بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام نور

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه:

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض شاخه آنالیز

قابهای موجکی وویل- هایزینبرگ وبسلی وپایه های شبه ریس درفضای هیلبرت

مولف

حوریه فرخوی

استادراهنما

دکتراسدالله نیکنام

استا د مشاور

دکترثریا طالبی

دیماه ۱۳۸۳

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم تحقیقات و فناوری

دانشگاه پیام نور

تاریخ: ۸۳/۱۰/۲۸
شماره: ....
پیوست: ....

بسمه تعالی

تصویب نامه پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان: قابهای حبلی - قابهای موجکی و ویل هیزنبرگ و پایه‌های شبه ریسز

که توسط خانم حوریه فرخوی تهیه و به هیئت داوران ارائه گردیده است مورد تائید می باشد.

تاریخ دفاع: ۸۳/۱۰/۲۸ نمره: ۱۵/۵ پانزده و نیم درجه ارزشیابی: خوب

اعضای هیئت داوران :

نام و نام خانوادگی	هیئت داوران	مرتبه علمی	امضاء
دکتر اسدالله نیکنام	استاد راهنما	استاد	
دکتر ثریا طالبی	استاد راهنمای همکار یا مشاور	استادیار	
دکتر علی جلیلیان	استاد ممتحن	استادیار	
دکتر عقیل حیدری	نماینده گروه آموزشی	استادیار	

تقدیم به آستان قدس رضوی و بارگاه ملکوتی ثامن‌الحج امام رضا (ع) و تشکر از مادر مهربانم که با تحمل رنج سفر به شوق زیارت و همراهی حقیر مشکلات و سختیهای سفر و تحصیل را بر من آسان کرد و همسر خوبم که همواره در طـول زنـدگی امید و مایه اعتماد به نفس من است و تشکر فراوان از دو دانشجوی کارشناسی ارشد بسیار عزیـز در دانشـگاه تربیـت معلـم تهران خانم‌ها منصوره موسی‌پور و آزاده علیجانی که در فراگیری و رفع اشکالات درسی و پایـان‌نامـه بسـیار بسـیار بـه مـن کمک کردند. اجرشان با امام رضا(ع) و تقدیم به دخترم که با حضور خود باعث دلگرمی و تلاش و پشتکار بیشتر من شد.

فهرست مطالب

فهرست علائم

نام خانوادگی دانشجو: فرخوی . **نام:** حوریه

عنوان پایان نامه: عملگرهای پیش قاب وقابهای بسلی وپایه های شبه ریس وقابهای ویل هیزینبرگ وموجک

استاد راهنما: دکتر اسدالله نیکنام

استاد مشاور: دکتر ثریا طالبی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی **گرایش:** آنالیز **دانشگاه:** پیام نور مرکزمشهد

دانشکده: علوم **تاریخ فارغ التحصیلی:** دی ماه ۱۳۸۳ **تعدادصفحه:** ۱۰۰

لغات کلیدی: عملگر پیش قاب- پایه ریس- پایه شبه ریس- قاب بسلی- دنباله‌های بسل- افزایش و کسر قاب- دستگاه گابور(ویل- هایزینبرگ) - دستگاه موجک

چکیده: یک مسئله مورد علاقه در ارتباط با قابها در فضای هیلبرت توصیف و مشخص کردن قابهایی است که ذاتاً به عنوان پایه ریس برای تخمین اهدافی در نظر گرفته می‌شوند و یا خاصیتهای معینی از پایه‌های ریس را دارا می‌باشند. در این مقاله به مطالعه این مسائل با استفاده از عملگر پیش قاب و تئوری مدل برای قابهای مشتق شده از این ایده می‌پردازیم. در حالت خاص نشان می‌دهیم که باحذف یک مجموعه متناهی بردارها از یک قاب $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ یک پایه‌ریس باقی می‌ماند اگر و فقط اگر قاب، بسلی باشد. (یعنی $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n\ x_n$ همگراست اگر و فقط اگر $(a_n) \in \ell^{۲}$) همچنین به تعریف پایه شبه ریس پرداخته و ارتباط بین پایه شبه ریس و قابهای بسلی و بعد هسته عملگر پیش قاب را بررسی می‌کنیم.

در ادامه تعریفی از قابهای موجکی ویل- هایزینبرگ را بیان می‌کنیم و ثابت می‌کنیم در قابهای موجکی و ویل- هایزینبرگ که بیش از حد کامل هستند با حذف یا جابجایی عناصر نامتناهی از آنها خاصیت قاب بودن از دست نمی‌رود و همچنین نشان می‌دهیم که دستگاه ویل- هایزینبرگ $(g;۱,۱)_{WH}$ در $L^{۲}(R)$ که به وسیلهٔ تابع گوسی $g(x)=e^{-x^{۲}}$ تولید شده است قاب نیست. در انتها به بحث پیرامون تبدیل زاک پرداخته و به وسیلهٔ این تبدیل نشان می‌دهیم که $(g,۱,۱)_{WH}$ یک دنبالهٔ بسل است و یک قاب برای $L^{۲}(R)$ نیست و $(g,۱,۱)_{wH}$ مثالی است از یک دستگاه ویل- هایزینبرگ که $\dim\ker T^{*} \le e(F)$ که $F=(g,۱,۱)_{WH}$ و $e(F)$ را افزایش قاب گویند و T^{*} به صورت زیر است:

$$T^{*}:\ell^{۲}(\mathbb{Z}^{۲}) \to L^{۲}(R) \quad ; \quad T^{*}c=\sum_{m,n} c_{m,n}\ g_{m,n,۱,۱} \ , \quad c=\{c_{m,n}\}_{m,n\in\mathbb{Z}} \in \ell^{۲}(\mathbb{Z}^{۲})$$

مقدمه

مفهوم قاب در فضای هیلبرت به طور اساسی توسط دوفین واسچودر در سال ۱۹۵۲ فقط ۶ سال بعد از گابور (۱۹۴۶) که تبدیل گابور را معرفی کرد، در زمینه سریهای فوریه غیر هارمونیک معرفی شد. تئوری قابها و پایه‌ها خیلی سریع در عرض ۱۰ سال و به خصوص در زمینه موجک و دستگاه گابور توسعه یافته‌اند، قابها ابتدا در فضای هیلبرت بررسی شدند و سپس نتایج حاصله قابل تعمیم در فضای با ناخ شدند به طوریکه نتایج حاصله در هر دو فضا هم ارزند. قابها بیشتر در فضای هیلبرت $L^2(R)$ بررسی می‌شوند در فضای $L^2(R)$ تابع f را به عنوان سیگنال در نظر می‌گیریم یک پایه $\{f_n\}$ برای $L^2(R)$ به این صورت است که هر f در $L^2(R)$ را می‌توان به صورت $f=\sum c_n f_n$ نوشت که $\{c_n\}$ منحصر به فردا تذ. می‌توان به رابط اخیر به عنوان تجزیه سیگنال پیچیده شده f به توی یک مجموع ارز رشته ساختمانهای ساده f_n نگاه کرد. در ۱۰ سال اخیر نشان داده شده است که اغلب کار کردن با قابها به جای پایه‌ها خیلی راحت است به این صورت که، اگر $\{f_n\}$ یک قاب برای $L^2(R)$ باشد هر f در $L^2(R)$ می توان به صورت یک سری همگرای غیرشرطی که ضرایب $\{c_n\}$ منحصر به فرد نیستندنشان داد و این منحصر به فرد نبودن دارای چندین فایده است. ۱- امکان انتخاب بهتر ضرایبی که مناسب برای کاربردهای معین هستند ۲- چون شرط پایه (متعامدیکه) خیلی قوی است ممکن است یا فتن یک پایه‌ای که در شرط اضافی‌ای که مورد نیاز برای یک کاربرد معین است صدق کند مشکل باشد به عبارت دیگر می‌توان گفت که قابها تعمیمی از پایه‌های متعامدیکه هستند. دو دسته از قابها به نام قابهای ویل ـ هایزینبرگ و موجکها از اهمیت زیادی برخوردارند که در این پایان نامه معرفی و خواصی از آنها بررسی خواهد شد. سیگنالها در حالت کلی غیرساکن هستند. یک نمایش کامل از سیگنالهای غیرساکن نیازمند آنالیز فرکانس است که محلی (موضعی) در زمان است که در آنالیز زمان ـ فرکانس از سیگنالها نتیجه می‌شود. آنالیز تبدیل فوریه به عنوان یک ابزار مهم برای مطالعه یکنواختی سیگنالها و فرآیندهایی که خاصیتهایی از لحاظ آماری، پایدار روی زمان هستند، شناخته شده است. اگر چه نمی‌تواند برای آنالیز فرکانس که موضعی (محلی) در زمان هست استفاده شود. در سالهای اخیر الگوی‌های مفید زیادی برای آنالیزسیگنالی زمان - فرکانس که شامل تبدیل گابور ـ تبدیل زاک و تبدیل موجک هستند, توسعه یافته است. تجزیه یک سیگنال به توی یک تعداد کوچک از شکلهای موجی ابتدایی که موضعی در زمان و فرکانس می‌شود یک نقش مهم در فرآیند سیگنالی بازی می‌کند. چنین تجزیه‌ای یک ساختمان مهم در آنالیز سیگنالهای غیر ساکن آشکار می‌کند. نظیر سخنرانی (صدا)، موزیک، به منظور اندازه گرفتن مولفه-های فرکانس موضعی شده صداها، گابور (۱۹۴۶) ابتدا تبدیل فوریه، پنجره‌ای شده (تبدیل زمان ـ فرکانس موضعی) معرفی کرد که به آن تبدیل گابور گویند. بعدها آنالیز گابور به طور مؤثر در

حوزه‌های زیادی از علوم و مهندسی نظیر آنالیز تصویر، اپتیک، بانکهای فیلتر و غیره بکار برده شد. چون آنالیز سیگنالی طبی و فرآیند سیگنالی طبی یک وظیفه مهم در تشخیص طبی باز می‌کند تبدیل گابور برای مطالعه توابع مغز، سیگنالهای ECC و غیره استفاده شده است. به منظور آشنایی بیشتر با سیگنالها گوییم که کمیتهای فیزیکی زیادی شامل فشار، امواج صوتی، میدان الکتریکی، ولتاژ، جریان الکتریکی و میدان مغناطیسی که با زمان تغییر می‌کنند را سیگنال یا شکل موجی می نامند مثالهایی از این سیگنالها شامل سخنرانی ـ سیگنالهای اپتیکی و رادار وغیره. در واقع سیگنالها خیلی رایج در دنیای واقعی هستند. در حالت واقعی در نوع سیگنال داریم ۱ـ معین (ثابت) ۲ـ تصادفی.

سیگنال را معین گویند در صورتیکه تحت شرایط یکسان به طور آشکار بر طبق یک ارتباط ریاضی تعیین شود و متناوب است اگر به طور پیوسته دربازه‌های منظم زمان تکرار شوند یا درصفر در بازه زمانی متناهی صفر شوند. سیگنال را تصادفی گویند اگر به طور دقیق در زمان تحت شرایط یکسان تعیین نشوند. بعد از معرفی تبدیل گابور دو نوع از این تبدیل معرفی شد ۱ـ پیوسته ۲ـ گسسته. در کاربردهای فیزیکی و مهندسی نوع گسسته مهم‌تر است. تبدیلی را که گابور معرفی کرد به کمک تابعی به نام تابع گابور که دنباله‌ای از توابع گابور با داشتن شرایطی یک قاب گابور یا ویل هایزینبرگ خواهد شد که در این پایان نامه این شرایط را بیان خواهیم کرد. و اما موجک، از نظر تاریخی در اوایل سال ۱۹۸۰ این مفهوم جدید به عنوان ترکیبی از عقاید موجود در نظم ریاضیات، فیزیک و مهندسی پدیدار شد که در سال ۱۹۸۲ مورلت[۱] نظریه تبدیل موجک را معرفی کرد که موفقیتهای زیادی در فرآیند سیگنالی و آنالیز سیگنالی زمان ـ فرکانس پیدا کرد. دو نوع تبدیل موجک داریم: ۱ـ پیوسته و گسسته، تحقیقات روی تبدیل موجک گسسته منجر به مفهوم قاب شد افراد مختلفی چون میر[۲] روی موجکها کار کردند و انواع مختلفی از موجکها ساخته شد و در سالهای اخیر توسعه و کاربردهای آنالیز موجک برای توصیف توابع جبری مختلط .موارد کاربرد تبدیل موجک عبارتند از گرافیک کامپیوتری، اپتیک کوانتم، تئوری ماتریس ها و تئوری عملگرها، آنالیز عددی، فرآیند تصویری و غیره. در فصل اول این پایان نامه قضایا و تعاریفی که پیش نیاز و لازم برای اثبات قضایا است و مفاهیم اولیه به منظور مرور و آشنایی ذکر می‌شوند و در فصل دوم با تعریف قاب و قضایای مربوط به آن و قاب موجک و ویل هایزینبرگ و تبدیل زاک آشنا می‌شویم و در فصل سوم قضایایی در مورد دستگاه ویل هایزینبرگ و موجک و کسر و افزایش قاب و پایه‌های شبه ریس و قابهای بسلی مطرح و اثبات خواهند شد.

۱- Morlet
۲- Meyer

فصل اول

پیشنیازها

در این فصل سعی می‌کنیم نمادها و تعاریف و قضایایی که در فصول بعد مورد نیاز است بیان نماییم. در این فصل از منابع زیر استفاده شده است: [۲],[۴],[۷],[۲۴],[۱],[۳۰],[۶],[۹],[۳]

۱- فضای هیلبرت

تعریف۱- ۱:

یک فضای متری مجموعه‌ای است مانند X که در آن یک تابع فاصله (متر) مانند ρ یا d با خواص زیر تعریف می‌شود، به ازای هر z, y, x در X داریم:

الف) $\circ \leq \rho(x,y) < \infty$

ب) $\rho(x,y) = \circ$ اگر و فقط اگر $x = y$

پ) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$

ت) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$

تعریف ۱-۲:

یک فضای برداری X روی میدان اسکالر F یک مجموعه است که عناصرش را بردار می‌نامند و دو عملگر به نام جمع و ضرب اسکالر تعریف می‌شود که دارای خواص جبری زیر می‌باشد به ازای هر z, y, x در X و به ازای هر β, α در میدان F.

الف) $x + y = y + x$

ب) $x + (y+z) = (x+y) + z$

پ) $x + \circ = \circ + x = x$

ت) $x + (-x) = -x + (x) = \circ$

ث) $۱x = x$

ج) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

چ) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y \quad , \quad (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$

توضیح:

به هر جفت از بردارهای y,x یک بردار $x+y$ با خاصیت الف مربوط است.

فضای X یک بردار منحصر به فرد ۰ با خاصیت پ دارد و یک بردار منحصر به فرد $-x$ با خاصیت ت دارد.

و به هر جفت (α,x) با $\alpha \in F$ یک بردار با خاصیت چ مربوط است.

خاصیت توزیع پذیری یا پخشی در این فضا خاصیت چ است.

اگر $F=\mathbb{C}$ یا $F=R$ فضای X فضای برداری مختلط یا فضای برداری حقیقی می‌گویند.

تعریف ۱-۳:

گردایه τ از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ X را یک توپولوژی در X گوییم اگر τ از سه خاصیت زیر بهره‌مند باشد:

الف) $x \in \tau \ ,\phi \in \tau$

ب) اگر به ازای $i=1,2...,n \quad , \quad V_i \in \tau$ آنگاه $V_1 \cap V_2 ... \cap V_n \in \tau$

پ) اگر $\{V_\alpha\}$ گردایه دلخواهی از اعضای τ (متناهی، شمارش‌پذیر، شمارش ناپذیر) باشد آنگاه $U_\alpha V_\alpha \in \tau$.

تعریف ۱-۴:

یک فضای برداری توپولوژیکی یک فضای برداری با توپولوژی τ است که هر نقطه بـه عنـوان یـک مجموعـه تـک عـضوی بسته‌است و اعمال فضای برداری با توپولوژی τ پیوسته است این اعمال عبارتند از:

$$\begin{array}{ll} X\times Y \to X \quad , & X\times Y \to Y \\ (x,y)\to x+y & (\alpha,y)\to \alpha y \end{array}$$

تعریف ۱-۵:

فرض کنیم که H یک فضای برداری روی میدان اسکالر F باشد آنگاه H یک فضای ضرب داخلی است اگر بـرای هـر g,f در H وجود داشته باشد عدد مختلط $<f,g>$ که به آن ضرب داخلی می‌گویند به طوریکه دارای خـواص زیـر است:

الف) $<f,f>\geq 0$ یعنی $<f,f>$ حقیقی است

ب) $<f,f>=0$ اگر و فقط اگر $f=0$

پ) $<f,g>=\overline{<g,f>}$

ت) $< af_1 + bf_2 , g >= a < f_1 , g > + b < f_2 , g >$ که g , f_2 , f_1 در b , a , H در میدان اسکالر F است که میدان اسکالر را می توان R یا $\mathbb{C}$ انتخاب کنیم.

هر ضرب داخلی یک نرم را به صورت $\|f\| = < f , f >^{\frac{1}{2}}$ تعریف می کند که با توجه به خواص بالا واقعاً $< f , f >$ یک نرم خواهد بود که خواص نرم عبارت است از:

الف) به ازای هر f در H، $\|f\| \geq 0$

ب) $\|f\| = 0$ اگر و فقط اگر $f = 0$

پ) $\|cf\| = |c| . \|f\| \qquad \forall c \in F$

ت) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

پس هر فضای ضرب داخلی یک فضای خطی نرمدار است. اگر فاصله بین y , x را برابر با $\|x - y\|$ تعریف کنیم لذا تمام اصول موضوعه فضای متری برقرار است هرگاه این فضای متری H کامل باشد یعنی هر دنباله کوشی[1] در H همگرا در H باشد آنگاه به H فضای هیلبرت[2] گویند. فضای هیلبرت در این پایان‌نامه با H نشان داده شده است.

تعریف ۱-۶:

هر فضای باناخ[3] X یک فضای خطی نرمدار است که با متر تعریف شده به وسیلهٔ نرم کامل است. فضای خطی نرمدار X فضای برداری مختلط X است که به هر x در X یک عدد حقیقی نامنفی مانند $\|x\|$ به نام نرم x چنان مربوط است که:

الف) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \forall x , y \in X$

ب) $\|\alpha x\| = |\alpha| . \|x\| \qquad \forall \alpha \in F \quad \forall x \in X$

پ) اگر $\|x\| = 0$ آنگاه $x = 0$

نتیجه:

هر فضای هیلبرت یک فضای باناخ است که نرمش به وسیلهٔ ضرب داخلی تعیین می‌شود.

---

۱) Cau chy
۲) Hilbert
۳) Banach

تعریف ۱-۷:

فرض کنیم X یک فضای نرمدار باشد و فرض کنیم $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله از عناصر X باشد گوییم:

دنبالهٔ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ کوشی است اگر

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad \forall m, n \geq N \qquad \|f_m - f_n\| < \varepsilon$$

تعریف ۱-۸:

دنباله $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا به f است اگر

$$\lim \|f_n - f\|_{n\to\infty} = 0$$

یا به عبارت دیگر

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad \forall n \geq N \quad , \quad \|f_n - f\| < \varepsilon$$

قضیهٔ ۱-۱:

به ازای هر y, x در فضای هیلبرت H داریم:

$$.|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|.\|y\|$$ (نامساوی کشی- شوارتز)[۱]

■ [۲]

تعریف ۱-۹:

فرض کنیم که $1 \leq p < \infty$ ، f تابع اندازه‌پذیر مختلط باشد آنگاه

$$L^p(R) = \left\{ f : R \to \mathbb{C} : \int |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}, \ \|f\|_p = \left(\int |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$L^{\infty}(R) = \{ f : R \to \mathbb{C} : \text{اساساً کراندار است } f \}, \ \|f\|_{\infty} = essen \sup_{x \in R} |f(x)|$$

که

$$essen \ \sup f(x) = \inf \{ \lambda \in R \,|\, f(x) \leq \lambda \, a.e. \}$$

$$\ell^p = \left\{ (a_n) : \sum_n |a_n|^p < \infty \right\}, \quad n \in \mathbb{Z} \longrightarrow N, \ a_n \in \mathbb{C}, \|(a_n)\|_p = \left(\sum_n |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\ell^{\infty} = \left\{ (a_n) : \sup_n |a_n| < \infty \right\}, \ \|(a_n)\|_{\infty} = \sup_n |a_n| \quad n \in Z \longrightarrow N$$

---

۱) cauchy - schawarz

نکته:

X یک فضای اندازه‌پذیر است هرگاه گردایه m از زیر مجموعه‌های X یـک $\sigma-$ جبـر در X باشـد یعنـی m دارای خواص زیر باشد:

الف) $X \in m$

ب) اگر $A \in m$ آنگاه $A^c \in m$ که A^c متمم A نسبت به X است.

پ) اگر $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $n = 1,2,3,...$, $A_n \in m$ آنگاه $A \in m$.

فرض کنیم $g : X \to [0,\infty]$ اندازه پذیر باشد. S مجموعه تمام αهای حقیقی باشد که $\mu\left(g^{-1}(\alpha,\infty]\right) = 0$ اگـر $S = \phi$ قرار می‌دهیم $\beta = \infty$ و اگر $S \neq \phi$ قرار می‌دهیم $\beta = \inf S$ چون

$$g^{-1}\left((\beta,\infty]\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} g^{-1}\left(\left(\beta + \frac{1}{n},\infty\right]\right)$$

و اجتماع گردایه شمارش پذیری از مجموعه‌ها از اندازه صفر دارای انـدازه صـفر اسـت پـس $\beta.\beta \in S$ را سـوپریمم مهـم اساسی g می‌نامند. اگر f تابع اندازه‌پذیر مختلط بر X باشد $\|f\|_\infty$ را سوپریمم اساسـی $|f|$ تعریـف کـرده و اعـضای $L^\infty(\mu)$ مجموعهٔ تمام f هایی است که $\|f\|_\infty < \infty$ و اعضای $L^\infty(\mu)$ را توابع اندازه‌پذیر به طور اساسی کرانـدار بـر X می‌نامند و از این تعریف داریم که اگر به ازای تقریباً هر x , $|f(x)| \leq \lambda$ آنگـاه $\|f\|_\infty < \lambda$ و بـرعکس. μ انـدازه مثبت بر فضای اندازه X است.

اگر X یک فضای اندازه‌پذیر و Y یک فضای توپولوژیکی باشد و f نگاشتی از X به توی Y باشد گوییم f انـدازه‌-پذیر است اگر به ازای هر مجموعه باز V در Y، $f^{-1}(V)$ یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر در X باشد.

مثال:

$L^2(R)$ که $\langle f,g\rangle = \int f(x).\overline{g(x)}dx$, در ℓ^2 , $<(a_n),(b_n)> = \sum a_n \overline{b_n}$ فضای هیلبرت هـستند. و $L^p(R)$, ℓ^p که $p \neq 2$ فضای هیلبرت نیستند.

تعریف ۱-۱۰:

فضای X متریک پذیر است اگر توپولوژی τ موجود در فضای X توسط متر d القا شود که در این حالـت مـی‌گوینـد d با τ سازگار است.

قضیهٔ ۱-۲:

فرض کنیم که Y, X دو فضای برداری توپولوژیکی باشند و $\lambda : X \to Y$ تبدیل خطی یا نگاشت خطی باشد آنگاه داریم که پ $\leftarrow$ ب $\leftarrow$ الف و اگر X متریک پذیر باشد داریم الف $\leftarrow$ ت $\leftarrow$ پ

الف) λ پیوسته است

ب) λ کراندار است

پ) اگر $x_n \to ۰$ آنگاه $\left\{\lambda x_n \middle| n \in N\right\}$ کراندار است

ت) اگر $x_n \to ۰$ آنگاه $\lambda x_n \to ۰$. [۴] ■

نکته:

اگر X , Y دو فضای خطی نرمدار X یا باناخ X یا هیلبرت H باشند قضیه برقرار است و λ خطی است اگر

$$a, b \in \mathbb{C}, x, y \in X \qquad \lambda(ax + by) = a\lambda x + b\lambda y$$

قضیهٔ ۱-۳:

(باناخ- اشتاین هاوس[1]):

فرض کنیم X یک فضای باناخ و Y یک فضای خطی نرمدار و $\{\lambda_\alpha\}$ گردایه‌ای از تبدیلات خطی کراندار از X به توی Y باشد که در آن α در مجموعهٔ اندیس‌گذاری چون A تغییر می‌کند. در این صورت عددی مانند $M < \infty$ هست به طوریکه به ازای هر $\alpha \in A$، داریم $\|\lambda_\alpha\| \leq M$. [۲] ■

تعریف ۱-۱۱:

فرض کنیم که T, S دو فضای توپولوژیکی باشند و $f : S \to T$ یک نگاشت باز است اگر $f(u)$ در T باز باشد هرگاه که u در S باز باشد و یا f در $p \in S$ باز است اگر $f(v)$ شامل یک همسایگی از $f(p)$ باشد هرگاه v یک همسایگی از p باشد.

تعریف ۱-۱۲:

X یک F- فضا است اگر توپولوژی τ به وسیله یک متر کامل و پایا القا شود.

---

۱) Banach- steinhaus

تعریف ۱-۱۳:

یک متر d روی فضای برداری X پایا نامیده می‌شود. اگر به ازای هر z,y,x در X داشته باشیم:

$$d(x+z,y+z)=d(x,y)$$

تعریف ۱-۱۴:

d یک متر کامل روی X است اگر هر دنباله کوشی در X همگرا به یک نقطه از X شود.

تعریف ۱-۱۵:

یک گردایه γ از همسایگی‌های یک نقطه $p\in X$ یک پایه موضعی در p است اگر هر همسایگی از p شامل یک عضو از γ باشد.

تعریف ۱-۱۶:

فضای X را به طور موضعی محدب گویند اگر یک پایه موضعی β که اعضایش محدب‌اند موجود باشد.

تعریف ۱-۱۷:

فضای X را محدب گویند اگر به ازای هر y,x در X و $0\leq t\leq 1$ داشته باشیم $tx+(1-t)y\in X$.

قضیهٔ ۱-۴: (نگاشت باز)

فرض کنیم که X یک F- فضا باشد و Y یک فضای توپولوژیکی برداری و $\lambda:\mathrm{X}\to Y$ پیوسته و خطی باشد و $\lambda(\mathrm{X})$ از رسته نوع دوم در Y باشد آنگاه $\lambda(\mathrm{X})=Y$ ، λ یک نگاشت باز است و Y نیز $F-$ فضا است. [۴] ■

تعریف ۱-۱۸:

مجموعه‌های از رسته نوع اول در فضای توپولوژیکی S عبارتند از اجتماعهای شما را از مجموعه‌های هیچ جا چگال. و مجموعهٔ E که $\mathrm{E}\subset S$ هیچ جا چگال است اگر درون $\overline{\mathrm{E}}$ تهی باشد.

تعریف ۱-۱۹:

اگر فضایی از رسته نوع اول نباشد آنرا از رسته نوع دوم می‌نامند.

قضیهٔ ۱-۵:

اگر u در $B(X,Y)$ باشد [$B(X,Y)$ مجموعه همه تبدیلات خطی و کراندار] و همه مجموعه‌های بسته و کراندار را به یک مجموعهٔ بسته تصویر کند آنگاه برد u بسته‌است. [۹]■

قضیهٔ ۱-۶:

برای هر عضو f در فضای هیلبرت H داریم:

$$\|f\| = \sup\{|< f, g >| : \|g\| = 1\}$$

برهان:

بنا به نامساوی کشی- شوارتز داریم.

$$\forall g \in H \quad |< f, g >| \leq \|f\|.\|g\|$$

اگر $\|g\| = 1$ و با سوپریم گیری داریم:

$$\sup|< f, g >| \leq \|f\|$$

اگر $\|g\| \neq 1$ و فرض کنیم $\|f\| \neq 0$ زیرا در آن صورت مسئله بدیهی است، می‌توانیم g را به صورت زیر انتخاب کنیم که در آن صورت $\|g\| = 1$

$$g = \frac{f}{\|f\|}$$

در آن صورت

$$|\langle g, f \rangle| = \left|< \frac{f}{\|f\|}, f >\right| = \frac{1}{\|f\|}.\|f\|^2 = \|f\|$$

و قضیه تمام است.■

تعریف ۱-۲۰:

دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ را متعامدیکه گویند هر گاه به ازای هر n, m در N

اگر $\quad m \neq n \quad < x_n . x_m >= 0$

اگر $\quad m = n \quad \|x_n\|^2 =< x_n . x_n >= 1$

تعریف ۱-۲۱:

یک دستگاه متعامدیکه S در فضای ضرب داخلی X پایه متعامدیکه گفته می‌شود اگر برای هر x در X یک نمایش منحصر به فردی به صورت $x=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\ x_n$ که α_nها در $\mathbb{C}$, x_n در S هستند، وجود داشته باشد. توجه کنید که x_nها مجزا از هم هستند.

تعریف ۱-۲۲:

یک دنباله متعامدیکه $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ در فضای ضرب داخلی X کامل است اگر برای هر x در X داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x-\sum_{k=1}^{n}<x,x_k>x_k\right\|=0 \quad \text{یا} \quad x=\Sigma<x,x_n>x_n$$

تعریف ۱-۲۳:

به دنباله متعامدیکه $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ که در یکی از ۳ شرط زیر که باهم ،هم ارزند صدق کند پایه متعامدیکه می‌گویند.

الف) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ کامل است ب) $\sum_{n=1}^{\infty}\left|<x,x_n>\right|^2=\|x\|^2$ پ) $x=\sum_n<x,x_n>x_n$

قضیهٔ ۱-۷:

یک دنباله متعامدیکه $\{x_n\}$ در فضای هیلبرت H کامل است اگر و فقط اگر به ازای هر n در N $<x,x_n>=0$ آنگاه $x=0$ ($\overline{span\{x_n\}}=H$ که $span\{x_n\}=\left\{\sum_{n=-N}^{N}c_n x_n : N>0, c_n\in\mathbb{C}\right\}$)

برهان:

فرض کنیم $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله متعامدیکه کامل در H باشد آنگاه هر $x\in H$ نمایشی به صورت زیر دارد:

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}<x,x_n>x_n$$

بنابراین اگر برای هر $n\in N$ ، $<x,x_n>=0$ آنگاه $x=0$.

بالعکس: فرض کنیم به ازای هر $n\in N$ ، $<x,x_n>=0$ نتیجه دهد که $x=0$. و فرض کنیم. x یک عنصر در H باشد و y را به صورت زیر تعریف‌کنیم:

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}<x,x_n>x_n$$

این سری یا مجموع بنا به دو قضیه‌ای که نام خواهیم برد موجود است. حال چون برای هر $n\in N$ داریم:

$$\begin{aligned}<x-y\ ,x_n>&=<x,x_n>-<\sum_{k=1}^{\infty}<x,x_k>x_k,x_n>\\ =<x-y,x_n>&=<x,x_n>-\sum_{k=1}^{\infty}<x,x_k><x_k,x_n>\\ &=<x,x_n>-<x,x_n>=0\end{aligned}$$

لذا $x-y=0$ پس بنابراین:

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}<x,x_n>x_n$$

قضایای استفاده شده : الف- دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ که یک دنباله متعامدیکه در فضای هیلبرت Hاست، کامل است اگر و فقط اگر $\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|<x,x_n>|^2$.

ب- فرض کنیم $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله متعامدیکه در فضای هیلبرت H است و فرض کنیم $\{\alpha_n\}$ یک دنباله از اعداد مختلط باشد آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n$ همگراست اگر و فقط اگر $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2<\infty$ و در این حالت داریم:

$$\forall x\in H\qquad \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n\right\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2$$