,y] = -[y,x].
$$

مثال ۲.۲.۱: فرض کنیم $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. حاصل ضرب برداری $(x,y) \mapsto x \wedge y$، یک جبر لی روی $\mathbb{R}^3$ تعریف می‌کند. این جبر لی را با $\mathbb{R}^3_\wedge$ نشان می‌دهیم.

به وضوح اگر $x = (x_1, x_2, x_3)$ و $y = (y_1, y_2, y_3)$، آن‌گاه

[۱] Lie bracket

[۲] Lie Algebra

[۳] Jacobi identity

$$x \wedge y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1).$$

مثال ۳.۲.۱: هر فضای برداری $\mathcal{V}$ با کروشه لی تعریف شده به صورت زیر، یک جبر لی می‌باشد.

$$\forall x, y \in \mathcal{V}: \qquad [x, y] = 0.$$

مثال ۴.۲.۱: فرض کنیم $\mathcal{V}$، فضای برداری با بعد متناهی روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. $gl(\mathcal{V})$ را مجموعه همه نگاشت های خطی از $\mathcal{V}$ به $\mathcal{V}$ در نظر می‌گیریم. $gl(\mathcal{V})$ نیز یک فضای برداری روی $\mathbb{F}$ می‌باشد. اگر کروشه لی را به صورت زیر تعریف کنیم، آن‌گاه $gl(\mathcal{V})$ یک جبر لی خواهد بود:

$$\forall x, y \in gl(\mathcal{V}): \quad [x, y] = x \circ y - y \circ x.$$

در رابطه بالا $\circ$ عمل ترکیب نگاشت ها می‌باشد.

مثال ۵.۲.۱: $gl(n, \mathbb{F})$ را فضای برداری همه ماتریس‌های وارون پذیر $n \times n$ روی میدان $\mathbb{F}$ در نظر می‌گیریم. کروشه لی $[x, y] = xy - yx$ را که xy حاصل ضرب ماتریس های x, y است در نظر گرفته، $gl(n, \mathbb{F})$ با این کروشه یک جبر لی است. همچنین $SL(n, \mathbb{F})$، یعنی ماتریس های متعلق به $gl(n, \mathbb{F})$ با دترمینان ۱ نیز جبر لی است.

از همین خانواده می‌توان مثال های زیر را در نظر گرفت که همگی جبر لی می‌باشند.

$$O(n, \mathbb{F}) = \{A \in M_n(\mathbb{F}) \mid \forall x, y \in \mathbb{F}^n: \ (Ax, Ay) = (x, y)\}, \quad (x, y) = \sum_k x_k y_k.$$

$$SO(n, \mathbb{F}) = \{A \in O(n, \mathbb{F}) \mid \det(A) = 1\}.$$

$$Sp(n, \mathbb{F}) = \{A_{2n \times 2n} \mid B[Ax, Ay] = B[x, y]\},$$

که در آن B، فرم دو خطی پادمتقارن روی $\mathbb{F}^{2n}$ است و به صورت زیر می‌باشد

$$B[x, y] = \sum_{k=1}^{n} x_k y_{n+k} - x_{n+k} y_k.$$

$Sp(n, \mathbb{F})$ را گروه سیمپلکتیک می‌نامیم. برای آشنایی با فرم دو خطی به تعریف (۱۰.۶.۱) مراجعه شود.

۱—۳ زیر جبر و ایدآل‌ها

تعریف ۱.۳.۱: فرض کنیم $\mathcal{L}$ جبر لی باشد. زیرفضای برداری $\mathcal{K}$ از $\mathcal{L}$ را زیر جبر لی $\mathcal{L}$ گوئیم، هرگاه برای هر $x,y \in \mathcal{K}$، $[x,y] \in \mathcal{K}$.

به سادگی دیده می‌شود زیر جبر لی، خود یک جبر لی است.

تعریف ۲.۳.۱: فرض کنیم $\mathcal{L}$ جبر لی باشد. زیر فضای $\mathcal{I}$ از $\mathcal{L}$ را ایدآل $\mathcal{L}$ گوئیم، هرگاه برای هر $y \in \mathcal{I}$ و $x \in \mathcal{L}$ داشته باشیم

$$[x,y] \in \mathcal{I}.$$

بر طبق رابطه $[x,y] = -[y,x]$، تفاوتی بین ایدآل چپ و ایدآل راست وجود ندارد.

جبر لی $\mathcal{L}$ ایدآل خودش است، همچنین $\{0\}$ نیز ایدآل $\mathcal{L}$ است. این ایدآل ها را ایدآل بدیهی می‌گوئیم.

یک مثال از ایدآل نابدیهی جبر لی $\mathcal{L}$، مرکز آن است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C(\mathcal{L}) = \{x \in \mathcal{L} \mid \forall y \in \mathcal{L}:\ [x,y] = 0\}.$$

تعریف ۳.۳.۱: فرض کنیم $\mathcal{L}_1$ و $\mathcal{L}_2$ جبرهای لی روی میدان $\mathbb{F}$ باشند. آن‌گاه نگاشت $\varphi : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ را یک همریختی از $\mathcal{L}_1$ به $\mathcal{L}_2$ گوئیم، هرگاه φ یک نگاشت خطی و

$$\forall x,y \in \mathcal{L}_1: \qquad \varphi([x,y]) = [\varphi(x),\varphi(y)].$$

اگر علاوه بر شرایط بالا، φ یک نگاشت دوسویی باشد، آن‌گاه φ را یک یکریختی از $\mathcal{L}_1$ به $\mathcal{L}_2$ می‌نامیم.

یک همریختی مهم، همریختی الحاقی می‌باشد، که به صورت زیر تعریف می‌شود.

فرض کنیم $\mathcal{L}$، یک جبر لی باشد. نگاشت $\begin{cases} \mathrm{ad}:\mathcal{L}\to \mathrm{gl}(\mathcal{L}) \\ (\mathrm{ad}\ x)(y)\mapsto[x,y] \end{cases}$، برای هر $x,y \in \mathcal{L}$ را

همریختی الحاقی می‌نامیم.

برحسب خاصیت دو خطی بودن کروشه لی نگاشت $\mathrm{ad}\ x$، برای هر $x \in \mathcal{L}$ خطی است و هسته ad با مرکز $\mathcal{L}$ برابر است.

تعریف ۴.۳.۱: فضای برداری $\mathcal{A}$ بر میدان $\mathbb{F}$، همراه با نگاشت دو خطی $\begin{cases} \mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A} \\ (x,y)\mapsto xy \end{cases}$ را یک جبر گوییم. xy حاصل ضرب x, y نامیده می‌شود.

به وضوح هر جبر لی، یک جبر می‌باشد.

جبر $\mathcal{A}$ را شرکت پذیر گوییم، اگر برای هر $x, y, z \in \mathcal{A}$ داشته باشیم

$$(xy)z = x(yz).$$

حال اگر $\mathcal{A}$ جبر شرکت پذیر روی میدان $\mathbb{F}$ باشد، آن‌گاه عمل دو خطی جدیدی روی $\mathcal{A}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\forall a, b \in \mathcal{A}: \quad [a,b] = ab - ba.$$

$\mathcal{A}$ با این عمل یک جبر لی است.

تعریف ۵.۳.۱: فرض کنیم $\mathcal{G}$، یک جبر لی روی میدان $\mathbb{F}$ و $\mathcal{Q}$ ایدآل $\mathcal{G}$ باشد. زیر جبر $\mathcal{M}$ از $\mathcal{G}$ را زیر جبر لوی [۴] گوئیم، اگر

$$\mathcal{Q} + \mathcal{M} = \mathcal{G}, \quad \mathcal{Q} \cap \mathcal{M} = \circ.$$

که در آن $+$ حاصل جمع مستقیم $\mathcal{Q}$ و $\mathcal{M}$ است.

---

[۴] Levi subalgebra

۱—۴ مشتق

تعریف ۱.۴.۱: فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. نگاشت $\mathbb{F}-$ خطی $D:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ را مشتق $\mathcal{A}$ گوئیم، هرگاه

$$\forall a,b\in\mathcal{A}: \qquad D(ab)=aD(b)+D(a)b.$$

منظور از نگاشت $\mathbb{F}-$ خطی، نگاشت خطی بین فضاهای برداری تعریف شده روی میدان $\mathbb{F}$ است.

فرض کنیم $Der\mathcal{A}$ مجموعه همه مشتقات $\mathcal{A}$ باشد. این مجموعه تحت جمع و ضرب اسکالر بسته است. همچنین شامل نگاشت صفر می‌باشد. لذا $Der\mathcal{A}$، زیر فضای برداری از $gl(\mathcal{A})$ است.
علاوه بر این $Der\mathcal{A}$ زیر جبر لی از $gl(\mathcal{A})$ است.
همچنین اگر E,D مشتق جبر $\mathcal{A}$ باشند، آن‌گاه $[D,E]$ نیز مشتق می‌باشد.

مثال ۲.۴.۱: فرض کنیم $\mathcal{L}$ یک جبر لی و $x\in\mathcal{L}$. نگاشت $\mathrm{ad}\ \mathrm{x}:\mathcal{L}\to\mathcal{L}$ مشتق جبر لی $\mathcal{L}$ می‌باشد، زیرا طبق اتحاد ژاکوبی داریم

$$\begin{aligned}(ad\ x)[y,z]&=[x,[y,z]]\\&=[[x,y],z]+[y,[x,z]]\\&=[(ad\ x)y,z]+[y,(ad\ x)z],\end{aligned}$$

که در آن $y,z\in\mathcal{L}$ است.

تعریف ۳.۴.۱: فرض کنیم $\mathcal{I}$ و $\mathcal{J}$ ایدآل‌های جبر لی $\mathcal{L}$ باشند. حاصل ضرب ایدآل $\mathcal{I}$ و $\mathcal{J}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$[\mathcal{I},\mathcal{J}]=\mathrm{Span}\{[x,y]:x\in\mathcal{I},y\in\mathcal{J}\}.$$

که در واقع $Span$ یک مجموعه، فضای تولید شده توسط آن مجموعه است.

به سادگی دیده می‌شود $[\mathcal{I},\mathcal{J}]$، ایدآل $\mathcal{L}$ است.

حال فرض کنیم $\mathcal{I}=\mathcal{J}=\mathcal{L}$. می‌نویسیم

$$\mathcal{L}'=[\mathcal{L},\mathcal{L}]=\mathrm{Span}\{[x,y]:x,y\in\mathcal{L}\}.$$

$\mathcal{L}'$ ایدآل $\mathcal{L}$ است و آن را مشتق جبری $\mathcal{L}$ یا جبر جابجاگرها می‌نامیم.

تعریف ۴.۴.۱: فرض کنیم $\mathcal{L}$ یک جبر لی و $\mathcal{L}'$ که به صورت بالا تعریف شده، از بعد یک و شامل $C(\mathcal{L})$ باشد. هرگاه $\mathcal{L}'$ دارای پایه‌های f,g,z باشد، که $z=[f,g]$ و z در $C(\mathcal{L})$ باشد، آن‌گاه این جبر لی را جبر هایزنبرگ[5] می‌نامیم.

در اینجا لازم به ذکر است که تعریف جبر هایزنبرگ، منحصر به فرد نیست. در فصل بعد، تعریف دیگری از جبر هایزنبرگ ارائه می دهیم.

تعریف ۵.۴.۱: فرض کنیم $\mathcal{L}_۱$ و $\mathcal{L}_۲$ جبر لی باشند. در این صورت $\mathcal{L}=\{(x_۱,x_۲):x_i\in\mathcal{L}_i\}$ را حاصل جمع مستقیم تحت فضاهای برداری می‌نامیم. این حاصل جمع را به صورت $\mathcal{L}=\mathcal{L}_۱\bigoplus\mathcal{L}_۲$ نمایش می‌دهیم.

اگر تعریف کنیم:

$$[(x_۱,x_۲),(y_۱,y_۲)]=([x_۱,y_۱],[x_۲,y_۲]),$$

آنگاه $\mathcal{L}$ یک جبر لی خواهد بود.

تعریف ۶.۴.۱: جبر لی $\mathcal{L}$ را حل پذیر گوئیم، هرگاه برای هر $m\geq ۱$، $\mathcal{L}^{(m)}=۰$. که در آن

$$\mathcal{L}^{(۱)}=\mathcal{L}',\quad \forall k\geq ۲:\quad \mathcal{L}^{(k)}=[\mathcal{L}^{(k-۱)},\mathcal{L}^{(k-۱)}].$$

[5] Heisenberg Algebra

مثال ۱.۴.۷: جبر هایزنبرگ حل پذیر است.

تعریف ۱.۴.۸: بزرگ ترین ایدآل حل پذیر از جبر لی $\mathcal{L}$ را که شامل همه ایدآل ها باشد رادیکال $\mathcal{L}$ گوئیم و با $rad\ \mathcal{L}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۴.۹: جبر لی ناصفر $\mathcal{L}$ را نیم ساده گوئیم، اگر شامل هیچ ایدآل حل پذیر ناصفر نباشد. یا به عبارت دیگر $rad\ \mathcal{L} = 0$.

۱—۵ جبرهای لی پوچ توان

دنباله پائین مرکزی از جبر لی $\mathcal{L}$ را به صورت دنباله‌ای از عبارات زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}', \quad \forall k \geq 2: \quad \mathcal{L}^k = [\mathcal{L}, \mathcal{L}^{k-1}].$$

بنابراین خواهیم داشت

$$\mathcal{L} \supseteq \mathcal{L}^1 \supseteq \mathcal{L}^2 \supseteq \dots$$

تعریف ۱.۵.۱: جبر لی $\mathcal{L}$ را پوچ توان گوئیم، اگر برای هر $m \geq 1$ داشته باشیم

$$\mathcal{L}^m = 0.$$

مثال ۱.۵.۲: جبر لی $b(n, \mathbb{F})$، بعنوان ماتریس‌های بالا مثلثی روی میدان $\mathbb{F}$، پوچ توان است.

هر جبر لی پوچ توان، حل پذیر است. برای نشان این مطلب می‌توان از استقرا کمک گرفت و ثابت کرد $\mathcal{L}^{(k)} \subseteq \mathcal{L}^k$.

تعریف ۳.۵.۱: جبر لی $\mathcal{L}$ را ساده گوئیم، اگر هیچ ایدآلی غیر از ۰ و $\mathcal{L}$ نداشته باشد.

تعریف ۴.۵.۱: فرض کنیم $\mathcal{L}$ یک جبرلی روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. همریختی جبر لی به صورت $\phi : \mathcal{L} \to gl(\mathcal{V})$، که $\mathcal{V}$ یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ است را نمایش $\mathcal{L}$ می‌نامیم.

برخی اوقات از $\mathcal{V}$ بعنوان نمایش $\mathcal{L}$ استفاده می‌کنیم.

اگر نمایش جبر لی $\mathcal{L}$ به صورت $\mathcal{L} \to gl(n, \mathbb{F})$ باشد، آن را نمایش ماتریسی $\mathcal{L}$ می‌گوئیم.

اگر همریختی ϕ یک به یک باشد، آن‌گاه نمایش را وفادار می‌گوئیم.

تعریف ۵.۵.۱: فرض کنیم $\mathcal{L}$ جبر لی پوچ توان و ρ نمایش $\mathcal{L}$ در فضای برداری $\mathcal{V}$ روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. تابعک خطی λ روی $\mathcal{L}$ با مقادیر در $\mathbb{F}$ را وزن ρ گوئیم، اگر $v \neq 0$ در $\mathcal{V}$ و عدد صحیح $m \geq 1$ موجود باشد، به طوری که

$$(\rho(x) - \lambda(x))^m v = 0, \quad (x \in \mathcal{L}).$$

در این حالت مجموعه همه v های با این خاصیت را فضای وزن ρ، متناظر با وزن λ می‌نامیم.

چند مثال از نمایش

مثال ۶.۵.۱: نگاشت الحاقی $\begin{cases} \mathrm{ad}:\mathcal{L}\to \mathrm{gl}(\mathcal{L}) \\ (\mathrm{ad}\_x)(y)\mapsto [x,y] \end{cases}$ همریختی لی می‌باشد. لذا یک نمایش از جبر لی $\mathcal{L}$ است، که در آن $\mathcal{V} = \mathcal{L}$. این نمایش را نمایش الحاقی می‌گوئیم.

مثال ۷.۵.۱: فرض کنیم $\mathcal{L}$ زیر جبر لی از $gl(\mathcal{V})$ باشد. نگاشت شمول $\mathcal{L} \to gl(\mathcal{V})$ به وضوح همریختی جبر لی است، زیرا تحدید آن به $\mathcal{L}$ روی $gl(\mathcal{V})$ نگاشت همانی است. این نمایش را نمایش طبیعی از $\mathcal{L}$ می‌گوئیم.