دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)
وزارت علوم و تحقیقات و فناوری
دانشکده‌ی علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی محض
گرایش آنالیز

عنوان

روش تقریب چسبندگی برای نگاشت‌های به‌طور مجانبی غیرانبساطی در فضاهای باناخ

استاد راهنما
دکتر علی آبکار

استاد مشاور
دکتر عبدالرحمن رازانی

توسط
زهرا درویشی

مهر ۱۳۸۸

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

تشکر و قدردانی

اکنون که با یاری خداوند متعال، کار نگارش این پایان‌نامه به پایان رسیده است، بدین وسیله از استاد بزرگوار، فرزانه و فرهیخته، استاد راهنمایم جناب آقای دکتر علی آبکار که در تهیه‌ی این پایان‌نامه کمک شایانی به من کردند و از هیچ حمایت و مساعدتی دریغ ننمودند، سپاس‌گزارم. همچنین، از استاد مشاورم، جناب آقای دکتر عبدالرحمان رازانی که از راهنمایی‌های ایشان بهره برده‌ام، تشکر می‌کنم. از خداوند متعال، آرزوی سلامتی و موفقیت این اساتید گرامی را در تمام مراحل زندگی، خواهانم.

زهرا درویشی

چکیده

در این پایان‌نامه، فرض کنیم E یک فضای باناخ انعکاسی باشد که دارای نگاشت دوگانی به‌طور ضعیف پیوسته است. با استفاده از روش تقریب چسبندگی به یافتن یک نقطه‌ی ثابت مشترک ویژه‌ی خانواده‌ای متناهی از نگاشت‌های غیرانبساطی و نگاشت‌های به‌طور مجانبی غیرانبساطی می‌پردازیم. دو صورت ضمنی و صریح تقریب چسبندگی را معرفی و همگرایی قوی آن‌ها را به یک جواب از یک نامساوی تغییراتی اثبات می‌کنیم.

فهرست مندرجات

فهرست نمادها

میدان حقیقی به انضمام $\{+\infty\}$	$\bar{\mathbb{R}}$
زیردیفرانسیل تابع f	$\partial(f)$
دامنه‌ی تابع f	$dom(f)$
دامنه‌ی مؤثر تابع f	$D(f)$
فضای برداری نرم‌دار	E
فضای دوگان	E^*
فضای دوگان دوم	E^{**}
مجموعه‌ی نقاط ثابت نگاشت T	$Fix(T)$
مجموعه‌ی نقاط ثابت مشترک خانوادهای از نگاشت‌ها	F
مجموعه‌ی نگاشت‌های انقباضی از K به توی K	$\sum_K$
همگرایی قوی	$\rightarrow$
همگرایی ضعیف	$\rightharpoonup$
همگرایی ضعیف*	$\rightharpoonup^*$
مقدار تابعک f در عنصر x	$\langle x, f\rangle$
حد باناخ	LIM
نگاشت دوگانی با تابع وزن φ	J_φ

فصل ۱

مقدمه

مسئله‌ی تقریب نقطه‌ی ثابت، یکی از مباحث مهم و پرکاربرد در ریاضیات است که طی سال‌های اخیر به شیوه‌های گوناگونی به آن پرداخته شده است. ما در این پایان‌نامه، به تقریب نقطه‌ی ثابت مشترک خانواده‌ای متناهی از نگاشت‌های غیرانبساطی [۱] و به‌طور مجانبی غیرانبساطی [۲] به روش تقریب چسبندگی [۳] می‌پردازیم.

روش تقریب چسبندگی در شاخه‌های گوناگونی از ریاضیات مانند بهینه‌سازی محدب [۴]، برنامه‌ریزی خطی [۵] و معادلات دیفرانسیل بیضوی [۶] کاربرد دارد. اخیراً این روش برای حل معادلات عملگرهای غیرخطی مورد توجه قرار گرفته است. فایده‌ی این روش این است که جوابی را ارائه می‌دهد که دارای ویژگی‌های خاصی مانند حل نامساوی‌های تغییراتی [۷] می‌باشد. نظریه‌ی نامساوی تغییراتی

[۱] Nonexpansive mapping
[۲] Asymptotically nonexpansive mapping
[۳] Viscosity approximation method
[۴] Convex optimization
[۵] Linear programming
[۶] Elliptic differential equation
[۷] Variational inequality

به عنوان یک ابزار مهم در مطالعه‌ی رده‌ی گسترده‌ای از مسئله‌های تعادل [۸]، حرکت [۹] و ... در چندین شاخه از علوم محض و کاربردی به‌وجود آمده است.

روش تقریب چسبندگی نوعی روش تکرار است که یک دنباله را از روی یک صورت ضمنی تولید می‌کند که به جوابی مانند نقطه‌ی ثابت یک نگاشت و یا نقطه‌ی ثابت مشترک خانواده‌ای از نگاشت‌ها همگرا می‌باشد. در ضمن می‌توان از روی دنباله‌ای که به صورت ضمنی به‌دست آمده، یک دنباله به صورت صریح تولید کرد که تمام خواص دنباله‌ی تولید شده به صورت ضمنی را داراست.

روش تقریب چسبندگی برای یافتن یک جواب خاص، در سال ۲۰۰۰ توسط مودافی [۱۰] در [۱۰] ارائه شد. وی به بررسی یک خودنگاشت غیرانبساطی روی زیرمجموعه‌ی ناتهی، بسته، محدب و کران‌دار K از فضای هیلبرت H پرداخت. یادآوری می‌کنیم نگاشت $T : K \to K$ غیرانبساطی نامیده می‌شود هرگاه

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|, \qquad x, y \in K.$$

مودافی با فرض این‌که T دارای نقطه‌ی ثابت x^* است، نشان داد که دنباله‌ی $\{x_n\}$ تولید شده توسط صورت ضمنی

$$x_n = \frac{\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n} f(x_n) + \frac{1}{1+\varepsilon_n} Tx_n, \qquad n \geq 1,$$

و صورت صریح

$$x_{n+1} = \frac{\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n} f(x_n) + \frac{1}{1+\varepsilon_n} Tx_n, \qquad x_0 \in K, \ n \geq 1,$$

به $x^* \in Fix(T)$ به‌طور قوی همگراست به‌طوری‌که x^* جوابی یکتا از نامساوی تغییراتی

$$\langle (I - f)x^*, x^* - p \rangle \leq 0, \qquad p \in Fix(T).$$

می‌باشد. در روابط بالا، I نگاشت همانی و $f : K \to K$ یک نگاشت αانقباضی [۱۱] دلخواه، ولی ثابت است؛ یعنی

$$\exists \alpha \in (0, 1) \ \forall x, y \in K \qquad \|f(x) - f(y)\| \leq \alpha \|x - y\|.$$

همچنین، در صورت ضمنی معرفی شده‌ی بالا، $\{\varepsilon_n\}$ دنباله‌ای در $[0, 1]$ است که $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$؛ و در صورت صریح $\{\varepsilon_n\}$ علاوه بر شرط بالا، دارای شرایط زیر نیز می‌باشد:

[۸] Equilibrium problems
[۹] Moving problems
[۱۰] Moudafi
[۱۱] α-Contractive mapping

آ) $\lim_{n\to\infty}|\frac{1}{\varepsilon_n}-\frac{1}{\varepsilon_{n-1}}|=0$؛

ب) $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n=+\infty$.

وی برای ساختن دنباله‌ی $\{x_n\}$ به صورت زیر عمل کرد:
برای $n\geq 1$، نگاشت $\widetilde{T}_n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} \widetilde{T}_n : K\to K \\ x\mapsto \frac{\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n}f(x)+\frac{1}{1+\varepsilon_n}Tx. \end{cases}$$

در نتیجه، برای هر $x,y\in K$ داریم

$$\begin{aligned} \|\widetilde{T}_n x-\widetilde{T}_n y\| &\leq \frac{\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n}\,\|f(x)-f(y)\|+\frac{1}{1+\varepsilon_n}\,\|Tx-Ty\| \\ &\leq \frac{\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n}\,\alpha\|x-y\|+\frac{1}{1+\varepsilon_n}\,\|x-y\| \\ &= \frac{1+\alpha\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n}\,\|x-y\|. \end{aligned}$$

چون $\alpha<1$، به‌راحتی می‌توان دید که $\frac{1+\alpha\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n}<1$. پس برای هر $n\geq 1$، $\widetilde{T}_n$ یک نگاشت انقباضی است. با توجه به این‌که K یک فضای متریک کامل (K در H بسته) است، می‌توان از اصل انقباض باناخ (هر خودنگاشت انقباضی روی یک فضای متریک کامل، دارای نقطه‌ی ثابت یکتاست.) استفاده کرد. بنابراین

$$\forall n\geq 1\ \exists!\ x_n\in K \qquad \widetilde{T}_n x_n=x_n.$$

حال با توجه به تعریف نگاشت $\widetilde{T}_n$ و عبارت بالا، صورت ضمنی دنباله‌ی ساخته شده توسط مودافی حاصل می‌شود. صورت صریح نیز از روی صورت ضمنی ساخته می‌شود.

فرض می‌کنیم $S_E=\{x\in E:\ \|x\|=1\}$ کره‌ی واحد در فضای باناخ E باشد. می‌گوییم E دارای نرم گاتو-مشتق‌پذیر[۱۲] است هرگاه حد

$$\lim_{t\to 0}\frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t}$$

برای هر $x,y\in S_E$ موجود باشد؛ در این وضع می‌گوییم E یک فضای باناخ هموار[۱۳] است. حال اگر حد بالا، برای هر $y\in S_E$ به‌طور یکنواخت برای هر $x\in S_E$ موجود باشد، می‌گوییم E دارای نرم به‌طور یکنواخت گاتو-مشتق‌پذیر[۱۴] است. و اگر حد بالا، برای هر $x,y\in E$ که $\|x\|=\|y\|=1$، به‌طور

[۱۲] Gâteaux differentiable norm
[۱۳] Smooth Banach space
[۱۴] Uniformly Gâteaux differentiable norm

یکنواخت موجود باشد، فضای باناخ E به‌طور یکنواخت هموار[۱۵] نامیده می‌شود.
تعمیم مسئله‌ی بالا، از فضای هیلبرت به فضای باناخ توسط خو[۱۶] در [۱۳] و در سال ۲۰۰۴ صورت گرفت. وی ثابت کرد در یک فضای باناخ به‌طور یکنواخت هموار E، که در آن K مجموعه‌ای ناتهی، بسته و محدب و $T : K \to K$ نگاشتی غیرانبساطی با شرط $Fix(T) \neq \emptyset$ می‌باشد و f یک نگاشت انقباضی دلخواه روی K است، $\{x_t\}$ تولید شده توسط رابطه‌ی

$$x_t = tf(x_t) + (1 - t)Tx_t, \qquad t \in (0, 1),$$

به یک نقطه از $Fix(T)$ به‌طور قوی همگراست؛ اگر $Q : \sum_K \to Fix(T)$ به وسیله‌ی $Q(f) = \lim_{t\to 0} x_t$ تعریف شود، آن‌گاه $Q(f)$ نامساوی تغییراتی

$$\langle (I - f)Q(f), J(Q(f) - p)\rangle \leq 0, \qquad p \in Fix(T),$$

را حل می‌کند که در آن $J : E \to 2^{E^*}$ با ضابطه‌ی

$$J(x) = \{j \in E^* : \ \langle x, j\rangle = \|x\|^2, \ \|j\| = \|x\|\},$$

نگاشت دوگانی نرمال‌شده می‌باشد. لازم است متذکر شویم که $\sum_K$ مجموعه‌ی همه‌ی نگاشت‌های انقباضی روی K را نشان می‌دهد.
همچنین نشان داد اگر E یک فضای باناخ به‌طور یکنواخت هموار، K زیرمجموعه‌ای ناتهی، بسته و محدب در E، $T : K \to K$ یک نگاشت غیرانبساطی با $F(T) \neq \emptyset$، و f یک نگاشت انقباضی دلخواه باشد؛ و اگر $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$ در شرایط زیر صدق کند:

آ) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$؛

ب) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$؛

پ) $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 0$.

آن‌گاه دنباله‌ی $\{x_n\}$ تولید شده توسط

$$x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n)Tx_n, \qquad x_0 \in K, \ n \geq 0,$$

به‌طور قوی به نقطه‌ی ثابت T همگراست.

فرض می‌کنیم E یک فضای باناخ و K یک زیرمجموعه‌ی ناتهی، بسته و محدب در آن باشد. به نگاشت $T : K \to K$ به‌طور مجانبی غیرانبساطی گوییم هرگاه دنباله‌ی $\{k_n\} \subset [1, +\infty)$ موجود باشد که $\lim_{n\to\infty} k_n = 1$ و داشته باشیم

[۱۵] Uniformly smooth Banach space
[۱۶] Xu

$$\|T^n x - T^n y\| \le k_n \|x - y\|, \qquad n \ge 1,\ x, y \in K.$$

در سال ۲۰۰۶، شهزاد[۱۷] و اودومنه[۱۸] در [۱۱] نشان دادند که دنباله‌ی $\{x_n\}$ تولید شده توسط صورت ضمنی

$$x_n = (1 - \tfrac{t_n}{k_n}) f(x_n) + \tfrac{t_n}{k_n} T^n x_n, \qquad n \ge 1,$$

و صورت صریح

$$x_{n+1} = (1 - \tfrac{t_n}{k_n}) f(x_n) + \tfrac{t_n}{k_n} T^n x_n, \qquad x_0 \in K,\ n \ge 1,$$

تحت شرایط مناسب روی $\{t_n\}$، به نقطه‌ی ثابت یک خودنگاشت به‌طور مجانبی غیرانبساطی T روی زیرمجموعه‌ی ناتهی، بسته و محدب K در یک فضای باناخ حقیقی دارای نرم به‌طور یکنواخت گاتو-مشتق‌پذیر، به‌صورت قوی همگراست که نامساوی تغییراتی

$$\langle (I - f)(x^*), J(x^* - p) \rangle \le 0, \qquad p \in Fix(T),$$

را حل می‌کند.

به فضای باناخ E، به‌طور یکنواخت محدب[۱۹] گوییم هرگاه برای هر دو دنباله‌ی $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ در E، با شرایط

آ) برای هر $n \in \mathbb{N}$، $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$؛

ب) $\lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = 2$.

داشته باشیم

$$\|x_n - y_n\| \to 0, \qquad n \to \infty.$$

در سال ۲۰۰۶، چانگ[۲۰] در [۱۵] به مطالعه‌ی همگرایی ضعیف و قوی صورت ضمنی دنباله‌ی $\{x_n\}$، دنباله‌ی تولید شده توسط

$$x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1 - \alpha_n) T_n^{l_n + 1} x_n, \qquad n \ge 1,$$

برای N خودنگاشت به‌طور مجانبی غیرانبساطی $\{T_i\}_{i=1}^{N}$ روی K پرداخت که در آن K زیرمجموعه‌ای ناتهی، بسته و محدب در فضای باناخ به‌طور یکنواخت محدب E می‌باشد که در شرط اپیال[۲۱] صدق

[۱۷] Shahzad
[۱۸] Udomene
[۱۹] Uniformly convex Banach space
[۲۰] Chang
[۲۱] Opial's condition

می‌کند. در رابطه‌ی بالا، $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ و $n = l_nN + r_n$ که $l_n \geq 0$ و $1 \leq r_n < N$ می‌باشد.
لازم به توضیح است اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای در فضای باناخ E باشد که به‌طور ضعیف به x^* همگرا باشد و داشته باشیم

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n - y\| > \limsup_{n\to\infty} \|x_n - x^*\|, \qquad \forall y \in E,\ y \neq x^*,$$

آن‌گاه می‌گوییم E در شرط اپیال صدق می‌کند.

در سال ۲۰۰۷ لیو[22] در [۹] دنباله‌ی $\{x_n\}$ تولید شده توسط صورت ضمنی

$$x_n = (1 - \tfrac{t_n}{k_n})f(x_n) + \tfrac{t_n}{k_n} \textstyle\sum_{i=1}^{N} T_i^n x_n, \qquad n \geq 1,$$

و صورت صریح

$$x_{n+1} = (1 - \tfrac{t_n}{k_n})f(x_n) + \tfrac{\beta t_n}{k_n} x_n + \tfrac{\gamma t_n}{k_n} \textstyle\sum_{i=1}^{N} \tau_i T_i^n x_n, \qquad x_0 \in K,\ n \geq 1,$$

را معرفی کرد که در آن $\{T_i\}_{i=1}^{N}$ خانواده‌ای متناهی از نگاشت‌های به‌طور مجانبی غیرانبساطی روی زیرمجموعه‌ی ناتهی، بسته و محدب K از فضای به‌طور یکنواخت هموار E می‌باشد. وی نشان داد دنباله‌ی $\{x_n\}$ تولید شده توسط دو صورت بالا، به نقطه‌ی ثابت مشترک $\{T_i\}_{i=1}^{N}$ همگرا می‌باشد.

در فصل دوم، ابتدا به بیان تعاریف و مفاهیم مقدماتی می‌پردازیم، همچنین فضای انعکاسی و فضای هموار را تعریف و ارتباط بین این فضاها را بررسی می‌کنیم. در ضمن، به معرفی نگاشت‌های دوگانی به‌طور ضعیف پیوسته پرداخته و قضیه‌ی آسپلوند را بیان و اثبات می‌کنیم. در این فصل، به‌طور مختصر به بحث در باب تابعک خطی کران‌دار حد باناخ پرداخته، و قضیه‌هایی را بیان می‌کنیم. همچنین، نگاشت‌های نیمه‌بسته در صفر را معرفی و دو قضیه‌ی مرتبط با این موضوع را بیان می‌کنیم.

در فصل سوم، با فرض این‌که $\{T_i\}_{i=1}^{N}$ خانواده‌ای متناهی از خودنگاشت‌های غیرانبساطی روی K که زیرمجموعه‌ای ناتهی، بسته و محدب از فضای باناخ انعکاسی E با نرم به‌طور یکنواخت گاتو-مشتق‌پذیر هستند و دارای نقطه‌ی ثابت مشترک می‌باشند، به تقریب نقاط ثابت مشترک آن‌ها با روش تقریب چسبندگی می‌پردازیم. برای رسیدن به این هدف، ابتدا نشان می‌دهیم اگر عنصری از F مانند $Q(f)$ موجود باشد که نامساوی تغییراتی

$$\langle (I - f)Q(f), J(Q(f) - p)\rangle \leq 0, \qquad f \in \textstyle\sum_K,\ p \in F,$$

را حل کند، آن‌گاه دنباله‌ی $\{x_n\}$ تولید شده با روش تکرار

$$x_{n+1} = \lambda_{n+1} f(x_n) + (1 - \lambda_{n+1}) T_{n+1} x_n, \qquad x_0 \in K,\ n \geq 0,$$

[22] Liou

به $Q(f)$ همگرا می‌باشد. برای اثبات وجود عنصری مانند $Q(f)$ در F، نشان می‌دهیم دنباله‌ی $\{x_t^{f,n}\}$ تولید شده توسط صورت ضمنی

$$x_t^{f,n} = tf(x_t^{f,n}) + (1-t)T_{n+N}T_{n+N-1}\dots T_{n+1}x_t^{f,n}, \qquad f \in \sum_K,\ n \geq 1,\ t \in (0,1),$$

وقتی $t \to 0$، به یک نقطه‌ی ثابت مشترک T_i به‌طور قوی همگراست. سپس تابع $Q : \sum_K \to F$ را به صورت

$$Q(f) = \lim_{t\to 0} x_t^{f,n}, \qquad f \in \sum_K,$$

تعریف کرده، نشان می‌دهیم $Q(f)$ نامساوی تغییراتی

$$\langle (I-f)Q(f), J(Q(f)-p)\rangle \leq 0, \qquad f \in \sum_K,\ p \in F,$$

را حل می‌کند که در آن J نگاشت دوگانی نرمال شده و به‌طور ضعیف پیوسته می‌باشد.

در فصل پایانی این پایان‌نامه، دنباله‌ی $\{x_n\}$ را توسط صورت ضمنی

$$x_n = (1-\frac{1}{k_n})x_n + \frac{1-t_n}{k_n}f(x_n) + \frac{t_n}{k_n}T_{r_n}^n x_n, \qquad n \geq 1,$$

معرفی کرده، ابتدا نشان می‌دهیم هر نقطه‌ی حدی ضعیف دنباله‌ی بالا، یک نقطه‌ی حدی قوی آن است و نامساوی تغییراتی

$$\langle (I-f)x^*, J(x^*-p)\rangle \leq 0, \qquad p \in F,$$

را حل می‌کند؛ سپس با نشان دادن این مطلب که نامساوی تغییراتی موردنظر فقط و فقط دارای یک جواب است، همگرایی قوی دنباله‌ی $\{x_n\}$ را به یک نقطه‌ی ثابت مشترک N خودنگاشت به‌طور مجانبی غیرانبساطی $\{T_i\}_{i=1}^N$ اثبات می‌کنیم. در ضمن، همگرایی دنباله‌ی ساخته شده توسط صورت صریح

$$x_{n+1} = (1-\frac{1}{k_n})x_n + \frac{1-t_n}{k_n}f(x_n) + \frac{t_n}{k_n}T_{r_n}^n x_n, \qquad x_0 \in K,\ n \geq 1,$$

را با استفاده از این مطلب که دنباله‌ی ساخته شده توسط صورت ضمنی، به‌طور قوی همگراست، اثبات می‌کنیم.

در این پایان‌نامه، فرض بر این است که خواننده با مفاهیم مقدماتی آنالیز تابعی مانند فضای برداری نرم‌دار، فضای باناخ، دنباله‌ی همگرا، دنباله‌ی کوشی، تابعک خطی کران‌دار و ... آشنا باشد. متذکر می‌شویم در فصل‌های بعد، شماره‌ها به ترتیب از راست به چپ، شماره‌ی فصل، شماره‌ی بخش و شماره‌ی تعریف، قضیه یا نتیجه می‌باشد. به عنوان مثال، شماره‌ی ۳.۲.۱، تعریف، قضیه یا نتیجه‌ی ۳، از بخش ۲ و از فصل ۱ است.

این پایان‌نامه براساس مقاله‌های زیر تهیه و تنظیم شده است:

[1] J.S.Jung, **Viscosity approximation methods for a family of finite nonexpansive mappings in Banach spaces**, Nonlinear Anal.64(2006)2536-2552.

[2] L.C.Ceng, H.K.Xu, J.C.Yao, **The viscosity approximation methods for asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces**, Nonlinear Anal.69(2008)1402-1412.

فصل ۲

پیش‌نیازها

۱.۲ قضیه‌های اساسی

قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت باناخ که به اصل انقباض باناخ مشهور است، در سال ۱۹۲۲ توسط باناخ برای اثبات وجود جواب یک معادله‌ی انتگرالی معرفی شد. این اصل یک ابزار مهم برای حل مسائل وجودی در بسیاری از شاخه‌های آنالیز ریاضی است. صورت کامل اصل انقباض باناخ به شرح زیر است:

۱.۱.۲ قضیه ([۷، ص۷]) (اصل انقباض باناخ[۱]). فرض می‌کنیم X یک فضای متریک کامل و $f : X \to X$ یک انقباض باشد. در این صورت، f یک نقطه‌ی ثابت یکتا در X دارد. به‌علاوه، برای هر $x_\circ \in X$، دنباله‌ی $\{f^n x_\circ\}$ به این نقطه‌ی ثابت همگراست.

با استفاده از قضیه‌ی زیر می‌توان دید اصل انقباض باناخ برای هر خودنگاشت انقباضی که روی زیرمجموعه‌ی بسته‌ای از یک فضای متریک کامل تعریف شده است، کاربرد دارد.

۲.۱.۲ قضیه ([٦، ص۱۹]). فرض می‌کنیم X یک فضای متریک کامل باشد و $Y \subset X$. در این صورت Y یک فضای متریک کامل است اگر و فقط اگر Y در X بسته باشد.

[۱] Banach's contraction principle

نکته. چون هر فضای برداری نرم‌دار یک فضای متریک است، به کمک دو قضیه‌ی (۱.۱.۲) و (۲.۱.۲) می‌توانیم نتیجه بگیریم که هر زیرمجموعه‌ی بسته‌ی یک فضای برداری نرم‌دار، کامل است و هر خودنگاشت انقباضی روی این زیرمجموعه‌ها، دارای نقطه‌ی ثابت یکتاست.

۲.۲ همگرایی ضعیف و همگرایی ضعیف*

۱.۲.۲ تعریف. فرض می‌کنیم E یک فضای برداری نرم‌دار و $\{x_n\}$ دنباله‌ای در آن باشد. گوییم $\{x_n\}$ **به‌طور ضعیف به x همگراست و می‌نویسیم $x_n \rightharpoonup x$ وقتی $n \to \infty$، هرگاه برای هر $f \in E^*$ داشته باشیم**

$$\langle x_n, f\rangle \to \langle x, f\rangle, \qquad n \to \infty.$$

توجه به این نکته ضروری است که حد ضعیف دنباله‌ی $\{x_n\}$، در صورت وجود یکتاست؛ زیرا اگر $x_n \rightharpoonup x$ وقتی $n \to \infty$ و $x_n \rightharpoonup y$ وقتی $n \to \infty$، آن‌گاه برای هر $f \in E^*$ داریم $\langle x, f\rangle = \langle y, f\rangle$.
حال طبق نتیجه‌ای[۲] از قضیه‌ی هان‌باناخ[۳] خواهیم داشت $x = y$.
توجه کنید که وقتی می‌نویسیم $x_n \to x$ هرگاه $n \to \infty$، منظور همگرایی دنباله‌ی $\{x_n\}$ به x در نرم است؛ یعنی

$$\|x_n - x\| \to 0, \qquad n \to \infty,$$

و این همگرایی را همگرایی قوی خواهیم نامید.
نکته. واضح است که اگر $x_n \to x$ وقتی $n \to \infty$، آن‌گاه $x_n \rightharpoonup x$ وقتی $n \to \infty$؛ زیرا برای هر $f \in E^*$ داریم

$$|\langle x_n, f\rangle - \langle x, f\rangle| \leq \|f\|\|x_n - x\|.$$

۲.۲.۲ تعریف. فرض می‌کنیم E یک فضای برداری نرم‌دار و A زیرمجموعه‌ای از آن باشد. گوییم A در E **به‌طور ضعیف فشرده است هرگاه هر دنباله‌ی $\{x_n\}$ در A، دارای زیردنباله‌ای به‌طور ضعیف همگرا در آن باشد.**

[۲] فرض می‌کنیم E یک فضای برداری نرم‌دار و عناصر x و y از E چنان موجودند که برای هر $f \in E^*$ داریم $\langle x, f\rangle = \langle y, f\rangle$. در این صورت $x = y$.
[۳] Hahn-Banach theorem

۳.۲.۲ قضیه ([۱۶، ص ۱۲۰]). فرض می‌کنیم E یک فضای برداری نرم‌دار باشد. در این صورت، هر دنباله‌ی به‌طور ضعیف همگرا در E، کران‌دار می‌باشد.

۴.۲.۲ قضیه. فرض می‌کنیم E یک فضای برداری نرم‌دار باشد. اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای در E باشد که $x_n \rightharpoonup x$، وقتی $n \to \infty$ و $\{f_n\}$ دنباله‌ای در E^* باشد که $f_n \to f$، وقتی $n \to \infty$، آن‌گاه $\langle x_n, f_n\rangle \to \langle x, f\rangle$، وقتی $n \to \infty$.

۵.۲.۲ تعریف. فرض می‌کنیم E یک فضای برداری نرم‌دار و $K \subset E$. در این صورت، بستار ضعیف K را که با $\bar{K}^w$ نمایش می‌دهیم، به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{K}^w = \{x \in E : \ \exists \{x_n\} \subset K \ \ni \ \ x_n \rightharpoonup x, \ \ n \to \infty\}.$$

۶.۲.۲ قضیه. فرض می‌کنیم K زیرمجموعه‌ای محدب در فضای برداری نرم‌دار E باشد. در این صورت، بستار قوی و بستار ضعیف K برابرند؛ یعنی، $\bar{K} = \bar{K}^w$.

۷.۲.۲ تعریف. فرض می‌کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای درفضای E^* باشد. گوییم $\{f_n\}$ به‌طور ضعیف* به $f \in E^*$ همگراست و می‌نویسیم $f_n \rightharpoonup^* f$ وقتی $n \to \infty$، هرگاه برای هر $x \in E$،

$$\langle x, f_n\rangle \to \langle x, f\rangle, \qquad n \to \infty.$$

نکته. فرض می‌کنیم $f_n \to f$ وقتی $n \to \infty$. چون برای هر $x \in E$ و هر $n \geq ۱$ داریم

$$|\langle x, f_n\rangle - \langle x, f\rangle| \leq \|f_n - f\|\|x\|,$$

پس در E^*، همگرایی قوی، همگرایی ضعیف* را نتیجه می‌دهد.
در E^*، از همگرایی ضعیف نیز می‌توان به همگرایی ضعیف* رسید؛ زیرا اگر فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای در E^* باشد که به‌طور ضعیف به f همگراست، داریم

$$\langle g, f_n\rangle \to \langle g, f\rangle, \qquad g \in E^{**}.$$

از آن‌جا که $E \hookrightarrow E^{**}$ (به توضیحات بخش (۲.۲) مراجعه نمایید.)، پس

$$\langle x, f_n\rangle \to \langle x, f\rangle, \qquad x \in E.$$

۳.۲ فضاهای انعکاسی

فرض می‌کنیم E یک فضای برداری نرم‌دار و E^* فضای دوگان آن باشد. دوگان E^* را با E^{**} نشان می‌دهیم و آن را دوگان دوم E می‌نامیم. بنابراین، E^{**} مجموعه‌ی تابعک‌های خطی کران‌دار روی E^* می‌باشد.

حال فرض می‌کنیم $x \in E$. قرار می‌دهیم

$$\begin{cases} \hat{x} : E^* \to \mathbb{F} \\ f \mapsto \langle x, f \rangle. \end{cases}$$

روشن است $\hat{x}$ یک تابعک خطی است؛ به‌علاوه،

$$|\langle f, \hat{x} \rangle| = |\langle x, f \rangle| \leq \|f\| \|x\|, \qquad f \in E^*.$$

در نتیجه، $\|\hat{x}\| \leq \|x\|$؛ یعنی، $\hat{x} \in E^{**}$.

اکنون فرض می‌کنیم نگاشت $J_\circ$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$\begin{cases} J_\circ : E \to E^{**} \\ x \mapsto \hat{x}. \end{cases}$$

خطی بودن $J_\circ$ بدیهی است؛ از طرفی طبق یکی از نتایج قضیه‌ی هان‌ـباناخ $f_x \in E^*$ی موجود است که $\|f_x\| = ۱$ و $\langle x, f_x \rangle = \|x\|$؛ بنابراین

$$\|x\| = |\langle x, f_x \rangle| = |\langle f_x, \hat{x} \rangle| \leq \|\hat{x}\| \|f_x\|$$

در نتیجه $\|x\| \leq \|\hat{x}\|$؛ چون $\|\hat{x}\| \leq \|x\|$ پس $\|\hat{x}\| = \|x\|$؛ و این به معنی ایزومتری بودن $J_\circ$ است.

از مباحث بالا می‌توان نتیجه گرفت $E \hookrightarrow E^{**}$؛ یعنی، E در E^{**} نشسته است.

۱.۳.۲ تعریف. نگاشت $J_\circ : E \to E^{**}$ که در آن $J_\circ(x) = \hat{x}$، ایزومتری خطی‌ـکانونی نام دارد.

اکنون آمادگی لازم برای تعریف فضاهای انعکاسی را داریم.

۲.۳.۲ تعریف. فضای برداری نرم‌دار E را انعکاسی نامیم هرگاه ایزومتری خطی‌ـکانونی $J_\circ$ پوشا باشد.

مثال. فضاهای هیلبرت و فضاهای $\ell^p(۱ < p < \infty)$ مثال‌هایی از فضاهای انعکاسی می‌باشند.

توجه. در فضاهای باناخ انعکاسی، $E \simeq E^{**}$؛ پس می‌توان E و E^{**} را یکسان در نظر گرفت.

نکته. در فضای انعکاسی E، همگرایی ضعیف* در E^*، همگرایی ضعیف را نتیجه می‌دهد؛ زیرا اگر $f_n \rightharpoonup^* f$ وقتی $n \to \infty$، داریم

$$\langle x, f_n\rangle \to \langle x, f\rangle, \qquad x \in E.$$

از طرفی، در فضای انعکاسی E، $E \simeq E^{**}$؛ پس

$$\langle g, f_n\rangle \to \langle g, f\rangle, \qquad g \in E^{**},$$

یعنی، اگر $n \to \infty$، آن‌گاه $f_n \rightharpoonup f$.

قضیه‌های زیر شرط لازم و کافی برای انعکاسی بودن یک فضای باناخ را ارائه می‌دهد.

۳.۳.۲ قضیه ([۱۶، ص۱۴۱]) (قضیه‌ی ابرلین‌ـشمولیان [۴]). فضای باناخ E، انعکاسی است اگر و فقط اگر هر دنباله‌ی کران‌دار در E، شامل زیر دنباله‌ای باشد که به‌طور ضعیف به عنصری از E همگرا باشد.

۴.۳.۲ قضیه ([۷، ص۴]). فرض می‌کنیم $S(\circ;1) = \{x \in E:\ \|x\| \leq 1\}$ گوی واحد در E باشد. در این صورت فضای باناخ E، انعکاسی است اگر و فقط اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:
آ) E^* انعکاسی باشد؛
ب) $S(\circ;1)$ در E^* به‌طور ضعیف فشرده باشد؛
پ) هر دنباله‌ی کران‌دار در E دارای زیر دنباله‌ای به‌طور ضعیف همگرا باشد؛
ت) برای هر $f \in E^*$، $x \in S(\circ;1) \subset E$ی موجود باشد به‌طوری‌که $\langle x, f\rangle = \|f\|$؛
ث) برای هر زیرمجموعه‌ی ناتهی، کران‌دار، بسته و محدب K از E و هر $f \in E^*$، $x \in K$ی موجود باشد که $\langle x, f\rangle = \sup\{\langle y, f\rangle:\ y \in K\}$؛
ج) برای هر دنباله‌ی نزولی $\{K_n\}$ از زیرمجموعه‌های ناتهی، کران‌دار، بسته و محدب در E داریم $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$.

۵.۳.۲ قضیه ([۴، ص۵۶]). فضای باناخ E انعکاسی است اگر و فقط اگر هر $f \in E^*$، سوپریمم خود را روی کره‌ی واحد E اختیار کند.

اکنون با بیان دو قضیه‌ی زیر، که در فصل سوم کاربرد دارد، بحث فضاهای انعکاسی را به پایان می‌رسانیم.

۶.۳.۲ قضیه ([۱، ص۲۳]). هر زیرمجموعه‌ی بسته و کران‌دار در یک فضای باناخ انعکاسی، به‌طور ضعیف فشرده است.

[۴] Eberlein-Shmulyan theorem